Construção de matrizes inteiras com somas das linhas e das colunas prescritas

Rosário Fernandes
Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade Nova de Lisboa, Caparica, Portugal
e-mail: `mrff@fct.unl.pt`

Henrique F. da Cruz
Departamento de Matemática da Universidade da Beira Interior
Covilhã, Portugal
e-mail: `hcruz@ubi.pt`

Resumo: Descrevemos um algoritmo de construção de matrizes, que só têm números inteiros não negativos e não superiores a determinado inteiro positivo p, cujas somas dos elementos de cada linha e de cada coluna da matriz são prescritas.

Abstract: We describe an algorithm for the construction of matrices, with nonnegative integers and no grater than a positive integer p, that have the sum of the integers in each row and in each column of the matrix known.

palavras-chave: Matrizes com entradas inteiras; Partições; Algoritmo.

keywords: Integral matrices; Partitions; Algorithm.

1 Introdução

No Boletim da Sociedade Portuguesa da Matemática [3] encontra-se um artigo onde é apresentado um algoritmo para a construção de matrizes de zeros e uns com somas de linhas e de colunas prescritas. Como foi mencionado, as matrizes de zeros e uns são muito utilizadas tanto em áreas da Matemática como também em áreas da Física, Química e Biologia. Em certos problemas de Investigação Operacional, surgem não só as matrizes de zeros e uns, mas também matrizes cujas posições são números inteiros não negativos, não superiores a um determinado número positivo p fixo, que designaremos por p-matrizes. Tal como as matrizes de zeros e uns, as p-matrizes parecem ser matrizes relativamente simples de estudar. Porém esta ideia inicial não é de todo verdadeira, e inúmeros problemas podem ser colocados em relação a estas matrizes. Por conseguinte, as p-matrizes têm sido o alvo de um intenso estudo feito por imensos matemáticos, [1, 2, 4, 6]. Com este texto pretendemos estender o texto de [3] para p-matrizes, e descrever um algoritmo de construção destas matrizes, verificando certas condições ligadas às somas dos elementos das linhas e das colunas das matrizes. O algoritmo por nós apresentado estende para as p-matrizes alguns algoritmos já conhecidos para a construção de matrizes de zeros e uns, como o algoritmo de Ryser, seguindo ideias similares.

2 Partições e p-majoração

Uma *partição* de peso $t \geq 0$ é uma sequência não crescente de números inteiros não negativos, chamados *partes* da partição, cuja soma é igual a t. O número de elementos não nulos na partição λ é o *comprimento* de λ e é denotado por $l(\lambda)$. Quando λ é uma partição de peso t, representamos habitualmente λ por uma sequência finita $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{l(\lambda)})$, onde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_{l(\lambda)} > 0$. Por vezes pode ser necessário que a partição tenha um número de partes superior ao seu comprimento. Nesse caso acrescentamos, depois da última parte não nula, uma sequência de zeros.

Definição 2.1 *Seja* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{l(\lambda)})$ *uma partição de peso* t. *A partição conjugada de* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{l(\lambda)})$ *é a partição* λ^*, *de peso* t, *cuja coordenada* j *é*

$$\lambda_j^* = |\{i : l(\lambda) \geq i \geq 1, \ \lambda_i \geq j\}|, \quad \textit{com } 1 \leq j \leq \lambda_1.$$

Exemplo 2.2 *Consideremos a partição* λ *de peso* 15, *tal que* $\lambda = (4, 3, 3, 2, 2, 1)$. *A partição conjugada desta partição tem as coordenadas*

$$\begin{aligned} \lambda_1^* &= |\{i : \ \lambda_i \geq 1\}| = |\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}| = 6, \\ \lambda_2^* &= |\{i : \ \lambda_i \geq 2\}| = |\{1, 2, 3, 4, 5\}| = 5, \\ \lambda_3^* &= |\{i : \ \lambda_i \geq 3\}| = |\{1, 2, 3\}| = 3, \\ \lambda_4^* &= |\{i : \ \lambda_i \geq 4\}| = |\{1\}| = 1. \end{aligned}$$

