A REPRESENTAÇÃO DE RELAÇÕES E A GENERALIZAÇÃO NA EXPLORAÇÃO DE TAREFAS DE UM PONTO DE VISTA ALGÉBRICO: UM ESTUDO COM FUTUROS PROFESSORES E EDUCADORES[1]

Neusa Branco
Escola Superior de Educação de Santarém
neusa.branco@ese.ipsantarem.pt

Resumo

A formação inicial de futuros professores dos primeiros anos do ensino básico e de educadores de infância procura proporcionar um conhecimento matemático sólido, que constitua um suporte para o modo como desenvolvem, mais tarde, a sua atividade profissional.

A Álgebra tem uma maior visibilidade nas atuais orientações curriculares para o ensino básico. Salienta-se a importância do trabalho a desenvolver com os alunos desde os primeiros anos com ênfase no pensamento algébrico. Deste modo, o reconhecimento de relações e a sua generalização assumem-se como aspetos fundamentais que o professor/educador deve promover nos seus alunos. Trata-se de um desafio constante na sua prática letiva, em que os conhecimentos matemático e didático do professor/educador são fundamentais para gerir eficazmente o trabalho dos alunos na sala de aula, fazendo emergir o seu pensamento algébrico.

Este artigo foca o trabalho realizado por futuros professores e educadores, na sua formação inicial, durante uma sessão de trabalho direcionada para a exploração de tarefas de cunho algébrico. São realizadas 3 tarefas em pequenos grupos, sendo que este artigo incide apenas sobre o trabalho desenvolvido em torno da primeira tarefa, que visa a validação de uma conjetura. Durante a realização da tarefa, são gravadas em áudio as interações entre os elementos de 2 grupos, que são posteriormente transcritas, e são recolhidas as produções escritas de todos os grupos.

[1] Este estudo contou com a colaboração na elaboração e dinamização das sessões de Ana Matos, a quem agradeço a disponibilidade.

Estes dados permitem analisar o trabalho dos formandos durante o processo de validação de uma conjetura, atendendo às relações que estabelecem, à sua generalização e ao modo como as representam.

Palavras-chave: Formação inicial de professores; Álgebra; Generalização; Conjeturas.

Abstract

The education programs of prospective teachers of the first year of primary school and kindergarten teachers, aims to offer a solid mathematical knowledge, which constitutes a support for the way they develop later their professional activity.

Algebra has a higher profile in the current curriculum guidelines for primary school. It emphasizes the importance of working to develop with students since the early years with emphasis on algebraic thinking. Thus, the recognition of relationships and its generalization are assumed as fundamental aspects that the teacher should promote in their students. It is a constant challenge in their teaching practice in which the teacher mathematical and didactic knowledge are critical to effectively manage the work of students in the classroom, giving rise to their algebraic thinking.

This article focuses on the work of prospective elementary teachers and kindergarten teachers in their education program during a workshop aimed to explore the algebraic tasks. Three tasks are performed in small groups, and this article focuses only on the work done on the first task, which aims to validate a conjecture. During the resolution of the task, are audio-recorded the interactions between the elements of two groups, which are later transcribed, and written productions are collected from all groups. These data allow us to analyze the work of the prospective teachers during the validation process of a conjecture, meeting the relationships established, its generalization and the way how they represent it.

Keywords: Prospective teacher education programs; Algebra; Generalization; Conjecture.

Introdução

A formação inicial de futuros professores dos primeiros anos do ensino básico e de educadores de infância tem uma componente científica em Matemática bastante significativa. Esta formação deve proporcionar um conhecimento matemático sólido, que constitua um suporte para o modo como desenvolvem, mais tarde, a sua atividade profissional.

A Álgebra tem uma maior visibilidade nas atuais orientações curriculares para o ensino básico (ME, 2007). Logo nos primeiros anos salienta-se a importância do trabalho a desenvolver com os alunos nos diversos temas matemáticos com a ênfase no desenvolvimento do pensamento algébrico. O reconhecimento de relações e a sua generalização assumem-se como aspetos fundamentais que o professor/educador deve promover nos seus alunos. Para promover este trabalho, além do conhecimento matemático sólido, os professores têm de ter também um conhecimento aprofundado da sua didática e do currículo, conseguindo evidenciar as conexões entre os temas matemáticos. Fazer emergir o pensamento algébrico na sala de aula, trata-se de um desafio constante na sua prática letiva. O conhecimento matemático e didático do professor/educador é fundamental para selecionar as tarefas, para preparar e gerir eficazmente o trabalho dos alunos na sala de aula (Albuquerque et al., 2006) para proporcionar uma dinâmica de sala de aula que vise a partilha de estratégias e a procura de generalização de relações.

Este artigo foca o trabalho realizado por futuros professores e educadores, na sua formação inicial, durante uma sessão de trabalho direcionada para a exploração de tarefas de cunho algébrico. São aqui apresentados os dados relativos a uma tarefa que apresenta uma conjetura formulada por alunos que deve ser analisada pelos futuros professores e educadores. Estes dados permitem, assim, analisar o trabalho dos formandos durante o processo de validação de uma conjetura, atendendo às relações que estabelecem, à sua generalização e ao modo como as representam.

