

O RISCO E A RUÍNA NA ATIVIDADE SEGURADORA

Irene Brito

Centro de Matemática da Universidade do Minho
Braga, Portugal
e-mail: ireneb@math.uminho.pt

Patrícia Gonçalves

Instituto Superior Técnico
Lisboa, Portugal
e-mail: patricia.goncalves@math.tecnico.ulisboa.pt

Pedro Lima Ramos

Escola de Psicologia da Universidade do Minho
Braga, Portugal
e-mail: pedro.ramos@psi.uminho.pt

Resumo: Neste artigo é apresentado um modelo teórico para a evolução temporal do capital de uma seguradora, nomeadamente o modelo clássico de risco de Crámer-Lundberg e o Teorema Fundamental do Risco que dá uma expressão explícita para a probabilidade de uma seguradora arruinar como função do capital inicial. É também apresentado um programa em linguagem R que permite obter estimativas para a probabilidade de ruína. Com este programa são feitas simulações considerando o modelo clássico de risco com diferentes distribuições para as indemnizações individuais e é feito um estudo comparativo das respetivas probabilidades de ruína.

Abstract: This paper presents a theoretical model for the temporal evolution of the capital of an insurance company, namely, the classical Crámer-Lundberg risk model and also the fundamental risk theorem, which provides an explicit expression for the ruin probability of the insurance company as a function of the initial capital. We also present a program in the R code which allows to get estimates for the ruin probability. With this program we perform some computational simulations considering the classical risk model with different distributions for the individual claims and we also present a comparison study of the respective ruin probabilities.

palavras-chave: Modelo clássico de risco de Crámer-Lundberg; probabilidade de ruína; teorema fundamental do risco.

keywords: Classical Crámer-Lundberg risk model; ruin probability; fundamental risk theorem.

1 Introdução

O atuário, como especialista na aplicação de cálculos matemáticos e estatísticos a operações financeiras na área dos seguros, e o conceito de seguro remontam ao tempo dos romanos. Entre os romanos, o atuário era um escriba que redigia as atas do senado. No decorrer dos séculos o atuário passou pelas funções de organizador de modelos estatísticos, como tábuas de vida, de gestor e começou por se preocupar com o cálculo de prémios e a venda de seguros de vida.

No século XV, o sistema de seguros europeu faliu, graças a técnicas de gestão de risco intuitivas e pouco elaboradas. Daí em diante, alguns matemáticos começaram a debruçar-se neste assunto, o que gradualmente conduziu à origem do atuariado que conhecemos hoje em dia. Pelo facto de se lidar com conceitos e técnicas de cariz diverso, desde conceitos matemáticos e estatísticos a económicos e financeiros, frequentemente se recorre à designação mais geral de “Ciências Atuariais” para o ramo de conhecimento sobre a análise de riscos e expectativas financeiras, principalmente na administração de seguros e fundos de pensão.

Os seguros dividem-se em dois ramos: vida e não-vida. O primeiro trata das questões de longo prazo, como reformas, pensões e seguros. O segundo está relacionado com características de curto prazo, como os seguros de automóveis e de responsabilidade civil. Note-se que no seguro de ramo vida a indemnização apenas ocorre uma vez, enquanto que no seguro de ramo não-vida, a indemnização pode ocorrer várias vezes. Por este e outros motivos, a abordagem e modelação teórica destes tipos de seguros exige abordagens e técnicas diferentes.

Este trabalho explora alguns conceitos, técnicas e resultados no âmbito das ciências atuariais não-vida, e apresenta o modelo clássico de risco de Crámer-Lundberg para o cálculo da probabilidade de ruína de uma seguradora como função do seu capital inicial, podendo este último ser visto como um montante de investimento ou o montante da seguradora num instante conhecido.

Este artigo está dividido da seguinte forma: na secção 2 apresenta-se o modelo clássico de risco e introduz-se a notação necessária para a compreensão das secções seguintes, na secção 3 apresentam-se alguns teoremas clássicos e fundamentais sobre a probabilidade ruína e na secção 4 apresentam-se

os resultados obtidos para a probabilidade de ruína através da realização de simulações computacionais. As estimativas para a probabilidade de ruína são obtidas considerando o modelo clássico de risco em que as indemnizações individuais seguem algumas distribuições conhecidas. É feito um estudo comparativo destes valores e é analisada a influência dos parâmetros das distribuições no valor da probabilidade de ruína. A secção 5 consiste num anexo onde são apresentadas as demonstrações dos resultados enunciados na secção 3.

2 Modelo clássico de risco

Ao longo do tempo, uma seguradora vai, por um lado, arrecadando os montantes referentes a prémios previamente estabelecidos, e, por outro, disponibilizando, montantes relativos às indemnizações associadas a sinistros envolvendo os seus clientes. Por uma questão de simplicidade, considera-se que o valor da taxa de prémio é invariável no tempo, ainda que, na realidade, nem sempre tal se suceda. Desta forma, as quantias que a seguradora vai auferindo ao longo do tempo, pelos prémios recebidos, são valores determinísticos, em nada dependentes de fenómenos aleatórios. Pelo contrário, a soma concedida em indemnizações desde um instante considerado inicial até um determinado momento é o resultado de acontecimentos que não podem ser previstos com exatidão absoluta, ou seja, tem de ser calculada recorrendo à utilização de variáveis aleatórias, um instrumento capaz de lidar eficazmente com o risco e a incerteza de eventos futuros.

O denominado *modelo clássico de risco* ou *modelo de Crámer-Lundberg* pretende, precisamente, modelar a situação descrita acima. Para tal considera-se um momento como sendo o inicial e, para cada instante t subsequente, representa-se por $U(t)$ a quantia que, então, se encontra na posse da seguradora, ou seja, o capital da seguradora no instante t , para um determinado ramo de seguros. A verba no instante inicial, por seu turno, é simbolizada por u e é uma quantidade determinística, sendo neste caso uma constante positiva; enquanto que o somatório do montante de todas as indemnizações relativas a sinistros ocorridos até ao momento t é representado por $S(t)$ e é uma quantidade aleatória. O montante arrecadado em prémios por unidade de tempo é designado por taxa de prémio e é denotado por c , uma constante estritamente positiva, e assume-se que o valor arrecadado pela seguradora em prémios até ao instante t é dado por ct . Note-se que, para cada $t \geq 0$, $U(t)$ e $S(t)$ são variáveis aleatórias. Este modelo não

tem em conta qualquer tipo de dividendos providos da gestão administrativa.

Em suma, o modelo clássico de risco em tempo contínuo para a atividade seguradora é um processo estocástico indexado no tempo $\{U(t) : t \geq 0\}$, onde, para cada $t \geq 0$,

$$U(t) = u + ct - S(t). \quad (1)$$

Note-se que $U(t)$ tem uma parte determinística e linear, nomeadamente $u + ct$ e uma parte aleatória $S(t)$. Agora, ir-se-á precisar o conceito das indemnizações agregadas até ao instante t , ou seja, $S(t)$. Para se poder tratar o modelo matematicamente, é assumido que as variáveis aleatórias representativas das indemnizações individuais são independentes e identicamente distribuídas a uma variável aleatória X . Ora, $S(t)$ é o somatório de X tantas vezes quanto o número de indemnizações ocorridas até ao instante t . O número de indemnizações é, também, um valor aleatório, representado pela variável aleatória $N(t)$, pelo que $S(t)$ é uma soma aleatória de variáveis aleatórias, ou seja, uma *variável aleatória composta*. É também assumido que as variáveis aleatórias $\{X_i\}_{i \geq 1}$ são independentes de $N(t)$ para todo $t > 0$. Conclui-se, então, que para $t \geq 0$,

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad (2)$$

onde para $i \geq 1$, X_i representa o montante da i -ésima indemnização. Finalmente, considera-se que a sequência de variáveis aleatórias, ou processo estocástico, $\{N(t) : t \geq 0\}$, goza das seguintes propriedades importantes (ver [3], [4] e [8] para mais detalhes):

1. Para $t = 0$, $N(t) = 0$, ou seja, no instante inicial não há indemnizações.
2. O processo $\{N(t) : t \geq 0\}$ tem incrementos estacionários e independentes.
3. Para cada instante t , $N(t)$ segue uma distribuição de Poisson de parâmetro λt , ou seja, $\forall t > 0$

$$\mathbb{P}(N(t) = k) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Há uma descrição equivalente do processo acima em [4], que consiste em assumir que $\{N(t) : t \geq 0\}$ satisfaz as propriedades 1., 2. descritas acima e ainda a seguinte propriedade:

(*) Para $h \rightarrow 0^+$, $\mathbb{P}(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$ e $\mathbb{P}(N(h) \geq 2) = o(h)$, onde $o(h)$ significa que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$. Isto significa que em cada instante de tempo ocorre, no máximo, uma indemnização, e por essa razão, o tamanho dos saltos do processo $N(t)$ é 1 (ver a Figura 1).

