

Recensões Críticas

Editor:
Jorge Almeida

GRUPOS E ÁLGBRAS DE LIE

Pedro J. Freitas
Departamento de Matemática
Universidade de Lisboa
e-mail: pjfreitas@fc.ul.pt

Grupos e Álgebras de Lie
Editora IST Press
Instituto Superior Técnico, 2011

O livro “*Grupos e Álgebras de Lie*” de José Carlos Santos reúne num só volume a teoria necessária para um aluno que queira iniciar estudos nesta área. A teoria é construída cumulativamente, definindo e estudando primeiro conceitos topológicos e de geometria diferencial, passando depois ao tema central do livro, grupos e álgebras de Lie, estudando seguidamente as suas representações, terminando com alguma teoria da análise harmónica em grupos compactos. Toma-se assim a opção de desenvolver mais temas topológicos e analíticos, em detrimento de teoremas de classificação, ou de descrições mais extensas de representações, por exemplo. Em termos expositivos, opta-se por desenvolver resultados gerais para depois os aplicar a grupos e álgebras concretos.

O livro começa por expor, nos dois primeiros capítulos, conceitos topológicos relacionados com este tema de uma forma bastante extensa e detalhada, com vários exemplos e desenvolvimentos cuidados da teoria.

É no terceiro capítulo que se inicia o estudo do tema que dá título ao livro. Aí se apresentam as definições de grupo e álgebra de Lie, fazendo-se imediatamente a relação entre os dois conceitos. São explicadas com detalhe duas maneiras de definir álgebra de Lie de um grupo de Lie: quer através de campos invariantes à esquerda, quer definindo o parêntese de Lie de elementos do espaço tangente à custa da aplicação ad .

Ainda neste capítulo estuda-se a aplicação exponencial e apresenta-se a fórmula de Campbell-Hausdorff. A seguir estudam-se propriedades de subgrupos e subálgebras de Lie, usando-se estes resultados para estudar os vários grupos de Lie de matrizes: os grupos especiais lineares, ortogonais, unitários e simpléticos. São determinadas a seguir, a partir da teoria geral, as respectivas álgebras de Lie. O capítulo termina com uma secção sobre variedades homogéneas e outra sobre integração.

O quarto capítulo estuda as representações de álgebras de Lie, começando pelas álgebras nilpotentes e resolúveis, passando a seguir às semi-simples, dando algum relevo às álgebras reductivas. Demonstra-se a semi-simplicidade das álgebras clássicas de matrizes e faz-se também o estudo clássico das representações de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, sem no entanto entrar na teoria dos sistemas de raízes e do grupo de Weyl. A intenção é voltar aos grupos de Lie e aí aplicar os resultados das álgebras. O capítulo termina com um estudo da forma de Killing e das álgebras envolventes, culminando na demonstração do famoso teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt.

O quinto capítulo descreve algumas representações de grupos de Lie com fortes ligações à física, estudando-se álgebras e grupos de Clifford e grupos de spinors envolvidos na descrição dos revestimentos universais de grupos ortogonais (recuperam-se aqui resultados topológicos desenvolvidos no segundo capítulo).

O sexto e último capítulo trata de grupos compactos e desenvolve resultados de análise funcional, terminando com a demonstração do teorema de Peter-Weyl e a sua relação com o quinto problema de Hilbert.

No fim de cada capítulo encontram-se extensas listas de exercícios, que são ora aspectos de esclarecimento ou desenvolvimento da teoria, ora resultados menos centrais, ora exemplos trabalhados.

Há igualmente três apêndices sobre topologia, geometria diferencial e álgebra multilinear, onde se desenvolvem resultados próprios de cada uma

destas áreas (e portanto exteriores à teoria central de que o livro se ocupa), mas cujos resultados são citados e usados no texto.

Antes destes apêndices há um interessante epílogo onde se descreve abreviadamente a história dos grupos de Lie, remetendo para a extensa bibliografia, que inclui tanto textos clássicos como trabalhos já deste século. O livro termina com um útil índice remissivo, sem ter no entanto um índice de símbolos e notação que se poderia igualmente revelar útil.

Em conclusão, o livro parece-nos um excelente guia para estudantes que desejem conhecer os resultados fundamentais na teoria dos grupos de Lie, com demonstrações cuidadas e completas, e as suas relações com análise harmónica, sem necessitar de ir procurar noutro lugar o material necessário relativo a tópicos como topologia ou análise em variedades.