O Pensamento Algébrico e a Formação Inicial de Professores

As recentes orientações curriculares e investigações nacionais (Alvarenga & Vale, 2007; Santos & Oliveira, 2008) e internacionais (Blanton & Kaput, 2005; Carraher & Schliemann, 2007; Kieran, 2004) identificam a importância de promover o pensamento algébrico desde os primeiros anos. Isto não significa que os tópicos de álgebra antes lecionados nos anos mais avançado surjam agora logo nos primeiros anos (Carraher & Schliemann, 2007). Contudo, o pensamento algébrico deve envolver mais que a fluência aritmética e de cálculo, deve envolver uma compreensão profunda da estrutura matemática subjacente (Cai & Knuth, 2011).

Os professores precisam então de compreender como podem promover o desenvolvimento o pensamento algébrico nos primeiros anos. Diversos autores têm apresentado diferentes situações e apontam aspetos gerais que devem ser abordados. Kaput (2008) considera fundamental no pensamento algébrico construir, expressar e justificar relações matemáticas, ou generalizações. Cai e Knuth (2011) indicam que o desenvolvimento do pensamento algébrico requer a análise de relações entre quantidades, estar atento a estruturas, estudar alterações, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, provar e prever. É, assim, essencial conjeturar, generalizar e justificar (Blanton & Kaput, 2011). A generalização assume um papel central no desenvolvimento do pensamento algébrico, aqui entendida como "uma afirmação que descreve uma verdade geral sobre um conjunto de dados (matemáticos)" (Blanton, 2008, p. 3). Sendo fundamental a generalização para o pensamento algébrico, também o é expressar simbolicamente essa generalização (Mason, Graham, & Johnston-Wilder, 2005; Kaput, 2008; Kaput & Blanton, 2005). A Álgebra fornece um sistema simbólico manipulável, uma linguagem para expressar e manipular a generalização (Mason et al., 2005). Contudo, nos primeiros anos, os alunos não usando a representação formal. Mason et al. (2005) apresentam, por exemplo, estes a seguinte situação: Escreve um número que é mais 1 que um múltiplo de 10. Facilmente o professor escolhe um múltiplo de 10 ao qual adiciona 1 de modo a obter um número. Mesmo não o expressando, o professor tem o sentido da generalização. Os alunos, por seu lado, precisam ter tempo para verificar que compreendem uma generalização, para expressar essa generalização, para consolidar e ampliar o seu poder natural para generalizar (Mason et al., 2005).

O expressar da generalização pode surgir de diferentes modos. Nos primeiros anos, os alunos podem expressar a generalização por palavras suas, com base no que observam e, gradualmente, atendendo à sua idade e ao seu conhecimento da linguagem matemática, aprender a expressar essa generalização simbolicamente (Blanton, 2008). Sobre o trabalho a realizar na sala de aula com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico, Blanton e Kaput (2011) dirigem o foco para o modo de pensar e não apenas para os materiais curriculares que são usados. O professor na sala de aula deve mobilizar os seus recursos didáticos para promover a formulação de conjeturas, a generalização e a justificação matemática de relações, atendendo às orientações curriculares (ME, 2007), com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico (Mason et al., 2005). A formulação de conjeturas muitas vezes é suportada pela análise de exemplos, contudo, os argumentos empíricos não permitem validar conclusões gerais (Boavida, Paiva, Cebola, Vale, & Pimentel, 2008). Os alunos devem estabelecer generalizações e expressá-las de modos cada vez mais formais, apoiando-se em propriedades matemáticas. A generalização é uma capacidade que os alunos trazem para a sala de aula, mas é fundamental que o professor estimule os alunos a usar e desenvolver essa capacidade de um modo eficaz e apropriado (Mason, 2008). A generalização é considerada como um caminho para o pensamento algébrico e uma caraterística do pensamento algébrico, podendo o foco ser "o processo de generalização que contribui para a produção da expressão da generalização, bem como o produto generalizado." (Kieran, 2011, pp. 582-583).

Na formação inicial, os futuros professores e educadores devem ter experiências de aprendizagem que visem diferentes aspetos do pensamento algébrico para que na sua futura prática letiva o possam promover nos seus alunos (Branco & Ponte, 2011; Magiera, van den Kieboom, & Moyer, 2011). Não tendo todos o mesmo percurso escolar em Matemática, à entrada no ensino superior têm diferentes experiências de aprendizagem em Álgebra e, consequentemente, diferentes conhecimentos e expetativas em relação ao trabalho neste tema matemático. As experiências na formação inicial devem, entre outras, promover uma compreensão aprofundada da Matemática que se vai ensinar (Albuquerque et al., 2006). Segundo estes autores, o conhecimento matemático para ensinar Matemática assume um caráter específico, na medida em que envolve não apenas o saber usar a Matemática mas, também, a compreensão dos significados e fundamentos do conhecimento que está a ser mobilizado. O professor/educador deve conhecer e saber usar procedimentos e a razão desses mesmos procedimentos. Esta compreensão da Matemática e, em particular, da Álgebra deve ser promovida na formação inicial a par, nomeadamente, do conhecimento da especificidade dos alunos a ensinar, de acordo com a sua escolaridade, e das orientações curriculares. Procura-se, assim, que os futuros professores e educadores detenham um conhecimento sobre a Álgebra e sobre o que pode envolver o seu ensino nos primeiros anos para que o possam mobilizar mais tarde na sua prática, criando situações de aprendizagem aos seus futuros alunos que visem o desenvolvimento do seu pensamento algébrico.

