Frisos imperfeitos de números inteiros

Mário Bessa
Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências
Universidade da Beira Interior
e-mail: bessa@ubi.pt

Maria Carvalho
Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências
Universidade do Porto
e-mail: mpcarval@fc.up.pt

Resumo: Diz-se que um subconjunto $\mathscr{N}$ de $\mathbb{Z}_0^+$ tem *densidade* se existe o limite

$$\Delta(\mathscr{N}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ \#\{0 \leq i < n \colon i \in \mathscr{N}\}$$

onde # representa o cardinal do conjunto. Por exemplo,

$$\Delta(\{n \in \mathbb{Z}_0^+ : n \text{ é ímpar}\}) = \Delta(\{n \in \mathbb{Z}_0^+ : n \text{ é par}\}) = 1/2$$

e $\Delta(F) = 0$ se F é finito. Um valor positivo de Δ informa não só que $\mathscr{N}$ é infinito mas também que os seus elementos estão distribuídos de modo que é possível detectar no conjunto alguns padrões. Por exemplo, $\mathscr{N}$ tem de conter progressões aritméticas de comprimento arbitrariamente grande [3, 2].[1] Ou seja, dado um natural k, existem $a, b \in \mathbb{Z}_0^+$ tais que $a + jb \in \mathscr{N}$, para todo $j \in \{0, ..., k\}$. Contudo, não temos informação sobre a razão b da progressão aritmética, sendo certo que não serve qualquer b previamente fixado.[2] Provaremos que, apesar disso, $\mathscr{N}$ tem de reproduzir, a menos de um erro arbitrariamente pequeno e a escala suficientemente reduzida, a distribuição de qualquer bloco finito de racionais de $[0, 1]$.

palavras-chave: Progressão aritmética; densidade positiva.

Abstract A subset $\mathscr{N}$ of $\mathbb{Z}_0^+$ is said to have *density* if the limit

$$\Delta(\mathscr{N}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ \#\{0 \leq i < n \colon i \in \mathscr{N}\}$$

exists, where # denotes the cardinal. For instance,

$$\Delta(\{n \in \mathbb{Z}_0^+ : n \text{ is odd}\}) = \Delta(\{n \in \mathbb{Z}_0^+ : n \text{ is even}\}) = 1/2$$

[1] Recentemente, Green e Tao [1, 4] mostraram que o mesmo é válido para o conjunto dos números primos, apesar de este ter densidade nula.

[2] Por exemplo, qualquer natural ímpar b é incompatível com $\mathscr{N} = \{n \in \mathbb{Z}_0^+ : n \text{ é par}\}$.

and $\Delta(F) = 0$ if F is finite. A positive density ensures not only that the set is infinite but also that the arrangement of its elements is such that it is possible to find inside it highly symmetric and arbitrarily long blocks of equidistant points. For example, although this is not a necessary condition [1, 4], a set $\mathscr{N}$ with positive density must include arbitrarily long arithmetic progressions [3, 2]. That is, given a positive integer k, there are $a, b \in \mathbb{Z}_0^+$ such that $a + jb \in \mathscr{N}$, for all $j \in \{0, ..., k\}$. However, no information is given about the ratio b in the arithmetical progression, and surely not all choices of b are suitable for a fixed set (for instance, any odd integer b is incompatible with the set $\mathscr{N} = \{n \in \mathbb{Z}_0^+ : n \text{ is even}\}$). Nevertheless, a positive density set has to contain, up to an arbitrarily small error, a scaled copy of any finite block of rational numbers of $[0, 1]$, for all scales not bigger than a specified bound.

keywords: Arithmetical progression; positive density.

1 Introdução

Fixemos um subconjunto $\mathscr{N}$ de $\mathbb{Z}_0^+$, um natural $k > 1$ e um conjunto finito $\mathcal{Q} = \{q_1, q_2, ..., q_k\}$ em $\mathbb{Z}_0^+$ tal que $q_1 < q_2 < ... < q_k$.