Donde, $\lambda^* = (6, 5, 3, 1)$. □

Definição 2.3 *Sejam* α *e* β *duas partições com o mesmo peso. Dizemos que* α *é dominado ou majorado por* β, $\alpha \preceq \beta$, *quando*

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_i \leq \beta_1 + \ldots + \beta_i, \qquad \textit{para } i \geq 1.$$

Existe uma relação muito útil entre a majoração de duas partições e a majoração das respetivas partições conjugada:

Proposição 2.4 *Sejam α e β duas partições com o mesmo peso. Então,*

$$\alpha \preceq \beta, \ \textit{se, e só se, } \beta^* \preceq \alpha^*.$$

Em [4], generalizámos a relação de majoração entre duas partições com o mesmo peso:

Definição 2.5 *Sejam α e β duas partições de peso t e seja p um inteiro positivo. Dizemos que α é p-dominado (ou p-majorado) por β, e escrevemos $\alpha \preceq_p \beta$, se*

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \leq \sum_{i=1}^{pk} \beta_i, \quad \textit{para } k \geq 1.$$

Note-se que $\alpha \preceq_1 \beta$ é o mesmo que $\alpha \preceq \beta$.

Exemplo 2.6 *Consideremos as partições $\lambda = (5,2)$ e $\mu = (3,3,1)$ de peso 7. Uma vez que*

$$\begin{array}{rcl} \mu_1 = 3 & \leq & 5 = \lambda_1 \\ \mu_1 + \mu_2 = 6 & \leq & 7 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 7 & \leq & 7 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \end{array}$$

concluímos que $\mu \preceq \lambda$. Porém, $\lambda \npreceq \mu$ porque

$$\lambda_1 = 5 \quad \nleq \quad 3 = \mu_1.$$

No entanto,

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 = 5 & \leq & 6 = \mu_1 + \mu_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 7 & \leq & 7 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4, \end{array}$$

e então $\lambda \preceq_2 \mu$. □

Como era de esperar, a Proposição 2.4 pode ser generalizada para esta relação:

Proposição 2.7 [4] *Sejam α and β partições, com o mesmo peso e p um inteiro positivo. Então,*

$$\alpha \preceq_p \beta, \qquad \textit{se, e só se,} \qquad \beta^* \preceq_p \alpha^*.$$

3 Partições e p-matrizes

Fixemos um inteiro positivo, p. Recordemos que uma matriz diz-se uma p-matriz se todas as suas posições forem números inteiros não negativos e não superiores a p. Dada uma p-matriz, $A = [a_{ij}]$, do tipo m por n (com m linhas e n colunas), podemos calcular a soma da linha i da matriz A, que designamos por R_i, i.e.,

$$\sum_{t=1}^{n} a_{it} = R_i,$$

e a soma da coluna j da matriz A, que designamos por S_j, i.e.,

$$\sum_{t=1}^{m} a_{tj} = S_j.$$

Obtemos assim a sequência das somas das linhas de A e a sequência das somas das colunas de A, i.e.,

$$(R_1, \ldots, R_m) \text{ e } (S_1, \ldots, S_n).$$

Nem sempre estas sequências são partições.

Exemplo 3.1 *Sendo A a 3-matriz do tipo 3 por 5, tal que*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

então as somas das linhas de A são

$$R_1 = 6,\ R_2 = 7,\ R_3 = 1,$$

pelo que a sequência das somas das linhas de A é $(6, 7, 1)$, não sendo portanto uma partição. Se calcularmos a sequência das somas das colunas de A obtemos a sequência $(4, 3, 3, 2, 2)$, a qual já é uma partição. □

Repare que se as sequências das somas das linhas e das somas das colunas de uma p-matriz A forem duas partições, porque a soma dos inteiros de cada uma destas partições é o número de entradas não nulas da matriz A, então podemos afirmar que as duas partições são do mesmo peso.