Strom e Lehrer (1999, referidos por Lehrer & Lesh, 2003) realizam um estudo com alunos dos 2.º e 3.º anos de escolaridade a quem são proporcionadas experiências matemáticas na sala de aula com a ênfase na formulação de conjeturas, na justificação e na generalização. Estes alunos mostram-se capazes de utilizar contraexemplos para refutar conjeturas e quase todos reconhecem as limitações de apenas ter em conta casos particulares. Estes autores identificam que a obtenção da prova se torna mais difícil sem discussão de ideias. Contudo, ainda assim, muitos alunos mostram-se capazes de construir provas válidas embora usando métodos mais limitados do que os experimentados na disciplina (Strom & Lehrer, 1999, referidos por Lehrer & Lesh, 2003). Para propor este tipo de situações na sala de aula e promover o desenvolvimento destas capacidades nos seus alunos, o professor tem de estar dotado de conhecimento matemático e também de conhecimento sobre o processo de ensino-aprendizagem que lhe permita conduzir estas situações na sala de aula (Albuquerque et al., 2005). Também aqui a formação inicial assume um papel importante devendo fomentar a formulação e validação de conjeturas e a sua justificação, recorrendo a diferentes estratégias e representações. Deste modo, na formação inicial devem promover-se situações de generalização, situações que propiciem a utilização de diferentes representações, bem como o reconhecimento da importância da simbologia. Situações que envolvem a formulação e justificação de generalizações e a utilização de equações em contextos matemáticos e de resolução de problemas permitem salientar a importância a simbologia e da manipulação algébricas (Albuquerque et al., 2005). Esta simbologia constitui, nomeadamente "um meio poderoso e eficaz de representar as propriedades das operações" (Albuquerque et al., 2005, p. 29), contribuindo também para a sua compreensão.

Mason e seus colaboradores (2005) apresentam um conjunto de situações que visam desafiar a compreensão do professor sobre o pensamento algébrico e sobre o trabalho em torno de tarefas algébricas. Salientam a importância da forma como estas são trabalhadas na sala de aula. Estes autores sugerem que se proporcionem quatro situações:

> *- Expressar generalizações: encontrar o uso de palavras e de símbolos para expressar números arbitrários e outros objetos com particular atenção para o uso de diagramas e para o rastreamento do número como contextos para promover a conscientização de generalidade;*
>
> *- Múltiplas expressões: encontrar múltiplas expressões para a mesma generalização e assim ser conduzido para a possibilidade de regras de manipulação de expressões independentemente da sua origem;*

- Liberdade e constrangimento: encontrar o uso de símbolos para representar o como-ainda-desconhecido ou o como-ainda-não especificado e traduzir condições para equações e inequações, levando à necessidade de técnicas de resolução de equações, etc.;
- Expressar a estrutura, levando à aritmética generalizada: expressar, de um modo geral, as regras da aritmética, terminando com as regras para manipulação de expressões algébricas também. (p. 311)

Estes quatro aspetos visam a promoção de uma dinâmica que fomente a formulação de conjeturas e o desenvolvimento do pensamento algébrico. Em várias situações a simbologia assume um papel importante, bem como o conhecimento da sua manipulação e de procedimentos algébricos (Albuquerque et al., 2005). Estas situações devem, assim, ser também propostas aos futuros professores e educadores visando a compreensão de procedimentos e de justificações e a importância do pensamento algébrico para a compreensão da Matemática (Canavarro, 2007). Na formação inicial deve ser reforçado que, nos primeiros anos, é possível trabalhar com os alunos numa perspetiva de generalização e de estabelecimento de relações, com ênfase na justificação. Por exemplo, os professores podem partir de situações numéricas e propô-las de modo a salientar as relações e não apenas pela procura de uma resposta numérica. Esta abordagem contribui para que os alunos explorem situações, no âmbito da Aritmética, que lhes permitem desenvolver o seu pensamento algébrico. O estabelecimento de generalizações promove uma compreensão da Matemática, nomeadamente, no âmbito do conhecimento dos números e das propriedades das operações (Carraher & Schliemann, 2007; Kaput, 2008).

A perspetiva de iniciar o desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos exige um aprofundamento, por parte dos professores, da compreensão da Álgebra, o que esta envolve e onde está presente e, também, da sua conexão com outros temas matemáticos.

Metodologia de Investigação

O estudo segue uma abordagem interpretativa num contexto de investigação sobre o processo de ensino-aprendizagem, focando questões de conteúdo, mais do que questões de procedimento (Erikson, 1985) e assume um *design* de estudo de caso. A investigação assume um caráter qualitativo, com uma forte componente descritiva em que os dados são apresentados tal como foram registados, permitindo conhecer de um modo detalhado todo o processo desenvolvido pelos participantes e o significado que lhe atribuem. O *desig*n de estudo de caso proporciona a oportunidade de observar detalhadamente um contexto, um indivíduo, um conjunto de documentos ou um acontecimento específico (Merriam, 1988). No âmbito do presente estudo, o estudo de caso permite conhecer de um modo aprofundado o trabalho desenvolvido por uma turma num contexto de formação inicial, contribuindo para uma melhor compreensão do contexto de formação de futuros professores e educadores de infância, no que respeita à sua capacidade de identificar relações e de as generalizar, procedendo deste modo à validação de conjeturas.