Pelas propriedades descritas, $\{N(t) : t \geq 0\}$ é um *processo de Poisson homogéneo*. O processo diz-se homogéneo uma vez que o parâmetro λ não depende de t e diz-se de Poisson uma vez que para cada $t \geq 0$ a variável aleatória $N(t)$ tem distribuição de Poisson. Uma vez que $N(t)$ é um *processo de Poisson homogéneo*, neste caso, diz-se que $S(t)$ tem distribuição de Poisson composta ou que $\{S(t) : t \geq 0\}$ é um *processo de Poisson composto*. Obviamente que se poderia considerar outros tipos de processos estocásticos mais gerais do que o processo de Poisson homogéneo, como, por exemplo, o processo de Poisson não homogéneo, o processo de Poisson misto ou ainda considerar $\{N(t) : t \geq 0\}$ como um processo de Markov, veja-se [4].

De seguida, uma trajetória ou concretização de um processo de Poisson homogéneo $\{N(t) : t \geq 0\}$ é representada na Figura 1. Os processos $\{S(t) : t \geq 0\}$ e $\{U(t) : t \geq 0\}$ correspondentes encontram-se representados nas Figuras 2 e 3, respetivamente.

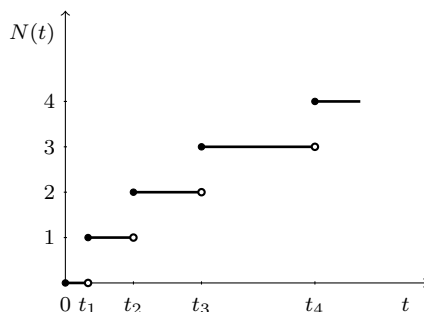


Figura 1: Processo de Poisson $N(t)$.

A título de exemplo, considere-se o instante t_2 . Até esse instante inclusivé a seguradora teve de suportar duas indemnizações, uma vez que $N(t_2) = 2$. Pelo que, por (2), $S(t_2) = \sum_{i=1}^2 X_i = X_1 + X_2$, como se pode constatar na Figura 2. Por último, por (1), $U(t_2) = u + ct_2 - S(t_2) = u + ct_2 - X_1 - X_2$.

Note-se que todos os processos $\{N(t) : t \geq 0\}$, $\{U(t) : t \geq 0\}$ e $\{S(t) : t \geq 0\}$ são processos de saltos, uma vez que as funções $N(t), U(t)$ e

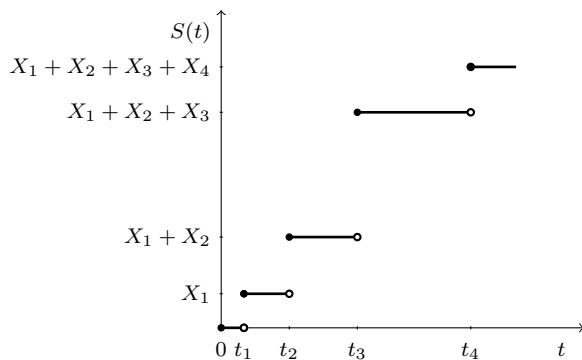


Figura 2: Indemnizações agregadas $S(t)$.

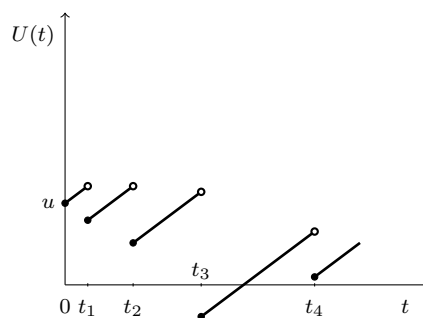


Figura 3: Modelo clássico de risco $U(t)$.

$S(t)$ são descontínuas, mais precisamente, contínuas à direita e com limite à esquerda. O tamanho do salto no processo $\{N(t) : t \geq 0\}$ é igual a 1, uma vez que em cada instante de tempo ocorre, no máximo, uma indemnização. Por outro lado, no instante de tempo em que ocorre uma indemnização a seguradora procede ao pagamento da respetiva indemnização e portanto cada salto de $S(t)$ tem tamanho igual ao valor desse montante.

No exemplo, t_3 é o chamado *instante de ruína*, ou seja, é o primeiro instante no qual o processo $\{U(t) : t \geq 0\}$ assume um valor negativo. De um modo geral, o tempo de ruína é representado por T e corresponde ao primeiro instante de tempo no qual a seguradora tem um capital negativo. Nesse instante, a seguradora está em dívida para com outrém. Todavia, não é forçoso que tal momento exista. A probabilidade de que exista, denomina-se *probabilidade de ruína*, depende naturalmente da quantia inicial u com

que a seguradora se inicia na sua exposição ao risco. A probabilidade de ruína em horizonte infinito representa-se por $\psi(u)$ e, desta forma, $\psi(u) = \mathbb{P}(T < \infty | U(0) = u)$, onde

$$T = \inf\{t > 0 : U(t) < 0\}.$$

No caso em que, $U(t) \geq 0$ para todo $t > 0$ convencionam-se que $T = +\infty$. Ao longo do trabalho, para facilitar a exposição, é usado $\psi(u) = \mathbb{P}(T < \infty)$, ficando desde já sub-entendido para o leitor a dependência de ψ em u .

Há uma restrição no valor do prémio c que é bastante intuitiva e fácil de demonstrar. Para fixar a notação chama-se μ ao valor médio das indemnizações individuais, ou seja, $\mu = \mathbb{E}[X]$. Lembre que as variáveis aleatórias $\{X_i\}_{i \geq 1}$ são independentes e identicamente distribuídas a uma variável aleatória X , que tem valor médio representado por μ ; obviamente $\mu > 0$. Lembre também que, como $N(t)$ tem distribuição de Poisson de parâmetro λt , então $\mathbb{E}[N(t)] = \lambda t$. É natural esperar que o valor médio do capital da seguradora no tempo t , nomeadamente $\mathbb{E}[U(t)]$, seja superior ao capital inicial u , ou seja, $\mathbb{E}[U(t)] > u$. Veja-se a que corresponde essa desigualdade e que informação advém dela. Primeiro terá que se calcular $\mathbb{E}[U(t)]$. Por (1) tem-se que $\mathbb{E}[U(t)] = u + ct - \mathbb{E}[S(t)]$. Lembre agora que $S(t)$ tem distribuição composta e para calcular o seu valor médio, é necessário recorrer à chamada *equação de Wald*, veja-se por exemplo [5], [9] ou [12]. A equação de Wald dita que o valor esperado de uma variável aleatória composta, como, por exemplo, a variável das indemnizações agregadas $S(t)$, satisfaz a seguinte igualdade $\mathbb{E}[S(t)] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[N(t)]$. Nas condições do modelo definido acima, tem-se que $\mathbb{E}[S(t)] = \mu\lambda t$. Voltando a $\mathbb{E}[U(t)] > u$, tem-se que $u + ct - \mu\lambda t > u$, o que impõe a condição $c > \mu\lambda$. Caso esta condição não seja satisfeita, pode provar-se que, o processo estocástico $\{U(t) : t \geq 0\}$ incorre em ruína quase certamente, veja-se por exemplo [8] e [12]. Daqui em diante exige-se que $c > \mu\lambda$. Neste sentido, aplica-se (veja-se [3]) um *coeficiente de segurança* $\theta > 0$ de tal forma que

$$c = (1 + \theta)\lambda\mu. \tag{4}$$

Pretende-se obter o máximo de informação sobre a probabilidade de ruína $\psi(u)$ tendo em conta a modelação descrita acima. Tal será feito na secção seguinte, mas para tal ainda é necessário apresentar os seguintes conceitos. A *função geradora de momentos* de $S(t)$, definida por $M_{S(t)}(r) = \mathbb{E}[e^{rS(t)}]$, pode ser calculada a partir da fórmula (para mais detalhes veja-se [10])

$$M_{S(t)}(r) = M_{N(t)}(\ln(M_X(r))),$$

onde $M_X(r)$ denota a função geradora de momentos de X , e assume-se que satisfaz a seguinte condição

$$\lim_{r \rightarrow \infty} M_X(r) = +\infty. \quad (5)$$

Considerando que $S(t)$ tem distribuição de Poisson composta, onde $\{N(t) : t \geq 0\}$ é um processo de Poisson com distribuição dada por (3), então obtém-se

$$M_{S(t)}(r) = e^{\lambda t(M_X(r)-1)}. \quad (6)$$

É necessário, agora, introduzir o conceito de *coeficiente de ajustamento*, ajustamento, no caso, entre os prêmios requeridos pela seguradora e as indemnizações que vai garantindo aos seus clientes. Este coeficiente define-se (veja-se [9]) como a única raiz positiva $r = R$ de

$$1 + (1 + \theta)\mu r = M_X(r), \quad (7)$$

que é equivalente à equação $M_{S(t)}(r) = e^{rct}$. Note-se que a unicidade do coeficiente de ajustamento assenta na hipótese (5).