Tal como vimos para as matrizes de zeros e uns, mais complicado é o problema inverso. Sejam R e S duas partições com o mesmo peso, tais que

$R = (R_1, \ldots, R_m)$ e $S = (S_1, \ldots, S_n)$. Denotamos por $\mathcal{A}^{(p)}(R, S)$ o conjunto das p-matrizes, $[a_{i,j}]$, do tipo m por n, que satisfazem

$$\sum_{t=1}^{n} a_{i,t} = R_i \text{ e } \sum_{t=1}^{m} a_{t,j} = S_j,$$

para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Uma questão que naturalmente se coloca é a de saber em que condições o conjunto $\mathcal{A}^{(p)}(R, S)$ é não vazio. Esta questão, para $p = 1$ foi resolvida, independentemente, por Gale e por Ryser na década de 50 do século XX, [5, 8].

Teorema 3.2 [1, 5, 8]*(Teorema de Gale-Ryser) Sejam R e S duas partições do mesmo peso. Então, $\mathcal{A}(R, S) \neq \emptyset$ se e só se $S \preceq R^*$.*

Quando p é um número inteiro positivo, há vários resultados que nos levam a concluir se $\mathcal{A}^{(p)}(R, S)$ é não vazio, [1, 2, 6, 7]. Recentemente, [4], aplicando a relação p-majoração descrita na secção anterior, obtivemos uma generalização mais natural do teorema de Gale-Ryser, uma vez que o nosso resultado usa o conceito de p-majoração que é uma generalização imediata do conceito de majoração, usado no teorema de Gale-Ryser .

Teorema 3.3 [4] *Sejam R e S partições, com o mesmo peso. Então,*

$$\mathcal{A}^{(p)}(R, S) \textit{ é não vazio, se, e só se, } S \preceq_p R^*.$$

Exemplo 3.4 *Vejamos uma aplicação deste resultado. Sejam R e S as partições de peso 10, tais que $R = (3, 3, 2, 2)$ e $S = (5, 5)$.*

Temos $R^* = (4, 4, 2)$. Como,

$$S_1 = 5 \quad \not\leq \quad 4 = R_1^*,$$

então $S \not\preceq R^*$ e pelo teorema de Gale-Ryser, não existe nenhuma matriz de zeros e uns com vetor soma das linhas igual a R e vetor soma das colunas igual a S.

No entanto, se quisermos saber se $\mathcal{A}^{(2)}(R, S)$ é não vazio, poderemos recorrer ao último resultado. Tal como para o caso das matrizes de zeros e uns bastava-nos ver que

$$\begin{aligned} S_1 = 5 &\quad \leq \quad 8 = R_1^* + R_2^* \\ S_1 + S_2 = 10 &\quad \leq \quad 10 = R_1^* + R_2^* + R_3^* + R_4^*, \end{aligned}$$

para concluirmos que $S \preceq_2 R^*$ *e, pelo Teorema 3.3, que existe pelo menos uma matriz em* $\mathcal{A}^{(2)}(R,S)$. *De facto,*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{A}^{(2)}(R,S).$$

□

4 Algoritmo da divisão e uma matriz de $\mathcal{A}^{(p)}(R,S)$

Sejam p um inteiro positivo, R e S partições de peso t, tais que $R = (R_1,\ldots,R_m)$, $S = (S_1,\ldots,S_n)$, e $S \preceq_p R^*$. Portanto, $\mathcal{A}^{(p)}(R,S)$ é um conjunto não vazio. Antes de descrever um algoritmo para a construção de uma matriz de $\mathcal{A}^{(p)}(R,S)$, vamos usar o algoritmo da divisão para determinar uma matriz de $\mathcal{A}^{(p)}(F,S)$, para certa partição F, [4]. Esta matriz será depois usada para a construção de uma matriz de $\mathcal{A}^{(p)}(R,S)$.