O estudo desenvolve-se com formandos que frequentam o Curso de Licenciatura em Educação Básica, durante o 3.º ano e após frequentarem uma unidade curricular no âmbito da Álgebra. O estudo tem por base o trabalho realizado pelos participantes durante uma sessão de trabalho direcionada para a exploração de tarefas de cunho algébrico. A preparação da sessão tem a colaboração de Ana Matos que, também, participa na sua dinamização. São propostas três tarefas que realizam em pequenos grupos. Os participantes são 37 formandos que organizam, voluntariamente, dez grupos:

Tabela 1 – Distribuição dos formandos por grupos

Grupo	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
N.º de alunos	5	3	3	3	4	5	5	3	3	3

Este artigo foca apenas o trabalho desenvolvido em torno da primeira tarefa que visa a validação de uma conjetura:

Tarefa 1

Conjeturas na sala de aula

Imagine que se encontra numa aula de Matemática e que um aluno partilha consigo o seguinte raciocínio:

Professora, eu e o Pedro descobrimos uma coisa!!… Eu peguei no número 5, fiz 5×3 *e deu 15. A seguir, adicionei 5, deu 20. O Pedro pegou também no número 5 mas juntou primeiro 5 e ficou com 10. A seguir multiplicou por 3 e deu 30. Ao Pedro deu 10 a mais que a mim….*

> *Depois fizemos o mesmo com o número 6 e também deu… Dá-lhe sempre 10 a mais que a mim!*
>
> Analise o raciocínio do aluno e averigue se ele tem razão. Será válida a sua generalização? Justifique, de forma adequada, a sua resposta.

Na sessão é privilegiada a discussão das tarefas em pequenos grupos, existindo, também, momentos de interação entre os formandos e as duas docentes do ensino superior que dinamizam a sessão. As interações decorrentes da realização da tarefa são gravadas em áudio em dois grupos (Grupos B e C) que são posteriormente transcritas. Os nomes referidos são fictícios preservando, deste modo, a identidade dos participantes. São recolhidas as produções escritas de todos os formandos presentes relativas ao trabalho desenvolvido. Estes dados permitem analisar o trabalho durante o processo de validação de uma conjetura, atendendo às relações que estabelecem, à sua generalização e ao modo como as representam. A organização dos dados permite identificar diferentes fases do trabalho dos formandos para validar a conjetura. A sua análise visa, assim identificar a interpretação que fazem da situação, como procedem ao teste da conjetura e como a validam.

Análise e Validação da Conjetura

Interpretação da situação

Os grupos começam por reproduzir as operações que o aluno indica, usando o número 5:

Figura 1 – Grupo A

Quando experimentam realizar este processo usando o número 6, como sugerem no final os alunos, diversos grupos procedem de um modo incorreto. Os formandos não identificam que o 6, que os alunos dizem experimentar no final, apenas respeita ao número inicial, mantendo-se a adição de 5 e a multiplicação por 3. Ao experimentar o número 6, adicionam também 6, como é o caso do grupo B:

Gabriela – *O primeiro, faz primeiro a multiplicação por 3 e depois soma.*
Sofia – *Sim.*
Gabriela – *E o segundo faz primeiro a soma, mais 5, e só depois é que multiplica por 3. Ou seja… E agora com o 6? Vamos lá ver como é com o 6… Primeiro faz 6 vezes 3 dezoito. E depois é 18 mais 6.*
Eva – *Então adiciona-se sempre pelo valor que… Que estás a fazer?*
Gabriela – *Sim. Depois 18 mais 6.*
Sofia – *Vamos ver se no 6 também dá.*
Gabriela – *18 mais 6 dá 24.*
Eva – *Então e o outro? O outro pega no 6…*
Gabriela – *O outro faz 6 mais 6 que dá 12. Depois é que faz 12 vezes 3 que dá 48.*
Sofia – *12 vezes 3 não dá 48.*
Gabriela – *Dá 36.*
Eva – *Então mas assim não…*
Gabriela – *Assim não dá mais 10.*

Indicam, de acordo com as operações que realizam com o número 6, que não se mantém a diferença de 10 entre os dois resultados. Os grupos solicitam a presença de uma docente para esclarecer a situação e revêm o enunciado, como sucede com o grupo B:

Gabriela – *Aqui diz que dá sempre 10 a mais do que a mim e não dá 10 a mais, dá 12 a mais.*
Docente – *Vejam se estão a fazer bem a interpretação. [Sofia e Eva discutem os resultados obtidos]*
Gabriela – *Então, tenho de somar 5 à mesma em vez de somar 6?*
Docente – *Exatamente. As operações são as mesmas o que muda é o valor inicial.*
Gabriela – *É que eu somei 6.*

Os diversos grupos refazem os seus cálculos e procuram então verificar se a conjetura é válida.