3 Teorema Fundamental do Risco

Nesta secção enuncia-se o Teorema Fundamental do Risco (ver, por exemplo, [1], [4] ou [7]) e algumas consequências deste teorema. Apresenta-se também o cálculo do valor exato da probabilidade de ruína nos casos em que as indemnizações seguem uma distribuição exponencial e também no caso em que $u = 0$. As demonstrações dos resultados desta secção podem ser consultadas no anexo da secção 5.

Teorema 3.1 (*Teorema Fundamental do Risco*)

Para o processo (1), em que $S(t)$ é um processo de Poisson composto, com $c > \lambda\mu$, tem-se, para $u \geq 0$, que

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{\mathbb{E}[e^{-RU(T)} \mid T < \infty]}, \quad (8)$$

onde R representa o coeficiente de ajustamento.

Este teorema pode ser de aplicação complexa, uma vez que o cálculo de $\mathbb{E}[e^{-RU(T)} \mid T < \infty]$ nem sempre é possível, pelo menos de forma exata. Daí que frequentemente se determine somente um majorante para a probabilidade de ruína, a saber, $\psi(u) \leq e^{-Ru}$, a denominada *Desigualdade de*

Lundberg. Esta desigualdade pode facilmente ser obtida a partir do Teorema Fundamental do Risco, tendo em conta que o denominador excede o valor 1, porque, dado que a ruína acontece em tempo finito, isto é, $T < \infty$, o capital da seguradora no momento da ruína, $U(T)$, é necessariamente negativo.

Há algumas consequências do Teorema Fundamental do Risco que se podem obter facilmente:

1. Se $\theta \rightarrow 0$, então $R \rightarrow 0$, logo $\psi(u) \rightarrow 1$.

Para provar esta observação note-se que para $g(r) = f(r) - M_X(r)$, onde $f(r) = 1 + (1 + \theta)\mu r$, tem-se que $g(0) = 0$, $g'(0) = \theta\mu$ e $g''(r) = -M_X''(r) < 0$. Quando $\theta \rightarrow 0$, tem-se que $g'(0) = \theta\mu \rightarrow 0$. Daqui resulta que próximo de $r = 0$ a função g é constante e nula, e como para além disso é côncava, ela não possui nenhum outro zero para além de $r = 0$. Logo o ponto de interseção de $M_X(r)$ e $f(r)$ é único, ou seja, $R \rightarrow 0$; e pela Desigualdade de Lundberg, uma vez que $u \geq 0$, tem-se que $\psi(u) \rightarrow 1$.

2. Se $\theta \leq 0$, então $\psi(u) = 1$ (a ruína é quase certa).
3. Se b é uma cota superior para as indemnizações particulares, então $\psi(u) > e^{-R(u+b)}$. Para provar esta observação, note-se que como $F_X(b) = 1$, tem-se que $0 \leq X_i \leq b$, e assim $-\sum_{i \geq 1}^{N(T)} X_i = -X_1 - \dots - X_{N(T)} \geq -b$, ou seja, $-S(T) \geq -b$. Como $u > 0$ e $c > 0$, então conclui-se que $U(T) \geq -b$. Assim, $e^{-RU(T)} \leq e^{Rb}$ e portanto, de (8) obtém-se $\psi(u) > \frac{e^{-Ru}}{e^{Rb}}$, como pretendido.
4. Fixado $u > 0$, tem-se que $\lim_{R \rightarrow \infty} \psi(u) = 0$, ou seja, quanto maior for o coeficiente de ajustamento, menor será a probabilidade de ruína.
5. Fixado $R > 0$, tem-se que $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0$, ou seja, quanto maior for o capital inicial, menor será a probabilidade de ruína.

As observações 4. e 5. decorrem facilmente da Desigualdade de Lundberg.

O cálculo, de forma exata, da probabilidade de ruína pelo Teorema Fundamental do Risco é possível no caso em que as indemnizações individuais seguem uma distribuição exponencial e no caso em que $u = 0$.

De seguida vai ser apresentado o cálculo exato da probabilidade de ruína nestes dois casos, onde se vai aplicar o seguinte resultado (ver, por exemplo, [1], [4] ou [7]).

Teorema 3.2 *Para $u \geq 0$, tem-se que*

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c}(\psi(u) - \int_0^u \psi(u-x)dF_X(x) - (1 - F_X(u))). \quad (9)$$

Integrando a expressão (9) (ver, por exemplo, [2]), obtém-se para $u \geq 0$

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c} \int_u^{+\infty} (1 - F_X(x))dx + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \psi(u-x)(1 - F_X(x))dx. \quad (10)$$

As expressões para a probabilidade de ruína e para a sua derivada podem ser reescritas usando a *probabilidade de sobrevivência* $\delta(u) = 1 - \psi(u)$, da seguinte forma:

$$\delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \delta(u-x)(1 - F_X(x))dx, \quad (11)$$

$$\delta'(u) = \frac{\lambda}{c} \left[\delta(u) - \int_0^u \delta(u-x)dF_X(x) \right]. \quad (12)$$

Agora apresenta-se o valor exato da probabilidade de ruína no caso em que $u = 0$. Tome $u = 0$ em (10) e recorde que $\mu = \mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(x))dx$. Daqui resulta que $\psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c}$. Usando (4) obtém-se

$$\psi(0) = \frac{1}{1 + \theta}. \quad (13)$$

Como corolário do resultado anterior, pode obter-se uma expressão para a função geradora de momentos de $\psi(u)$, que será útil para obter a expressão exata de $\psi(u)$ no caso em que for possível identificar a função geradora de momentos obtida. Abaixo irá-se exemplificar este método no caso das indemnizações terem distribuição exponencial.

Corolário 3.1 *Para $u \geq 0$*

$$\int_0^{\infty} e^{ru}(-\psi'(u)) du = \frac{\theta}{1 + \theta} \frac{M_X(r) - 1}{1 + (1 + \theta)\mu r - M_X(r)},$$

onde θ é o coeficiente de segurança e $M_X(\cdot)$ denota a função geradora de momentos de X .

A prova deste resultado, geralmente, faz uso de um processo designado perda agregada máxima, cuja definição, por si só, é bastante complicada. Para tornar este artigo o mais simples possível, decidiu-se apresentar a prova do resultado anterior de forma diferente da habitual usando apenas o cálculo de integrais [2], veja-se o anexo na secção 5.

Para o cálculo da probabilidade de ruína no caso de X ter distribuição exponencial será usado o Teorema Fundamental do Risco e o corolário anterior.

Considere-se o processo $U(t) = u + ct - S(t)$, em que as indemnizações individuais seguem uma distribuição exponencial de parâmetro $\beta > 0$. No intuito de determinar $\psi(u)$ pelo Teorema Fundamental do Risco, vai-se calcular em primeiro lugar o coeficiente de ajustamento R usando (7). Ora, como X tem distribuição exponencial de parâmetro β , tem-se que $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\beta}$ e

$$M_X(r) = \mathbb{E} \left[e^{rX} \right] = \int_0^\infty e^{rx} \beta e^{-\beta x} dx = \frac{\beta}{\beta - r}, \quad \beta > r,$$

logo,

$$1 + (1 + \theta)\mu r = M_X(r) \iff 1 + \frac{(1 + \theta)}{\beta} r = \frac{\beta}{\beta - r},$$

donde se obtém

$$R = \frac{\beta\theta}{1 + \theta}.$$

Note-se que R está bem definido porque $\beta, \theta > 0$.

Uma vez calculado o coeficiente de ajustamento, há necessidade de caracterizar a variável aleatória $-U(T)$. Para tal, veja-se que $-U(T)$ também tem distribuição exponencial de parâmetro β . Para tal, seja T o instante em que ocorre a ruína; \hat{u} o capital imediatamente antes de acontecer a ruína, ou seja, imediatamente antes de T e seja $y > 0$ um certo montante. Note-se que os acontecimentos $-U(T) > y$ e $X > \hat{u} + y | X > \hat{u}$ são equivalentes. Ora, se $-U(T) > y$, então $U(T) < -y$. Logo a indemnização que deu origem à ruína tem que ser superior ao valor imediatamente antes da ruína, nomeadamente \hat{u} , mais y , ou seja, tem que ter ocorrido ruína, portanto (tem-se a condição) $X > \hat{u}$, e condicionando a esse facto tem que se ter $X > \hat{u} + y$ (veja-se a Figura 4 para uma melhor compreensão).