Definição 1.1. *Dados $n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$, uma (n, ϵ)-*escala de $\mathcal{Q}$ em $\mathscr{N}$ *é um subconjunto $\{r_1, r_2, ..., r_k\}$ de $\mathscr{N}$ com k elementos tal que, para todo $i \in \{1, 2, ..., k\}$, se tem*

$$\left| \frac{r_i}{n} - \frac{q_i - q_1}{q_k - q_1} \right| < \epsilon.$$

Por exemplo, sejam $\mathscr{N} = \{n \in \mathbb{Z}_0^+ : n \text{ é ímpar}\}$, $k = 5$, $\mathcal{Q} = \{1, 5, 9, 13, 17\}$, $n = 200$ e $\epsilon = \frac{1}{100}$. Então

$$\frac{q_1 - q_1}{q_5 - q_1} = 0, \quad \frac{q_2 - q_1}{q_5 - q_1} = \frac{1}{4}, \quad \frac{q_3 - q_1}{q_5 - q_1} = \frac{2}{4}, \quad \frac{q_4 - q_1}{q_5 - q_1} = \frac{3}{4}, \quad \frac{q_5 - q_1}{q_5 - q_1} = 1$$

e o subconjunto de $\mathscr{N}$

$$\{r_1 = 1, r_2 = 51, r_3 = 101, r_4 = 151, r_5 = 201\}$$

é uma (n, ϵ)-escala de $\mathcal{Q}$ em $\mathscr{N}$ uma vez que, para $1 \leq i \leq 5$, se tem

$$r_i \in \mathscr{N} \quad \text{e} \quad \left| \frac{r_i}{200} - \frac{q_i - q_1}{16} \right| < \frac{1}{100}.$$

Em geral, se $\mathcal{Q}$ é a união de $m+1$ elementos consecutivos de uma progressão aritmética de incremento d, então uma (n, ϵ)-escala de $\mathcal{Q}$ é, a menos de uma homotetia de razão $\frac{1}{n}$ e um erro menor que ϵ, outra progressão aritmética, uma vez que os racionais $\frac{q_i - q_1}{q_k - q_1}$, definidos a partir de $\mathcal{Q}$, são precisamente 0, $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}$,..., $\frac{m-1}{m}$, 1.

No que se segue, mostraremos que, fixando $\mathcal{Q}$, não necessariamente parte de uma progressão aritmética, uma medida de precisão $\epsilon > 0$ e um natural n suficientemente grande, se $\mathcal{N}$ tem densidade positiva, então, negligenciando diferenças menores do que ϵ, podemos encontrar em $\mathcal{N}$ cópias homotéticas (de razão n) dos racionais criados a partir de $\mathcal{Q}$.

Teorema 1.1. *Se $\mathcal{N} \subset \mathbb{Z}_0^+$ tem densidade positiva, dados $\epsilon > 0$ e um conjunto $\mathcal{Q}$ de k inteiros, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, o conjunto $\mathcal{N}$ contém uma (n, ϵ)-escala de $\mathcal{Q}$.*

Consideremos, por exemplo, um natural d e o conjunto de múltiplos naturais de d, $\mathcal{N} = \{d, 2d, 3d, \cdots\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o número de múltiplos de d entre 1 e n é exactamente $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor$, onde $\lfloor z \rfloor$ designa o maior inteiro menor ou igual a z. E, portanto, $\Delta(\mathcal{N}) = \frac{1}{d}$. Sejam $k > 1$ e $\mathcal{Q} = \{q_1 = 0, q_2 = 1, q_3 = 2, q_4 = 3, q_5 = 5, \cdots, q_k = f_k\}$, onde $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sucessão de Fibonacci. Neste caso, para cada $i \in \{2, ..., k\}$, o racional $\frac{q_i - q_1}{q_k - q_1}$ é $\frac{f_i}{f_k}$. Pelo Teorema 1.1, para n suficientemente grande, existe um subconjunto $\{r_1, r_2, ..., r_k\}$ de múltiplos de d tais que, para cada $i \in \{2, \cdots, k\}$, a fracção $\frac{r_i}{n}$ está ϵ-perto de $\frac{f_i}{f_k}$. Em particular, a menos de um erro inferior a 2ϵ, tem-se