Teste da conjetura

A conjetura dada: “a diferença entre resultados é sempre 10”, pode ser testada através da utilização de diferentes números. Os diversos grupos alteram o valor inicial e verificam que obtêm essa diferença entre os resultados, como é o caso do grupo B:

> ***Sofia –*** *Então é 6 mais 5…*
>
> ***Gabriela*** *– 6 vezes 3, 18. 18 mais 5, 23.*
>
> ***Eva*** *– Ah, assim acho que já dá.*
>
> ***Gabriela –*** *6 e 5, 11. 11 vezes 3, 33.*
>
> ***Eva*** *– Exato.*
>
> ***Gabriela*** *– Então a diferença é… Será… Averigue se tem razão [relendo o enunciado]. Sim, tem razão.*

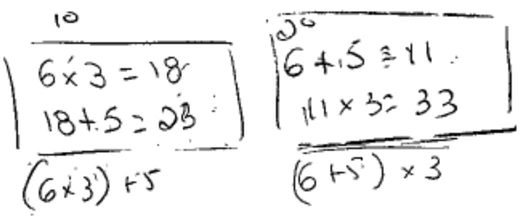

Figura 2 – Grupo B

O grupo A faz o teste da conjetura com diversos números naturais além dos indicados 5 e 6 (2, 3, 4, 7, 9, 10 e 12), verificando que a diferença de resultados é sempre 10:

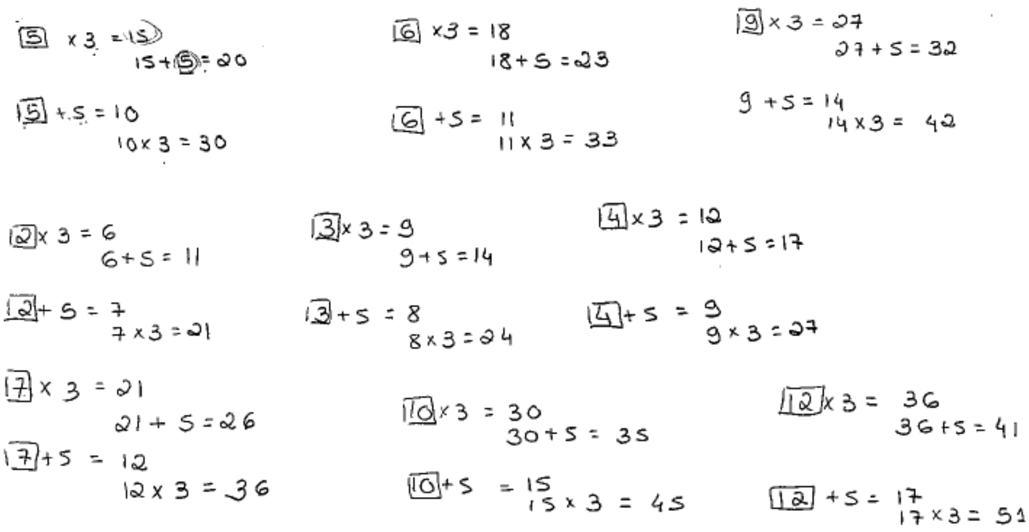

Figura 3 – Grupo A

Depois desta fase de verificação da conjetura recorrendo a alguns exemplos, os grupos, à exceção do grupo I, dão continuidade à exploração da situação procurando provar de um modo formal a sua validade. O grupo I valida a conjetura apenas recorrendo a casos específicos que não são suficientes para provar a validade da conjetura (Boavida et al., 2008), como discutem os elementos do grupo C:

Guida *– Nós só temos que justificar porque é que é mais 10.*

Patrícia *– Mas isso não pede aqui. Só pede para justificar se ela é válida ou não.*

Cátia *– Está bem. Mas tem de se dizer porquê.*

Guida – *Tem de se dizer porquê.*

Patrícia *– É válida. Então, é válida porque nós já verificámos com vários números e dá sempre mais 10.*

Guida *– Ah, pois. É por tentativa erro [com tom de riso]. Imagina que o 100 não dá. Ou o 98 ou o 96,5.*

Uso de propriedades para justificar a diferença num caso particular. Ao realizar o teste da conjetura, o grupo B recorre ao seu conhecimento da tabuada e das propriedades das operações para justificar a diferença de 10. Obtém, na primeira situação, como resultados 20 e 30, como surge no enunciado. Com base no seu conhecimento dos números indicam que 20 é igual a 5 vezes 4 e 30 é igual a 5 vezes 6 e com base na propriedade distributiva, justificam a diferença de 10, neste caso particular:

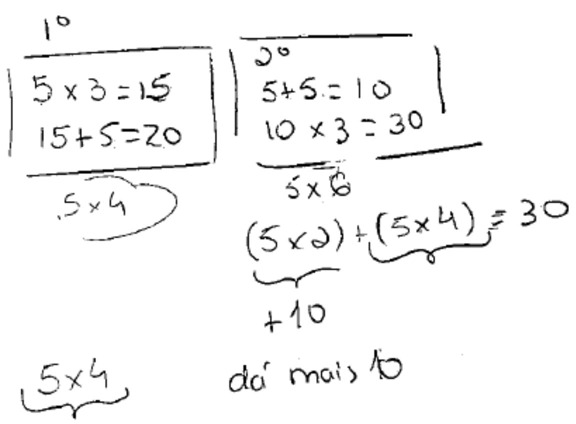

Figura 4 – Grupo B

O grupo verifica que nas duas situações têm em comum 5×4 e a segunda expressão tem a mais 5×2, ou seja, 10. Esta análise não se aplica a todas as situações. Contudo torna-se, nesta situação, eficaz para a justificação da obtenção do valor 10 para a diferença e para o surgimento da relação de dobro.