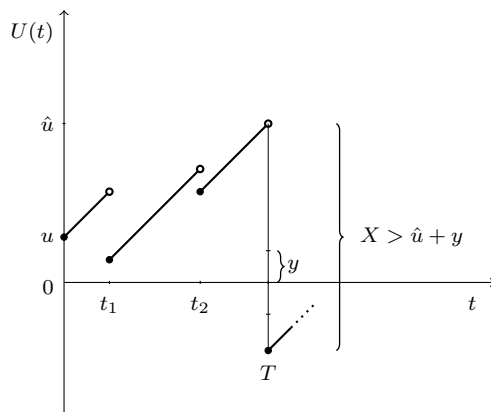


Figura 4: Processo $U(t)$ com $X > \hat{u} + y$.

Assim, para $y > 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(-U(T) > y | T < +\infty) &= \mathbb{P}(X > \hat{u} + y | X > \hat{u}) = \frac{\mathbb{P}(X > \hat{u} + y, X > \hat{u})}{\mathbb{P}(X > \hat{u})} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X > \hat{u} + y)}{\mathbb{P}(X > \hat{u})} = \frac{e^{-\beta(\hat{u}+y)}}{e^{-\beta\hat{u}}} = e^{-\beta y} = \mathbb{P}(X > y). \end{aligned}$$

Logo condicionando a $T < +\infty$, $-U(T)$ tem distribuição Exponencial de parâmetro β e portanto, a sua função geradora de momentos é dada por $\mathbb{E}[e^{-rU(T)} | T < +\infty] = \frac{\beta}{\beta-r}$, $r < \beta$.

O coeficiente de segurança θ , definido a partir da condição (4), é dado por $\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1$ e recorde que $R = \frac{\beta\theta}{1+\theta}$. Então, tem-se

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{\mathbb{E}[e^{-RU(T)} | T < +\infty]} = \frac{e^{(-\beta\theta u/(1+\theta))}}{\left(\frac{\beta}{\beta-R}\right)} = \frac{1}{1+\theta} e^{(-\beta\theta u/(1+\theta))}. \quad (14)$$

Agora, irá apresentar-se uma demonstração alternativa de (14) usando o corolário anterior.

Lembre que neste caso se tem $M_X(r) = \frac{\beta}{\beta-r}$, se $r < \beta$. Logo,

$$\int_0^\infty e^{ru} (-\psi'(u)) du = \frac{\theta}{1+\theta} \frac{\frac{\beta}{\beta-r} - 1}{1 + (1+\theta)\frac{r}{\beta} - \frac{\beta}{\beta-r}} = \frac{\gamma\delta}{\gamma-r},$$

onde $\gamma = \beta\theta/(1+\theta)$ e $\delta = 1/(1+\theta)$ e, então, como

$$\int_0^\infty e^{ru} \left(\frac{-\psi'(u)}{\delta}\right) du = \frac{\gamma}{\gamma-r},$$

resulta que a função geradora de momentos de $-\psi'(u)/\delta$ é igual a $\frac{\gamma}{\gamma-r}$. Ora, esta também é a função geradora de momentos de uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro γ . Logo, pela unicidade da função geradora de momentos, veja-se [5] ou [12], resulta que $\frac{-\psi'(u)}{\delta}$ tem que coincidir com a função densidade de probabilidade da exponencial de parâmetro γ , ou seja,

$$\frac{-\psi'(u)}{\delta} = \gamma e^{-\gamma u} \mathbf{1}_{\{u \geq 0\}}.$$

Integrando ambos os membros da igualdade anterior entre x e ∞ e usando o facto de que $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0$, obtém-se

$$\frac{\psi(u)}{\delta} = -e^{-\gamma u} \mathbf{1}_{\{u \geq 0\}},$$

donde resulta que $\psi(u) = \delta e^{-\gamma u} = \frac{1}{1+\theta} e^{(-\beta\theta u/(1+\theta))}$, que coincide com o valor obtido anteriormente, tendo em conta que $u \geq 0$.

4 Simulações Computacionais

Nesta secção apresenta-se um programa desenvolvido em linguagem R que permite obter aproximações para a probabilidade de ruína $\psi(u)$, uma vez que nem sempre é possível determinar $\psi(u)$ de forma explícita. Com este programa obtêm-se estimativas para a probabilidade de ruína considerando o modelo clássico de risco com diferentes distribuições para as indemnizações individuais e analisam-se os resultados obtidos. São ainda considerados dois casos particulares de distribuições com o intuito de estudar a influência dos parâmetros das distribuições no valor da probabilidade de ruína. Num dos casos faz-se variar o parâmetro para uma dada distribuição das indemnizações individuais, nomeadamente a distribuição de Pareto, e no outro caso fazem-se variar os parâmetros da distribuição para o número de indemnizações individuais, nomeadamente a distribuição de Poisson.

O programa seguinte, escrito na linguagem de programação R, destina-se a calcular uma estimativa para a probabilidade de ruína, neste caso para situações em que as indemnizações individuais seguem ou uma distribuição Gama ou uma distribuição exponencial (a distribuição exponencial é um caso particular da distribuição Gama) ou uma distribuição de Pareto. Note-se que a distribuição Gama tem dois parâmetros: $\alpha > 0$, representando a

forma, “shape”; $\beta > 0$, representando a taxa, “rate”. A função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}.$$

O valor esperado é igual a $\frac{\alpha}{\beta}$ e a variância é igual a $\frac{\alpha}{\beta^2}$. A distribuição de Pareto, por seu turno, tem dois parâmetros: $\alpha > 0$, “scale”, escala; $\beta > 0$, “shape”, forma. A sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \frac{\beta \alpha^\beta}{x^{\beta+1}},$$

$x \geq \alpha$. O valor esperado é igual a $\frac{\alpha \beta}{\beta-1}$, se $\beta > 1$, a variância é igual a $\frac{\beta \alpha^2}{(\beta-1)^2(\beta-2)}$, $\beta > 2$. Contudo, o programa em questão é facilmente adaptável a outras distribuições.

Este programa recebe como dados de entrada o parâmetro `claims_type`, que identifica a distribuição das indenizações individuais, o coeficiente `lambda` do processo de Poisson $N(t)$, a quantia inicial `u` com que a seguradora se expõe ao risco, os coeficientes `alpha` e `beta` da distribuição das indenizações individuais, o coeficiente de segurança `theta`, o número de indenizações `nclaims` que o programa permite que ocorram dentro de cada simulação e, por fim, o número de simulações `nsim` a executar. Sublinhe-se que, para todo $t > 0$, $N(t)$ segue uma distribuição de Poisson de parâmetro λt , cuja função de probabilidade é dada por (3). O programa devolve como dados de saída, a probabilidade de ruína e, de entre o número de indenizações que tiveram de se suceder para se dar a ruína nas diversas simulações, devolve o maior, a média deles e o respetivo desvio padrão.

• O código em R

```
Simulation<-function(claims_type,lambda, u, alpha, beta, theta, nclaims, nsim){
#Se claims_type=1, X-Gama(alpha,beta); se claims_type=2, X-Pareto(alpha,beta);
# theta- coeficiente de segurança;
#Se claims_type=2, então beta tem de ser superior a 1.

library(stats4)
library(splines)
library(VGAM)

if (claims_type==1){
```

```

        c=(1+theta)*lambda*(alpha/beta)
    }else{
        c=(1+theta)*lambda*beta*alpha/(beta-1)
    }

    Ruin_pos=rep(Inf, nsim)

    #Cada iteração do loop principal representa uma simulação;
    #Cada simulação compreende exatamente nclaims indemnizações.

    for(i in c(1:nsim)){
        T_entre_claims=rexp(nclaims, lambda)
        T_espera=c()
        T_espera[1]=T_entre_claims[1]
        for(j in c(2:nclaims)){
            T_espera[j]=T_espera[j-1]+T_entre_claims[j]
        }
        if (claims_type==1){
            Claims=rgamma(nclaims,alpha,beta)
        }else{
            Claims=rpareto(nclaims,alpha,beta)
        }
        S=c()
        S[1]=Claims[1]
        for(j in c(2:nclaims)){
            S[j]=S[j-1]+Claims[j]
        }
        U=c()
        for(j in c(1:nclaims)){
            U[j]=u+c*T_espera[j]-S[j]
        }
        aux1=which(U<0)
        if (length(aux1)!=0){
            Ruin_pos[i]=min(aux1)
        }
    }

    aux2=which(Ruin_pos<Inf)
    Sol=Ruin_pos[aux2]
    cat(length(Sol), mean(Sol), sd(Sol), max(Sol), (length(Sol)/nsim))
}