$$\frac{r_{i+1} - r_i}{n} \sim \frac{f_{i-1}}{f_k}.$$

E, se k é suficientemente grande para que a diferença $|\frac{f_{k-1}}{f_k} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}|$ seja menor que ϵ, então

$$\left| \frac{r_{k-1}}{n} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right| < 2\epsilon.$$

Dado um conjunto $\{\frac{c_1}{d_1}, \frac{c_2}{d_2}, \cdots, \frac{c_k}{d_k}\}$ com k fracções irredutíveis de $]0, 1[$, podemos, usando o menor múltiplo comum dos denominadores, digamos D, reescrever os seus elementos como

$$\left\{ \frac{b_1}{D}, \frac{b_2}{D}, \cdots, \frac{b_k}{D} \right\},$$

sendo naturalmente $b_j < D$ para todo o j. De seguida, escolhendo $q_1 = 0$, podemos dar-lhes a forma

$$\frac{b_1}{D} = \frac{q_2 - q_1}{q_{k+2} - q_1}, \cdots, \frac{b_k}{D} = \frac{q_{k+1} - q_1}{q_{k+2} - q_1}$$

onde

$$q_2 = b_1, \quad q_3 = b_2, \cdots, q_{k+1} = b_k, \quad q_{k+2} = D.$$

Estamos assim em condições de aplicar o Teorema 1.1, deduzindo que:

Corolário 1.2. *Se* $\mathscr{N} \subset \mathbb{Z}_0^+$ *tem densidade positiva, dados* $\epsilon > 0$ *e um conjunto* $\{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$ *de* k *racionais de* $[0,1]$*, com* $s_1 < s_2 < \cdots < s_k$*, existe um subconjunto* $\{r_1, r_2, ..., r_k\}$ *de* $\mathscr{N}$ *com* k *elementos tais que, para* n *suficientemente grande e todo o* $i \in \{1, 2, ..., k\}$*, se tem*

$$\left| \frac{r_i}{n} - s_i \right| < \epsilon.$$

2 Densidade positiva

Sejam $X = \{0,1\}^{\mathbb{Z}_0^+}$ o espaço das sucessões formadas com o alfabeto $\{0,1\}$ e $\sigma \colon X \to X$ a aplicação *deslocamento à esquerda*:

$$\sigma(x_0\, x_1\, x_2 ...) = x_1\, x_2\, x_3 ...$$

No que se segue, denotemos por $\overline{a_1\, a_2\, \cdots\, a_\ell}$ o elemento de X em que o bloco de ℓ dígitos a_1, ..., a_ℓ se repete indefinidamente.

Definição 2.1. *Dado* $\mathscr{N} \subset \mathbb{Z}_0^+$, a sucessão que observa $\mathscr{N}$ *é definida por*

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_m &= 1 \qquad \textit{se } m \in \mathscr{N} \\ \mathcal{O}_m &= 0 \qquad \textit{caso contrário.} \end{aligned}$$

Por exemplo, se

- $\mathscr{N} = \{n \in \mathbb{Z}_0^+ : n \text{ é par}\}$, então $(\mathcal{O}_m)_{m \in \mathbb{Z}_0^+} = \overline{10}$;
- $\mathscr{N} = \{n \in \mathbb{Z}_0^+ : n \equiv 1 \bmod 3\}$, então $(\mathcal{O}_m)_{m \in \mathbb{Z}_0^+} = 0\overline{100}$;
- $\mathscr{N} = \emptyset$, então $(\mathcal{O}_m)_{m \in \mathbb{Z}_0^+} = \overline{0}$;
- $\mathscr{N} = \mathbb{Z}_0^+$, então $(\mathcal{O}_m)_{m \in \mathbb{Z}_0^+} = \overline{1}$.