Justificação

Justificação algébrica. Apenas dois dos dez grupos não usam a linguagem algébrica para representar a conjetura e justificar a sua validade para todos os números. Como foi já referido, o grupo I valida a conjetura apenas com base no seu teste com diferentes números. O outro grupo, o grupo J, após também testar a conjetura com diferentes números, procura expressar em linguagem algébrica as duas situações expressas no enunciado. Contudo, não relaciona de modo eficaz as duas situações pelo que não consegue provar que a diferença é 10 para qualquer número usando a linguagem algébrica. O grupo B justifica que, com as condições dadas, a diferença entre os dois resultados é sempre 10 usando a linguagem algébrica:

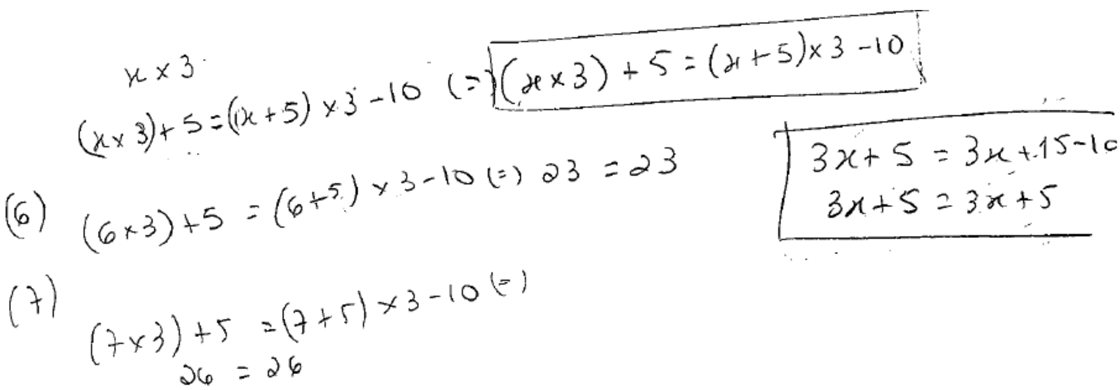

Figura 5 – Grupo B

O grupo utiliza a letra *x* com o significado de número generalizado, representando qualquer número e escreve expressões algébricas relativas a cada uma das situações. À expressão $(x+5)\times 3$, relativa às operações realizadas pelo Pedro descritas no enunciado, subtraem 10 e verificam que esta expressão é equivalente à expressão $(x \times 3) + 5$,que representa as operações do primeiro aluno:

***Eva** – O que é que estás a fazer?*

***Gabriela** – Estou a arranjar uma fórmula. Agora, se substitui na fórmula…*

***Eva** – O que é que fizeste aqui [apontando para a expressão que Gabriela* *escreveu* $(x \times 3) + 5 = (x + 5) \times 3 - 10$*]*

***Gabriela** – Aqui fiz… O que é que isto quer dizer… Quando fazes um número vezes 3 e depois somas 5… E quando fazes primeiro o x mais 5 vezes 3 tem que dar menos 10… Menos 10 para ser igual a este.*

***Sofia** – O 3 é que tem de ser menos 10 mas eu não estou a perceber a primeira coisa que ela fez.*

***Eva** – Ah, eu concordo.*

***Gabriela** – Porque é assim… Imagina. O que é que tu fazes aqui? Pegas num número e multiplicas por 3 e a seguir somas-lhe 5. E o que é que fazes aqui? Pegas num número, somas-lhe 5 e a seguir é que multiplicas por 3. E o que é que vai acontecer? Vai haver uma diferença de 10.*

Depois de escreverem a expressão verificam se é válida para $x = 6$ e $x = 7$. Por fim, retomam a expressão algébrica para provar a sua validade:

***Gabriela** – Agora não consigo é justificar.*

***Eva** – Mas já está justificado.*

***Gabriela** – Não está não. (…) Aqui tens de explicar o raciocínio do aluno e porque é que dá sempre mais 10. É difícil.*

***Sofia** – Pois, porque mesmo com a fórmula não consegues perceber porque é que é 10.*

***Gabriela** – Só se reduzirmos a fórmula.* $3x + 5$ *igual a* $3x + 15$ *menos 10.* $3x + 5$ *igual a* $3x + 5$*.*

Sofia verifica que, tal como apresentam inicialmente a expressão algébrica, não consegue identificar como surge o número 10. As formandas procuram então simplificar a expressão, aplicam a propriedades distributiva e simplificam os monómios semelhantes, obtendo uma proposição verdadeira. Provam, assim, que qualquer que seja o número utilizado, após a realização das operações indicadas, a diferença entre os resultados é 10.

O Grupo E interpreta a situação como se se tratasse de duas sequências numéricas relativas aos números obtidos por cada um dos alunos. Obtém, assim, os termos gerais dessas sequências e verifica que, para qualquer valor de *n*, essa diferença é constante e igual a 10:

De seguida, procurámos encontrar um termo geral que nos permitisse confirmar a generalização.

Aluno 1: $n \times 3 + 5 = 3n + 5$

Aluno 2: $(n+5) \times 3 = 3(n+5) = 3n + 15$

Diferença entre os dois termos gerais: $(3n+15) - (3n+5) =$
$15 - 5 = 10$

Figura 6 – Grupo E

Todos os grupos, à exceção dos grupos A e I, chegam às expressões algébricas para representar o valor obtido por cada um dos alunos. Apesar de recorrerem à linguagem algébrica, poucos grupos apresentam uma justificação para o facto de se obter uma diferença igual a 10.