```

Com este programa, e outros análogos, podem executar-se múltiplos cálculos. Considere-se a seguinte situação hipotética. A unidade temporal considerada é de um dia. Em média, ocorre um sinistro por cada cinco dias decorridos, ou seja, $\lambda = 1/5$. Suponha que as indemnizações particulares têm distribuição Gama de parâmetros $(1, \frac{1}{900})$, que coincide com a distribuição Exponencial de parâmetro $\frac{1}{900}$. Suponha que o capital inicial seja $u = 600$. Considere o coeficiente de segurança $\theta = 0.3$. Desta escolha resulta por (4) que $c = 234$. Note-se que a condição $c > \lambda\mu$ neste caso é satisfeita pois $234 > 900/5 = 180$ e portanto a ruína não ocorre quase

certamente. Pretende-se determinar uma aproximação para a probabilidade de ruína do seguinte modelo:

$$U(t) = 600 + (1 + 0.3) \frac{900}{5} t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

onde X_i tem distribuição Gama de parâmetros $(1, \frac{1}{900})$ ($\mathbb{E}[X_i] = 900$) para todo $i \geq 1$ e $N(t)$ tem distribuição de Poisson de parâmetro $t/5$. Fazem-se 10000 simulações, sendo que em cada uma delas existem 200 indenizações, obtendo-se:

```
R> Simulation(1,0.2,600,1,1/900,0.3,200,10000)
```

```
6540    6.690826  13.07788  167    0.654
```

Estes resultados podem ser interpretados da seguinte forma. Em 6540 das 10000 simulações ocorreu a ruína, pelo que $\psi(600) \approx 0.654$. Nestas simulações, em média, a ruína surgiu (pela primeira vez) na 7ª indenização e no máximo ocorreu na 167ª indenização. Não é, então, muito provável que a ruína surja após a indenização nº 200. Por seu turno, a solução positiva da equação $1 + 1170r = \frac{1}{1-900r}$, $r < \frac{1}{900}$, é o coeficiente de ajustamento. Para obter tal igualdade, está-se a aplicar (7) e o termo do lado direito corresponde à função geradora de momentos de uma distribuição Gama de parâmetros $(1, \frac{1}{900})$. Resolvendo esta igualdade, vem que $R \approx 2.5641 \times 10^{-4}$. Pelo que, pela Desigualdade de Lundberg, $\psi(600)$ será no máximo $e^{-600 \times 2.5641 \times 10^{-4}} \approx 0.8574$.

Considerem-se, agora, quatro tipos de modelos, com $u \geq 0$ e $j = 1, 2, 3, 4$:

$$U_j(t) = u + (1 + 0.3) \frac{900}{5} t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_{j,i},$$

onde $N(t)$ é como acima e, para todo $i \geq 1$, $X_{1,i}$ tem distribuição Gama de parâmetros $(1, \frac{1}{900})$, ou Exponencial de parâmetro $\frac{1}{900}$, $X_{2,i}$ tem distribuição Gama de parâmetros $(90, \frac{1}{10})$, $X_{3,i}$ tem distribuição Gama de parâmetros $(900, 1)$ e $X_{4,i}$ tem distribuição de Pareto de parâmetros $(870.9827, 31.016)$. Desta forma, todas as distribuições das indenizações particulares têm valor esperado igual a 900. A variância da distribuição de Pareto e a variância da distribuição Gama de parâmetros $(900, 1)$ igualam 900. A variância da distribuição exponencial é 900^2 ; a da distribuição Gama de parâmetros

Tabela 1: Probabilidade de ruína associada a U_1 .

u	200	600	1250	5000
$\psi_{200;U_1}(u)$	0.7204	0.654	0.5572	0.2154
$\psi_{U_1}(u)$	0.7308	0.6595	0.558	0.2134
$\psi_{L;U_1}(u)$	0.95	0.8574	0.7258	0.2775

Tabela 2: Probabilidade de ruína associada a U_2 .

u	200	600	1250	5000
$\psi_{200;U_2}(u)$	0.7166	0.6216	0.4219	0.0538
$\psi_{L;U_2}(u)$	0.8954	0.7178	0.5013	0.0631

$(90, \frac{1}{10})$ é 9000.

Os valores da Tabela 1, por um lado, advêm da utilização do programa exibido atrás, dando origem aos valores representados por $\psi_{200;U_1}(u)$. Por outro lado, determinam-se por (14), uma vez que dizem respeito a modelos do tipo $U_1(t)$, isto é, modelos em que as indemnizações individuais seguem uma distribuição exponencial de parâmetro $1/900$. Trata-se da probabilidade de ruína exata, representada por $\psi_{U_1}(u)$. Por fim, $\psi_{L;U_1}(u)$ é o valor máximo da probabilidade de ruína pela Desigualdade de Lundberg.

Na Tabela 2, figuram os valores relativos a modelos do tipo $U_2(t)$; na Tabela 3, os valores de modelos do tipo $U_3(t)$; na Tabela 4, os valores para a probabilidade de ruína de quatro modelos do tipo $U_4(t)$ com diferentes valores de capital inicial. Note-se que, neste caso, não se calculam valores máximos pela Desigualdade de Lundberg. De facto, tais são inexistentes, uma vez que a função geradora de momentos de uma variável aleatória seguindo uma distribuição de Pareto somente se encontra definida para valores negativos, o que, neste contexto de indemnizações individuais, não faz sentido.

Como é óbvio a probabilidade de ruína é tanto menor quanto maior for o capital inicial. Repare-se que, quando o desfazamento entre o capital inicial e a média das indemnizações particulares não é grande, a probabilidade de ruína não se aproxima de valores extremos. Pelo contrário, quando $u = 200$, a probabilidade de ruína em todos os casos é de cerca

Tabela 3: Probabilidade de ruína associada a U_3 .

u	200	600	1250	5000
$\psi_{200;U_3}(u)$	0.7292	0.6191	0.4277	0.0534
$\psi_{L;U_3}(u)$	0.8943	0.7153	0.4975	0.0613

Tabela 4: Probabilidade de ruína associada a U_4 .

u	200	600	1250	5000
$\psi_{200;U_4}(u)$	0.7315	0.6237	0.4402	0.0523

de 70%. Inclusivamente, na simulação para a distribuição Exponencial, quando a ruína ocorre, em média, é logo na 4.983904^a indemnização, o que é compreensível uma vez que em média essa primeira indemnização será de 900, com o processo a iniciar-se em $u = 200$. Quando $u = 5000$ a ruína é menos provável, verificando-se apenas, no caso da distribuição Exponencial, em 2154 das 10000 simulações.

Claramente, os valores da probabilidade de ruína associada aos modelos do tipo $U_1(t)$ são significativamente mais elevados do que os relativos aos demais tipos de modelos, uma vez que, nos modelos do tipo $U_1(t)$, a variância das indemnizações é bastante superior à que se verifica nos outros tipos de modelos (variância em torno de um valor esperado comum). Portanto a probabilidade de ocorrência de indemnizações elevadas é significativamente mais elevada nos modelos do tipo $U_1(t)$, o que poderá aumentar a probabilidade do processo incorrer em ruína.

Na Figura 5 encontram-se representados de forma exata: o gráfico da probabilidade de ruína teórica para diferentes valores do capital inicial quando as indemnizações individuais seguem uma distribuição exponencial, $\psi_{U_1}(u)$; o gráfico com o valor máximo da probabilidade de ruína para a mesma situação, resultante da aplicação da Desigualdade de Lundberg, $\psi_{L;U_1}(u)$. Figuram igualmente quatro aproximações para quatro curvas. As curvas da probabilidade de ruína para diferentes valores do capital inicial quando as indemnizações particulares seguem: a distribuição Exponencial de parâmetros $(1, \frac{1}{900})$, $\psi_{200;U_1}(u)$; a distribuição Gama $(90, \frac{1}{10})$, $\psi_{200;U_2}(u)$; a distribuição Gama $(900, 1)$, $\psi_{200;U_3}(u)$; a distribuição de Pareto, $\psi_{200;U_4}(u)$.

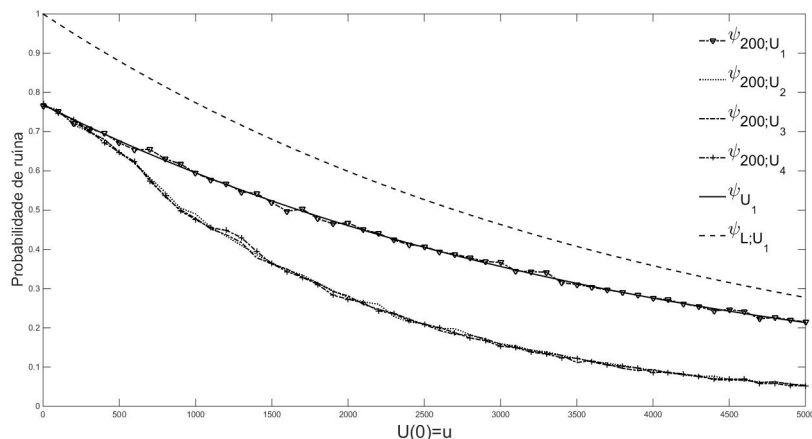


Figura 5: Probabilidade de ruína para $U_1(t)$, $U_2(t)$, $U_3(t)$ e $U_4(t)$.