A sucessão $(\mathcal{O}_m)_{m \in \mathbb{Z}_0^+}$ detecta se um inteiro não-negativo pertence a $\mathscr{N}$. Por isso, e como $(\mathcal{O}_m)_{m \in \mathbb{Z}_0^+} \in X$, a densidade de $\mathscr{N}$ pode ser estimada à custa dos retornos, através da iteração de σ, da sucessão $(\mathcal{O}_m)_{m \in \mathbb{Z}_0^+}$ ao subconjunto de X dado por

$$\Gamma = \{(y_m)_{m \in \mathbb{Z}_0^+} \in X \colon y_0 = 1\}.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}\Delta(\mathscr{N}) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\,\#\{0 \le i < n \colon i \in \mathscr{N}\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_\Gamma\left(\sigma^i((\mathcal{O}_m)_{m\in\mathbb{Z}_0^+})\right)\end{aligned}$$

onde $\chi_\Gamma \colon X \to \{0,1\}$ é a função característica de Γ, valendo 1 em Γ e 0 no seu complementar, e

$$\sigma^i = \begin{cases} \text{Identidade de } X & \text{se } i = 0 \\ \text{a composta } i \text{ vezes de } \sigma \text{ consigo mesma} & \text{se } i \ge 1. \end{cases}$$

Fixemos a precisão $\epsilon > 0$ requerida no enunciado do Teorema 1.1 e consideremos $\overline{\epsilon} = \min\{\epsilon, 1\}$ se $k = 1$, e $\overline{\epsilon} < \min\left\{\epsilon, \frac{1}{2(q_k - q_1)}\right\}$ se $k > 1$. Observe-se que, desta forma, $\overline{\epsilon} < 2$. Como $\mathscr{N}$ tem densidade positiva, tomemos $\delta \in \,]0, \Delta(\mathscr{N})[$, e seleccionemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \ge n_0$, se tenha

$$\left|\Delta(\mathscr{N}) - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi_\Gamma\left(\sigma^i((\mathcal{O}_m)_{m\in\mathbb{Z}_0^+})\right)\right| < \delta. \tag{1}$$

Note-se que esta escolha assegura que, para $n \ge n_0$,

$$0 < \Delta(\mathscr{N}) - \delta < \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi_\Gamma\left(\sigma^i((\mathcal{O}_m)_{m\in\mathbb{Z}_0^+})\right) \le 1. \tag{2}$$

Seleccionemos de seguida um natural N_0 satisfazendo a desigualdade

$$N_0 > \max\left\{\frac{2\,n_0}{\overline{\epsilon}\,(\Delta(\mathscr{N}) - \delta)}, \frac{3}{\overline{\epsilon}}\right\}. \tag{3}$$

Deste modo, $N_0 > n_0$ pois $\Delta(\mathscr{N}) - \delta < 1$ e $\overline{\epsilon} < 2$. Com estes dados, a Proposição seguinte especifica que têm de ocorrer certo tipo de visitas de $(\mathcal{O}_m)_{m\in\mathbb{Z}_0^+}$ ao conjunto Γ.

Proposição 2.1. *Para todo $n \ge N_0$ e todo o $t \in [0,1]$, existe $r \in \{0, 1, ..., n\}$ tal que*

(i) $\sigma^r\left((\mathcal{O}_m)_{m\in\mathbb{Z}_0^+}\right) \in \Gamma$.

(ii) $|\frac{r}{n} - t| < \overline{\epsilon}$.