Justificação aritmética com base nas propriedades dos números e das operações. Com base nas duas situações que são enunciadas e pela identificação da propriedade distributiva usada numa dessas situações, o grupo B conclui que o resultado obtido é sempre o dobro de 5:

R: A generalização é válida porque o 1º aluno faz primeiro a multiplicação por 3 e só depois é que soma 5. O 2º aluno soma primeiro 5 e só depois multiplica por 3, o que faz com que um "multiplique" 5×1 e o outro 5×3, dando uma diferença de $5 \times 2 = 10$.

Figura 7 – Grupo B

Também o grupo A relaciona o valor da diferença com o dobro de 5:

→ A diferença entre as operações é igual ao dobro do algarismo adicionado

Uma vez que na 1ª operação do "eu" se multiplica por 3, o resultado será três vezes maior, e como na 1ª operação do Pedro se soma uma vez o algarismo 5, a diferença entre as duas operações será o dobro.

Figura 8 – Grupo A

Ambos os grupos verificam que nas operações realizadas, o primeiro aluno obtém a operação 5×1, enquanto o segundo aluno faz 5×3. Deste modo, a diferença entre os dois resultados obtidos é de 5×2. Com esta resposta, onde descrevem o que faz cada aluno, validam a conjetura e justificam, com base nas propriedades das operações, o valor da diferença obtido, uma vez que essa diferença é independente do valor que tomam inicialmente. O grupo A vai um pouco mais longo e indica que a diferença é igual ao dobro do algarismo adicionado, conclusão que seguidamente se apresenta.

Extensão da conjetura

Mais alguns grupos verificam que a diferença, de 10 neste caso, se relaciona com o dobro do número que se adiciona, o 5 respetivamente. Além disso, o grupo A identifica que esta diferença depende do valor que se adiciona. Analisa uma nova situação em que adiciona um outro valor e verifica que, também, nesta situação a diferença é o dobro do valor que se adiciona, mantendo a multiplicação por 3:

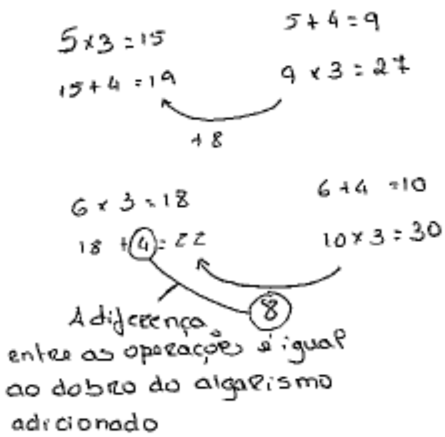

Figura 9 – Grupo A

O grupo A usa as propriedades das operações para justificar que a diferença é o dobro do número adicionado. Esta conclusão poderia ter apenas por base a relação óbvia entre os números 5 e 10 e os números 4 e 8 que surgem nos exemplos e daí inferir que a diferença entre os dois resultados será sempre o número do valor adicionado quando é realizada a multiplicação por 3. Contudo, não fica apenas pela constatação que se consegue após se obterem os resultados pois justifica a diferença com base nas propriedades das operações e nas expressões numéricas que tem antes da obtenção dos resultados. O grupo formula assim uma nova conjetura "a diferença é igual ao dobro do número que se adiciona".

Também o grupo C procura dar sentido à obtenção da diferença 10 e relacionam esse valor com os números e operações utilizados, neste caso, com a adição de 5. Formula a mesma conjetura que o grupo A, contudo usa a linguagem algébrica para a validar:

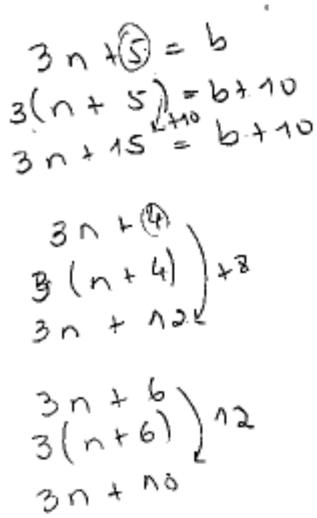

Figura 10 – Grupo C

O grupo C usa a linguagem algébrica para representar a nova situação e provar que mantendo a multiplicação por 3, a diferença é igual ao dobro do número que adiciona, tal como discutem entre si:

Patrícia *– É mais 10 e dá para trabalhar com o dobro. Eu não me estou a conseguir explicar mas eu já percebi.*

Guida *– Explica lá.*

Patrícia *– Sempre a multiplicar por 3. Aqui tens o 5 vai-te dar 15, vai dar mais 10. Se substituíres pelo 4, aqui vai dar sempre a diferença… Aquilo… Ah… Não sei explicar. Vai dar mais… é sempre o dobro. E aqui como é com o 5 vai dar mais 10.*

Cátia *– Neste caso não é o dobro [referindo-se ao 12 que se obtém no exemplo em que adiciona 4].*

Patrícia *– A diferença.*

Guida *– Ah. É o dobro, 8.*

Verifica-se alguma dificuldade inicial na identificação da relação de dobro. Nesta situação de formulação de nova conjetura torna-se fundamental o teste dessa conjetura de modo a verificar a sua validade em casos específicos. Nenhum grupo expressa algebricamente esta nova conjetura, considerando, também, de um modo geral o número que se adiciona.