De salientar ainda três aspetos. Em primeiro lugar, a distribuição de Pareto, no geral, parece exibir valores ligeiramente superiores para a probabilidade de ruína relativamente aos apresentados pela distribuição Gama(900, 1), o que é, provavelmente, consequência do facto de esta última ter a cauda menos pesada do que a primeira. Noutras palavras, a distribuição de Pareto mais facilmente assume valores considerados elevados em relação ao que acontece com a distribuição Gama(900, 1), não obstante possuírem o mesmo valor esperado e a mesma variância. Em segundo lugar, sublinhe-se a relativa proximidade entre os valores de $\psi_{U_1}(u)$ e $\psi_{L;U_1}(u)$, patente na Tabela 1 e na Figura 5. Essa proximidade é tanto maior quanto maior for o valor de u . Por fim, saliente-se a proximidade entre os valores teóricos $\psi_{U_1}(u)$ e os valores $\psi_{200;U_1}(u)$, provenientes da simulação computacional, o que confirma a eficácia deste método.

No seguinte exemplo de simulações são considerados modelos em que as indemnizações individuais X_i seguem distribuições de Pareto com diferentes parâmetros:

- 1) $X_i \sim \text{Pareto}(800, 9)$, com $\mathbb{E}[X_i] = 900$ e $\text{Var}[X_i] \approx 0.012867 \times 10^6$;
- 2) $X_i \sim \text{Pareto}(600, 2.8229)$, com $\mathbb{E}[X_i] \approx 900$ e $\text{Var}[X_i] \approx 0.36 \times 10^6$;

Tabela 5: Probabilidade de ruína

u	200	600	1250	5000
$\psi_{P_1}(u)$	0.7306	0.6192	0.4236	0.0541
$\psi_{P_2}(u)$	0.7293	0.6268	0.4603	0.1282
$\psi_{P_3}(u)$	0.7255	0.6129	0.4896	0.1823

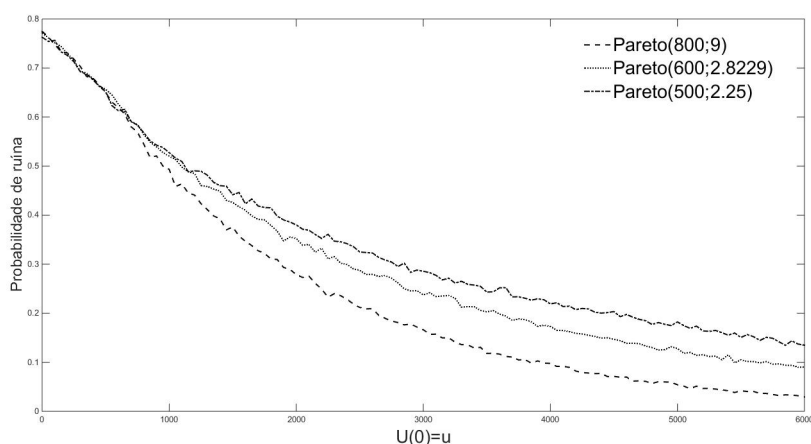


Figura 6: Probabilidade de ruína

3) $X_i \sim \text{Pareto}(500, 2.25)$, com $\mathbb{E}[X_i] = 900$ e $\text{Var}[X_i] = 1.44 \times 10^6$.

As probabilidades de ruína associadas aos modelos com indemnizações dadas por 1), 2) e 3) serão representadas por $\psi_{P_1}(u)$, $\psi_{P_2}(u)$ e $\psi_{P_3}(u)$, respetivamente. A Tabela 5 contém as probabilidades de ruína para os valores do capital inicial já considerados anteriormente e na Figura 6 estão representados os gráficos das probabilidades de ruína para os três modelos em função do capital inicial u .

Analisando a Tabela 5 e observando a Figura 6 conclui-se que a probabilidade de ruína aumenta com a variância das indemnizações e que esta diferença se torna mais notável com o aumento do capital inicial e quanto maior for a diferença entre as variâncias. De facto, os gráficos das probabilidades de ruína apresentam um decrescimento exponencial, que é mais acentuado em $\psi_{P_1}(u)$. Note-se que a variância das indemnizações do

Tabela 6: Probabilidade de ruína

u	200	600	1250	5000
$\lambda = 0.05$	0.7149	0.6083	0.4836	0.1852
$\lambda = 0.2$	0.7318	0.629	0.5084	0.2191
$\lambda = 1$	0.7272	0.639	0.5179	0.2277

modelo 2) é aproximadamente 28 vezes superior à do modelo 1) enquanto que a variância das indenizações do modelo 3) é aproximadamente 4 vezes superior à do modelo 2).

Por fim, o seguinte exemplo de simulações corresponde a um modelo em que as indenizações individuais seguem uma distribuição de Pareto(500, 2.25), considerando três processos de Poisson com parâmetros distintos:

1) $N(t) \sim \text{Poisson}(0.05t)$;

2) $N(t) \sim \text{Poisson}(0.2t)$;

3) $N(t) \sim \text{Poisson}(t)$.

O número total de unidades temporais é igual a 1000 para cada modelo. Nesse intervalo de tempo ocorrem em média: 50 indenizações no modelo 1), o que significa que num intervalo de 20 unidades temporais ocorre 1 indenização; 200 indenizações no modelo 2), o que significa que num intervalo de 5 unidades temporais ocorre 1 indenização; 1000 indenizações no modelo 3), o que significa que num intervalo de uma unidade temporal ocorre 1 indenização. As probabilidades de ruína associadas aos modelos com processo de Poisson definido em 1), 2) e 3) serão representadas por $\psi_{\lambda_1}(u)$, $\psi_{\lambda_2}(u)$ e $\psi_{\lambda_3}(u)$, respectivamente. A Tabela 6 contém as probabilidades de ruína para os valores do capital inicial considerados anteriormente e na Figura 7 estão representados os gráficos das probabilidades de ruína para os três modelos em função do capital inicial u .

Os valores na Tabela 6 e os gráficos na Figura 7 parecem indicar que a probabilidade de ruína aumenta com a frequência das indenizações e que a diferença entre as probabilidades aumenta com o capital inicial u .

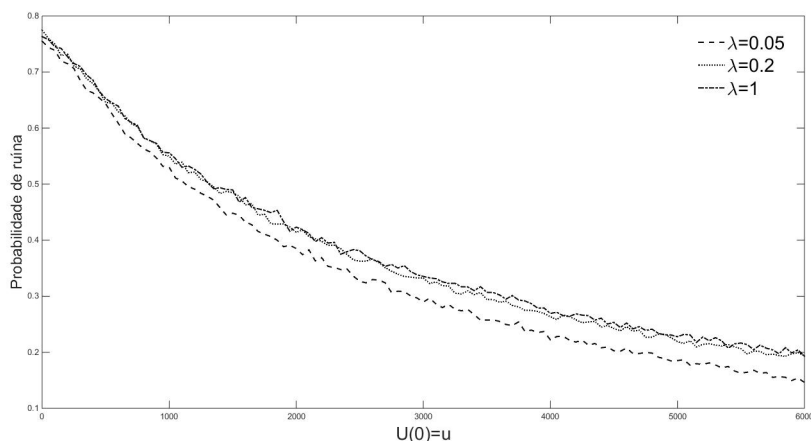


Figura 7: Probabilidade de ruína

Os valores de $\psi_{\lambda_1}(u)$ são sempre inferiores aos de $\psi_{\lambda_2}(u)$ e $\psi_{\lambda_3}(u)$, mas os gráficos destes dois últimos estão muito próximos e nem sempre se verifica que $\psi_{\lambda_2}(u) < \psi_{\lambda_3}(u)$, por exemplo para alguns valores de u no intervalo $u \in [0, 1000]$.

Agradecimentos

Irene Brito e Pedro Ramos agradecem ao Centro de Matemática da Universidade do Minho pelo apoio através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia, no âmbito do projeto PEstOE/MAT/UI0013/2014. Patrícia Gonçalves agradece à FCT pelo suporte financeiro concedido através do projecto UID/MAT/04459/2013.

5 Anexo

Neste anexo são apresentadas as demonstrações dos resultados enunciados na secção 3, nomeadamente, o Teorema 3.1, o Teorema 3.2 e o Corolário 3.1.