Demonstração. Suponhamos que, pelo contrário, existem $n \geq N_0$ e $t \in [0,1]$ tais que $\sigma^r \left((\mathcal{O}_m)_{m \in \mathbb{Z}_0^+} \right) \notin \Gamma$ para todo $r \in \mathbb{Z}_0^+ \cap]n(t-\bar{\epsilon}), n(t+\bar{\epsilon})[\cap [0,n]$. Seja $[s_1, s_2]$ o intervalo fechado maximal de extremos inteiros contido em

$$]n(t-\bar{\epsilon}), n(t+\bar{\epsilon})[\cap [0,n].$$

Então

Lema 2.2. *Nas condições anteriores, tem-se* $s_2 - s_1 > \frac{n\bar{\epsilon}}{2}$.

Demonstração. Separemos o argumento pela posição relativa de $n(t-\bar{\epsilon})$, $n(t+\bar{\epsilon})$, 0 e n.

<u>Caso 1.</u> $n(t-\bar{\epsilon}) \geq 0$ e $n(t+\bar{\epsilon}) \leq n$.

$$\begin{aligned} s_2 - s_1 &\geq \lfloor n(t+\bar{\epsilon}) \rfloor - (\lfloor n(t-\bar{\epsilon}) \rfloor + 1) \\ &> n(t+\bar{\epsilon}) - 1 - n(t-\bar{\epsilon}) - 1 \\ &= 2n\bar{\epsilon} - 2 \\ &> \frac{n\bar{\epsilon}}{2} \end{aligned}$$

uma vez que $n \geq N_0$ e, por (3), $N_0\,\bar{\epsilon} > \frac{4}{3}$.

<u>Caso 2.</u> $n(t-\bar{\epsilon}) \geq 0$ e $n(t+\bar{\epsilon}) > n$.

$$\begin{aligned} s_2 - s_1 &\geq n - (\lfloor n(t-\bar{\epsilon}) \rfloor + 1) \\ &\geq n - n(t-\bar{\epsilon}) - 1 \\ &= n\bar{\epsilon} - 1 + (n - nt) \\ &\geq n\bar{\epsilon} - 1 \quad (\text{porque } t \leq 1) \\ &> \frac{n\bar{\epsilon}}{2} \end{aligned}$$

já que $n \geq N_0$ e $N_0\,\bar{\epsilon} > 2$.

<u>Caso 3.</u> $n(t-\bar{\epsilon}) < 0$ e $n(t+\bar{\epsilon}) \leq n$.

$$\begin{aligned} s_2 - s_1 &\geq \lfloor n(t+\bar{\epsilon}) \rfloor \\ &> n(t+\bar{\epsilon}) - 1 \\ &= (n\bar{\epsilon} - 1) + nt \\ &\geq n\bar{\epsilon} - 1 \quad (\text{porque } t \geq 0) \\ &> \frac{n\bar{\epsilon}}{2}. \end{aligned}$$

Caso 4. $n(t-\bar{\epsilon}) < 0$ e $n(t+\bar{\epsilon}) > n$.

$$s_2 - s_1 = n > \frac{n\bar{\epsilon}}{2}$$

pois $\bar{\epsilon} < 2$. $\square$

Retomemos a demonstração da Proposição 2.1. Se $s_1 \geq n_0$, então, como $s_1 \leq n$ e $\sigma^r\left((\mathcal{O}_m)_{m\in\mathbb{Z}_0^+}\right) \notin \Gamma$ para todo o $r \in \{0,1,...,n\}$, deduzimos com (1) que

$$0 < \Delta(\mathscr{N}) - \delta \; < \; \frac{1}{s_1}\sum_{i=0}^{s_1-1} \chi_\Gamma\left(\sigma^i((\mathcal{O}_m)_{m\in\mathbb{Z}_0^+})\right) = 0$$

o que é uma contradição. Por outro lado, se $s_1 < n_0$, então, como $s_1 \geq 0$ e $n \geq N_0$, temos pelo Lema 2.2 e pela desigualdade (3)

$$s_2 \geq s_2 - s_1 \; > \; \frac{n\bar{\epsilon}}{2} \; > \; \frac{n_0}{\Delta(\mathscr{N}) - \delta} > n_0, \tag{4}$$