Conclusão

Os diversos grupos revelam alguma dificuldade inicial na compreensão do que é indicado e a que se refere a conjetura. Quando experimentam realizar as operações com o número 6, como é indicado, erram ao adicionar também 6. Depois de ultrapassada esta situação com base na discussão entre elementos dos grupos, a maioria dos grupos testa a conjetura com diversos números. Com base na análise das operações e da utilização das suas propriedades, alguns grupos conseguem identificar porque é que a diferença é 10. Oito dos dez grupos utilizam a linguagem algébrica para provar que é essa a diferença que se obtém qualquer que seja o número inicial. Utilizam, assim, a linguagem algébrica para representar de um modo geral a relação que se estabelece, salientando a importância da sua compreensão e do conhecimento dos procedimentos algébricos (Albuquerque et al. 2006). Os futuros professores/educadores estabelecem a generalização e expressam-nas simbolicamente, manifestando assim aspetos centrais do pensamento algébrico (Kaput, 2008; Kaput & Blanton, 2005; Mason et al., 2005). Os formandos manipulam as expressões algébricas de modo a provar que a diferença entre os resultados é 10, revelando a importância do conhecimento algébrico para a compreensão da matemática (Canavarro, 2007), nomeadamente de situações que surgem no âmbito de temas matemáticos como Números e operações.

Alguns grupos formulam uma conjetura mais geral, indicando que a diferença é o dobro do número que se adiciona, quando se mantém a multiplicação por 3. Nesta situação recorrem novamente à realização de cálculos para casos específicos e alguns recorrem, também, à linguagem algébrica. A tarefa proposta fomenta assim, no contexto da formação inicial, oportunidades de formulação, teste e validação de conjeturas, contribuindo para o desenvolvimento do seu pensamento algébrico (Mason et al., 2005).

Os resultados revelam a importância de os futuros professores saberem justificar, utilizando a simbologia algébrica (Albuquerque et al., 2005), e assim terem segurança no seu conhecimento que lhes permite validar as justificações apresentadas pelos alunos dos primeiros anos. Salientam, também, a importância da utilização das propriedades das operações uma vez que permite dar significado às afirmações realizadas e identificar relações. A compreensão desta situação, recorrendo a diferentes conhecimentos, permite ao professor identificar o melhor modo de abordar a situação com os seus alunos e apoiar o estabelecimento de generalizações por parte dos alunos com base em conhecimentos que se ajustam aos primeiros anos de escolaridade. A análise deste tipo de situações na formação inicial proporciona, assim, momentos de discussão entre os formandos que promovem o conhecimento para ensinar matemática. Este tipo de situações salienta, ainda, a articulação entre o trabalho a realizar no âmbito dos números e operações e o desenvolvimento do pensamento algébrico, que os futuros professores devem procurar promover na sua prática letiva.

Referências Bibliográficas

Albuquerque, C., Veloso, E., Rocha, I., Santos, L., Serrazina, L., & Nápoles, S. (2006). *A Matemática na formação inicial de professores*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática (APM) e Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação (SPCE).

Alvarenga, D., & Vale, I. (2007). A exploração de problemas de padrão: Um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico, *Quadrante XVI*(1), 27-55.

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom*. Portsmouth, NA: Heinemann.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412-446.

Blanton, M., & Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization*. A global dialogue from multiple perspectives (pp. 5-23). Berlin: Springer.

Branco, N., & Ponte, J. P. (2011). Situações de modelação na formação inicial de professores. In *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática: Ensino a aprendizagem da Álgebra*. Póvoa do Varzim. [Suporte digital]

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). A experiência matemática no ensino básico. Lisboa: Ministério da Educação/Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular (ME/DGIDC).

Cai, J., & Knuth, E. (2011). Preface to part I. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 3-4). Berlin: Springer.

Canavarro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da matemática nos primeiros anos. *Quadrante, 16*(2), 81-118.

Carraher, D., & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the national council of teachers of mathematics* (vol. 2, pp. 669-705). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Erickson, F. (1985). *Qualitative methods in research on teaching*. Recuperado a Outubro 26, 2010, de http://www.eric.ed.gov/PDFS/ED263203.pdf.

Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J., & Blanton, M. (2005). Algebrafying elementary mathematics in a teacher-centered, systemic way. In T. Romberg, & T. Carpenter (Eds.) *Understanding mathematics and science matters* (pp. 99-125). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum. Recuperado a Julho 5, 2005, de http://www.simcalc.umassd.edu/downloads/AlgebrafyingMath.pdf.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it*? The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.

Kieran, C. (2011). Overall commentary on early algebraization: Perspectives for research and teaching. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 579-594). Berlin: Springer.

Lehrer, R., & Lesh, R. (2003). Mathematical learning. In W. Reynolds, & G. Miller (Eds.), *Handbook of psychology* (vol. 7, pp. 357-391). New York: John Wiley.

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 57-94). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Mason, J., Graham A., & Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. London: Sage.

Magiera, M., van den Kieboom, L., & Moyer, J. (2011). Relationships among features of pre-service teachers' algebraic thinking. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th conference of the international group for the psychology of mathematics education (PME-35)* (vol. 3, pp. 169-176): Ankara, Turkey: PME.

Merriam, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. San

Francisco, CA: Jossey-Bass.

ME (2007). Programa de matemática do ensino básico. Lisboa: DGIDC.

Santos, M., & Oliveira, H. (2008). Generalização de padrões: Um estudo no 5.º ano de escolaridade. In R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, & L. J. Blanco, (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 461-464). Badajoz: SEIEM, SPCE, APM.