5.1 Demonstração do Teorema Fundamental do Risco

A demonstração deste teorema pode ser sumariada da seguinte forma. Uma vez que se pretende obter uma relação entre $\psi(u)$ e a esperança condicional da variável aleatória $e^{-RU(T)}$, começa-se por fixar r e t arbitrários e por considerar a esperança da variável aleatória $e^{-rU(t)}$. De seguida, discretiza-

se o espaço tendo em conta o tempo de ruína, ou seja, tendo em conta se a ruína ocorreu antes ou depois do tempo t . Posteriormente, estima-se cada termo da esperança de $e^{-rU(t)}$ i.e. quando a ruína ocorre antes e depois do tempo t . Para completar a demonstração basta provar que a esperança no caso em que a ruína ocorre depois do tempo t é nula. Abaixo apresentam-se todos os passos detalhados deste argumento.

Demonstração. Fixe-se $t > 0$ e $r > 0$ e discretize-se o espaço tendo em conta a posição do tempo t em relação ao tempo de ruína T , ou seja, considerando os conjuntos $T \leq t$ e $T > t$. Tem-se que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{-rU(t)}] &= \mathbb{E}[e^{-rU(t)}(\mathbf{1}_{\{T \leq t\}} + \mathbf{1}_{\{T > t\}})] \\ &= \mathbb{E}[e^{-rU(t)}\mathbf{1}_{\{T \leq t\}}] + \mathbb{E}[e^{-rU(t)}\mathbf{1}_{\{T > t\}}], \end{aligned}$$

e condicionando, obtém-se

$$\mathbb{E}[e^{-rU(t)}] = \mathbb{E}[e^{-rU(t)}|T \leq t]\mathbb{P}(T \leq t) + \mathbb{E}[e^{-rU(t)}|T > t]\mathbb{P}(T > t). \quad (15)$$

Agora começa-se por simplificar a expressão $\mathbb{E}[e^{-rU(t)}|T \leq t]$. Para $T \leq t$, tem-se que $U(t) = U(T) + c(t-T) - [S(t) - S(T)]$ e como $U(t) = u + ct - S(t)$, resulta que

$$\mathbb{E}[e^{-rU(t)}|T \leq t] = e^{-rc(t-T)}\mathbb{E}[e^{-rU(T) + r[S(t) - S(T)]}|T \leq t]. \quad (16)$$

Agora, usando o facto de que: se $T \leq t$ então $U(T)$ e $S(t) - S(T)$ são independentes, pois o que acontece num certo intervalo de tempo é independente do que acontece noutro intervalo de tempo disjunto do primeiro; e $S(t) - S(T)$ tem distribuição de Poisson composta com parâmetro $\lambda(t - T)$, a expressão (16) fica igual a

$$e^{-rc(t-T)}\mathbb{E}[e^{-rU(T)}|T \leq t]e^{\lambda(t-T)[M_X(r)-1]},$$

e para $r = R$ o coeficiente de ajustamento, a expressão (16) simplifica para

$$\mathbb{E}[e^{-RU(T)}|T \leq t].$$

Como consequência, a expressão (15) para $r = R$ fica escrita como

$$\mathbb{E}[e^{-RU(t)}] = \mathbb{E}[e^{-RU(T)}|T \leq t]\mathbb{P}(T \leq t) + \mathbb{E}[e^{-RU(t)}|T > t]\mathbb{P}(T > t). \quad (17)$$

Agora, é fácil ver que $\mathbb{E}[e^{-RU(t)}] = e^{-Ru}$. Para tal, note-se que por definição de $U(t)$, tem-se que $\mathbb{E}[e^{-RU(t)}] = e^{-Ru}e^{-Rct}\mathbb{E}[e^{RS(t)}] = e^{-Ru}e^{-Rct}M_{S(t)}(R)$, e por (4), (7) e (6) resulta que $\mathbb{E}[e^{-RU(t)}] = e^{-Ru}$.

Juntando as observações acima, a expressão (15) pode escrever-se como

$$e^{-Ru} = \mathbb{E}[e^{-RU(T)}|T \leq t]\mathbb{P}(T \leq t) + \mathbb{E}[e^{-RU(t)}|T > t]\mathbb{P}(T > t).$$

Notando que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T \leq t) = \mathbb{P}(T < \infty)$ e tomando o limite quando $t \rightarrow \infty$ na igualdade anterior, tem-se que

$$e^{-Ru} = \mathbb{E}[e^{-RU(T)}|T < \infty]\mathbb{P}(T < \infty) + \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[e^{-RU(t)}|T > t]\mathbb{P}(T > t).$$

Para terminar a prova basta provar que o segundo termo do lado direito da expressão anterior é nulo, uma vez que a igualdade que resta é exatamente a igualdade que se pretende provar. Para tal, note-se que se $T > t$ então $U(t) \geq 0$, logo, discretizando o espaço tendo em conta a posição do montante $U(t)$ em relação a um montante $u_0(t)$, tem-se que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{-RU(t)}|T > t]\mathbb{P}(T > t) &= \mathbb{E}[e^{-RU(t)}, T > t] \\ &= \mathbb{E}[e^{-RU(t)}, T > t, 0 \leq U(t) \leq u_0(t)] + \mathbb{E}[e^{-RU(t)}, T > t, U(t) > u_0(t)] \\ &= \mathbb{E}[e^{-RU(t)}|T > t, 0 \leq U(t) \leq u_0(t)]\mathbb{P}(T > t, 0 \leq U(t) \leq u_0(t)) \\ &\quad + \mathbb{E}[e^{-RU(t)}|T > t, U(t) > u_0(t)]\mathbb{P}(T > t, U(t) > u_0(t)) \\ &\leq \mathbb{P}(U(t) \leq u_0(t)) + \mathbb{E}[e^{-Ru_0(t)}]. \end{aligned}$$

Observe que, para já, não se impôs nenhuma condição no montante $u_0(t)$. Mas se $\lim_{t \rightarrow \infty} u_0(t) = \infty$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[e^{-Ru_0(t)}] = 0$. Sendo assim, só resta verificar que a probabilidade $\mathbb{P}(U(t) \leq u_0(t))$ se anula quando $t \rightarrow \infty$. Para tal, note-se que se obtém $\mathbb{E}[U(t)] = u + ct - \lambda\mu t$ e $Var[U(t)] = t\lambda\mathbb{E}[X^2]$. A última igualdade resulta do facto de que uma variável de Poisson tem média e variância iguais, e neste caso, igual a λt . Logo, escolhe-se, por exemplo, $u_0(t) = \mathbb{E}[U(t)] - t^{2/3}\lambda\mathbb{E}[X^2]$, que satisfaz a condição imposta acima. Finalmente, pela desigualdade de Chebychev, tem-se que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U(t) \leq u_0(t)) &= \mathbb{P}(U(t) - \mathbb{E}[U(t)] \leq -t^{2/3}\lambda\mathbb{E}[X^2]) \\ &\leq \mathbb{P}(|U(t) - \mathbb{E}[U(t)]| \geq t^{2/3}\lambda\mathbb{E}[X^2]) \\ &\leq \frac{Var[U(t)]}{t^{4/3}(\mathbb{E}[X^2])^2\lambda^2} \leq \frac{1}{t^{1/3}\mathbb{E}[X^2]\lambda}, \end{aligned}$$

que tende a 0, quando $t \rightarrow \infty$.

□

5.2 Demonstração do Teorema 3.2

A demonstração deste resultado baseia-se no seguinte argumento. Uma vez que se pretende obter uma expressão exata para a derivada de $\psi(u)$, começa-se por escrever $\psi(u)$ à custa do número de indemnizações que ocorrem num intervalo de tempo infinitesimal $(0, dt)$. Usando as propriedades do processo de Poisson $N(t)$ e dos processos $S(t)$ e $U(t)$, obtêm-se expressões para a probabilidade de ruína no caso em que não ocorrem indemnizações nesse intervalo de tempo e quando ocorre apenas uma indemnização. A prova decorre da manipulação dessas expressões.