uma vez que, por (2), se tem $\Delta(\mathscr{N}) - \delta < 1$. Assim, como $s_2 \leq n$ e $\sigma^r\left((\mathcal{O}_m)_{m\in\mathbb{Z}_0^+}\right) \notin \Gamma$ para todo o $r \in \{0,1,...,n\}$, tendo em conta (1) concluímos que

$$0 < \Delta(\mathscr{N}) - \delta \; < \; \frac{1}{s_2}\sum_{i=0}^{s_2-1} \chi_\Gamma\left(\sigma^i((\mathcal{O}_m)_{m\in\mathbb{Z}_0^+})\right) = 0$$

e novamente chegamos a uma contradição. $\square$

3 Demonstração do Teorema 1.1

Dados $k \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{Q} := \{q_1,...,q_k\} \subset \mathbb{Z}_0^+$ tais que $q_1 < q_2 < ... < q_k$, fixemos N_0 como na secção anterior e $n \geq N = \max\{k, N_0\}$. Se aplicarmos k vezes a Proposição 2.1, usando $t_1 = 0$, e, se $k > 1$,

$$t_2 = \frac{q_2 - q_1}{q_k - q_1}, \; ... \; , t_{k-1} = \frac{q_{k-1} - q_1}{q_k - q_1}, \; t_k = 1,$$

obtemos, para a sucessão $(\mathcal{O}_m)_{m\in\mathbb{Z}_0^+}$, um conjunto finito $\{r_1,...,r_k\} \subset \{0,1,...,n\}$ tal que

(I) $\sigma^{r_i}\left((\mathcal{O}_m)_{m\in\mathbb{Z}_0^+}\right) \in \Gamma$

(II) $|\frac{r_i}{n} - t_i| < \bar{\epsilon}$.

Ora, (I) indica que, para todo o $i = 1, ..., k$, se tem $\mathcal{O}_{r_i} = 1$, o que equivale a dizer que $r_i \in \mathcal{N}$. Além disso, se $k > 1$ e $i \neq j$, então $r_i \neq r_j$. Efectivamente, por (II), para cada $i \in \{1, ..., k-1\}$, temos

$$n\frac{q_i - q_1}{q_k - q_1} - n\bar{\epsilon} < r_i < n\frac{q_i - q_1}{q_k - q_1} + n\bar{\epsilon}$$

$$n\frac{q_{i+1} - q_1}{q_k - q_1} - n\bar{\epsilon} < r_{i+1} < n\frac{q_{i+1} - q_1}{q_k - q_1} + n\bar{\epsilon}$$

e estes intervalos são disjuntos, uma vez que, para todo $i \in \{1, ..., k-1\}$,

$$n\frac{q_{i+1} - q_1}{q_k - q_1} - n\bar{\epsilon} > n\frac{q_i - q_1}{q_k - q_1} + n\bar{\epsilon}$$

desigualdade que é consequência da escolha $\bar{\epsilon} \leq \frac{1}{2(q_k - q_1)}$ já que ela implica que

$$2n\bar{\epsilon} < n\left(\frac{1}{q_k - q_1}\right) \leq n\left(\frac{q_{i+1} - q_i}{q_k - q_1}\right) = n\left(\frac{q_{i+1} - q_1}{q_k - q_1} - \frac{q_i - q_1}{q_k - q_1}\right). \square$$

Trabalho parcialmente financiado pela FCT - *Fundação para a Ciência e a Tecnologia*, através do Centro de Matemática da Universidade do Porto e do projecto PEst-OE/MAT/UI0212/2011.

Referências

[1] B. Green e T. Tao, *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*, Ann. of Math. **167(2)** (2008) pp. 481–547.

[2] H. Furstenberg, *Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions.* J. Anal. Math. **31** (1977) pp. 204–256.

[3] E. Szemerédi, *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression*, Acta Arith. **27** (1975) pp. 199–245.

[4] `http://www.math.ucla.edu/~tao/preprints/acnt.html`