Demonstração. Fixado um intervalo de tempo infinitesimal $(0, dt)$, decompõe-se o evento $\{T < +\infty\}$ mediante o número de indemnizações que ocorrem nesse intervalo, ou seja, o número de indemnizações que levaram a seguradora à ruína

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \\ &= \mathbb{P}(T < \infty) = \mathbb{P}(T < +\infty, N(dt) = 0, N(dt) = 1, N(dt) \geq 2) \\ &= \mathbb{P}(T < \infty, N(dt) = 0) + \mathbb{P}(T < \infty, N(dt) = 1) + \mathbb{P}(T < \infty, N(dt) \geq 2) \\ &= \mathbb{P}(T < \infty | N(dt) = 0) \mathbb{P}(N(dt) = 0) + \mathbb{P}(T < \infty | N(dt) = 1) \mathbb{P}(N(dt) = 1) \\ &\quad + \mathbb{P}(T < \infty | N(dt) \geq 2) \mathbb{P}(N(dt) \geq 2). \end{aligned}$$

Como $N(dt)$ tem distribuição de Poisson de parâmetro λt e pela expansão de Taylor da exponencial tem-se que

$$\mathbb{P}(N(dt) = 0) = 1 - \lambda dt, \quad \mathbb{P}(N(dt) = 1) = \lambda dt, \quad \mathbb{P}(N(dt) \geq 2) = o(dt),$$

ignorando os termos de ordem igual ou superior a $(dt)^2$. Note-se que as igualdades acima também podem ser obtidas usando a descrição alternativa do processo de Poisson acima, veja-se a propriedade (*) (cf. Teorema 2.1 de [4]). Por outro lado, tendo ainda em conta que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T < \infty | N(dt) = 0) &= \mathbb{P}(T < \infty | S(dt) = 0) \\ &= \mathbb{P}(T < \infty | U(dt) = u + cdt) = \psi(u + cdt) \\ \mathbb{P}(T < \infty | N(dt) = 1) &= \mathbb{P}(T < \infty, X > u + cdt | N(dt) = 1) \\ &\quad + \mathbb{P}(T < \infty, X \leq u + cdt | N(dt) = 1) \\ &= (1 - F_X(u + cdt)) + \left(\int_0^{u+cdt} \psi(u + cdt - x) dF_X(x) \right) \\ \mathbb{P}(T < \infty | N(dt) \geq 2) &= o(dt), \end{aligned}$$

obtéem-se

$$\begin{aligned} \psi(u) &= (1 - \lambda dt) \psi(u + cdt) + \lambda dt \int_0^{u+cdt} \psi(u + cdt - x) dF_X(x) \\ &\quad + \lambda dt (1 - F_X(u + cdt)) + o(dt) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \psi(u + cdt) \\ &\quad - \lambda dt \left[\psi(u + cdt) - \int_0^{u+cdt} \psi(u + cdt - x) dF_X(x) - [1 - F_X(u + cdt)] \right] \\ &\quad + o(dt). \end{aligned}$$

Daqui conclui-se que

$$\frac{\psi(u + cdt) - \psi(u)}{cdt}$$

se escreve como

$$\frac{\lambda}{c} \left[\psi(u + cdt) - \int_0^{u+cdt} \psi(u + cdt - x) dF_X(x) - [1 - F_X(u + cdt)] \right] + \frac{o(dt)}{cdt}.$$

Fazendo $dt \rightarrow 0$, segue que

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c} \left[\psi(u) - \int_0^u \psi(u - x) dF_X(x) - [1 - F_X(u)] \right].$$

□

5.3 Demonstração do Corolário 3.1

Optou-se por apresentar a prova deste resultado usando apenas cálculos simples de integrais, nos quais se usa a fórmula de integração por partes, o Teorema de Fubini e propriedades da probabilidade de ruína listadas na secção 3 como consequências do Teorema 3.1.

Demonstração. Pelo Teorema 3.2 tem-se que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{ru} (-\psi'(u)) du &= \underbrace{\frac{-\lambda}{c} \int_0^\infty e^{ru} \psi(u) du}_{I(r)} + \underbrace{\frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{ru} \int_0^u \psi(u - x) dF_X(x) du}_{II(r)} \\ &\quad + \underbrace{\frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{ru} (1 - F_X(u)) du}_{III(r)}. \end{aligned}$$

Agora note-se que

$$\begin{aligned} III(r) &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{ru} \int_u^\infty dF_X(y) du = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \left(\int_0^y e^{ru} du \right) dF_X(y) \\ &= \frac{\lambda}{cr} \int_0^\infty (e^{ry} - 1) dF_X(y) = \frac{\lambda}{cr} (M_X(r) - 1) = \frac{1}{(1 + \theta)\mu r} (M_X(r) - 1). \end{aligned}$$

Por outro lado, fazendo integração por partes e usando o facto de que $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0$, tem-se que

$$\int_0^\infty e^{ru} (-\psi'(u)) du = \psi(0) + r \int_0^\infty e^{ru} \psi(u) du = \psi(0) + rI(r). \quad (18)$$

Sendo assim, tem-se que $II(r) + III(r) = \psi(0) + (r + \lambda/c)I(r)$. Agora vai-se calcular $I(r)$. Por (10) tem-se que

$$\begin{aligned} I(r) &= \underbrace{\frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{ru} \int_u^\infty (1 - F_X(x)) dx du}_{A(r)} \\ &\quad + \underbrace{\frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{ru} \left(\int_0^u \psi(u-x)(1 - F_X(x)) dx \right) du}_{B(r)}. \end{aligned}$$

Agora note-se que, aplicando o Teorema de Fubini duas vezes, obtém-se

$$\begin{aligned} A(r) &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \left(\int_0^x e^{ru} du \right) (1 - F_X(x)) dx = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \frac{e^{rx} - 1}{r} (1 - F_X(x)) dx \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \frac{e^{rx} - 1}{r} \left(\int_x^\infty dF_X(y) \right) dx = \frac{\lambda}{cr} \int_0^\infty \left(\int_0^y (e^{rx} - 1) dx \right) dF_X(y) \\ &= \frac{\lambda}{cr} \int_0^\infty \left(\frac{e^{ry} - 1}{r} - y \right) dF_X(y) = \frac{\lambda}{cr} \left(\frac{1}{r} (M_X(r) - 1) - \mu \right). \end{aligned}$$

Daqui conclui-se que

$$I(r) = \frac{\lambda}{cr} \left(\frac{1}{r} (M_X(r) - 1) - \mu \right) + B(r).$$

Finalmente calcula-se $B(r)$. Ora, aplicando o Teorema de Fubini e uma

mudança de variáveis, obtém-se

$$\begin{aligned}
 B(r) &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{ru} \int_0^u \psi(u-x)(1-F_X(x)) dx du \\
 &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty (1-F_X(x)) \left(\int_x^\infty e^{ru} \psi(u-x) du \right) dx \\
 &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty (1-F_X(x)) \left(\int_0^\infty e^{r(y+x)} \psi(y) dy \right) dx \\
 &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{rx} (1-F_X(x)) \left(\int_0^\infty e^{ry} \psi(y) dy \right) dx \\
 &= I(r) \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{rx} \left(\int_x^\infty dF_X(x) \right) dx \\
 &= I(r) \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \left(\int_0^y e^{rx} dx \right) dF_X(y) \\
 &= I(r) \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \frac{e^{ry} - 1}{r} dF_X(y) \\
 &= I(r) \frac{\lambda}{cr} (M_X(r) - 1).
 \end{aligned}$$

Sendo assim, conclui-se que

$$I(r) = \frac{\lambda}{cr} \left(\frac{1}{r} (M_X(r) - 1) - \mu \right) + I(r) \frac{\lambda}{cr} (M_X(r) - 1),$$

ou seja,

$$I(r) = \frac{\lambda}{r} \frac{M_X(r) - 1 - \mu r}{cr - \lambda(M_X(r) - 1)}.$$

Logo, substituindo $I(r)$ em (18) e usando (4) e (13), obtém-se o resultado. \square

Referências

- [1] N. Bowers, H. Gerber, J. Hickman, D. Jones e C. Nesbitt, *Actuarial Mathematics*, 2nd ed., Schaumburg, The Society of Actuaries, 1997.
- [2] I. Brito e P. Gonçalves, *Introdução à teoria do risco*, Universidade do Minho, 2015.
- [3] H. Bühlmann, *Mathematical Methods in Risk Theory*, 2nd ed., New York, Springer, 1996.

- [4] M. Centeno, *Teoria do Risco na Atividade Seguradora*, Oeiras, Celta Editora, 2003.
- [5] K. Chung, *A Course in Probability Theory*, 2nd ed., New York, Academic Press, 1974.
- [6] D. Dickson, *Insurance Risk and Ruin*, Cambridge, Cambridge University Press, 2005.
- [7] R. Kaas, M. Goovaerts, J. Dhaene e R. Denuit, *Modern Actuarial Risk Theory*, 2nd ed., Springer, 2009.
- [8] S. Karlin e H. Taylor, *A first course in stochastic processes*, Academic Press, 1975.
- [9] S. Klugman. H. Panjer e G. Willmot, *Loss Models*, 4th ed., Wiley, 2012.
- [10] P. Ramos, *Princípios de cálculo de prémios e medidas de risco em modelos atuariais*, Tese de Mestrado, Universidade do Minho, Portugal, 2014.
- [11] A. Reis, *Teoria da Ruína*, ISEG, Dezembro de 2001.
- [12] A. N. Shiriyayev, *Probability*, New York, Springer Verlag, 1984.