Definição 4.1 *Para cada* $1 \le l \le n$, *sejam* d_l *e* b_l, *inteiros não negativos, tais que*

$$S_l = d_l p + b_l, \qquad \textit{com } 0 \le b_l < p.$$

Seja $\overline{A_S} = [a_{i,j}]$ *a matriz, de tipo* m *por* n, *tal que, para* $1 \le i \le m$ *e* $1 \le j \le n$,

$$a_{i,j} = \begin{cases} p & \textit{se} \quad i \le d_j \\ b_j & \textit{se} \quad i = d_j + 1 \\ 0 & \textit{nos restantes casos} \end{cases}.$$

Repare que o vetor soma das colunas da matriz $\overline{A_S}$ é igual a S. Mas nem sempre o vetor soma das linhas da matriz $\overline{A_S}$ é igual a R.

Exemplo 4.2 *Sejam* $R = (7,7,6,5)$, $S = (6,5,5,5,4)$ *e* $p = 3$. *Então temos*

$$S \preceq_3 R^* = (4,4,4,4,4,3,2).$$

$$\begin{array}{llllll}
\textit{Como} & S_1 = 6 = 2\times 3 + 0 = d_1 p + b_1, & \textit{obtemos} & d_1 = 2 & \textit{e} & b_1 = 0. \\
\textit{Como} & S_2 = 5 = 1\times 3 + 2 = d_2 p + b_2, & \textit{obtemos} & d_2 = 1 & \textit{e} & b_2 = 2. \\
\textit{Como} & S_3 = 5 = 1\times 3 + 2 = d_3 p + b_3, & \textit{obtemos} & d_3 = 1 & \textit{e} & b_3 = 2. \\
\textit{Como} & S_4 = 5 = 1\times 3 + 2 = d_4 p + b_4, & \textit{obtemos} & d_4 = 1 & \textit{e} & b_4 = 2. \\
\textit{Como} & S_5 = 4 = 1\times 3 + 1 = d_5 p + b_5, & \textit{obtemos} & d_5 = 1 & \textit{e} & b_5 = 1.
\end{array}$$

Consequentemente,

$$\begin{array}{lll}
a_{1,1}=3=p & \textit{porque} & 1\leq d_1=2,\\
a_{2,1}=3=p & \textit{porque} & 2\leq d_1=2,\\
a_{3,1}=0=b_1 & \textit{porque} & 3=d_1+1,\\
a_{4,1}=0 & \textit{porque} & 4\not\leq d_1=2,\ 4\neq d_1+1=3,\\
a_{1,2}=3=p & \textit{porque} & 1\leq d_2=1,\\
a_{2,2}=2=b_2 & \textit{porque} & 2=d_2+1,\\
a_{3,2}=0 & \textit{porque} & 3\not\leq d_2=1,\ 3\neq d_2+1=2,\\
a_{4,2}=0 & \textit{porque} & 4\not\leq d_2=1,\ 4\neq d_2+1=2,\\
 & \textit{e assim sucessivamente.} &
\end{array}$$

Então,

$$\overline{A_S}=\begin{bmatrix} 3&3&3&3&3\\ 3&2&2&2&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}.$$

Repare que a partição soma das colunas de A_S é S e a partição soma das linhas de A_S é $F=(15,10,0,0)$. □

5 Construção de uma matriz em $\mathcal{A}^{(p)}(R,S)$

Tal como na seção anterior, sejam p um inteiro positivo, R e S partições de peso t, tais que $R=(R_1,\ldots,R_m)$, $S=(S_1,\ldots,S_n)$, e $S\preceq_p R^*$. Portanto, $\mathcal{A}^{(p)}(R,S)$ é um conjunto não vazio. A matriz m por n apresentada na definição 4.1 é o ponto de partida do nosso algoritmo, e a matriz de $\mathcal{A}^{(p)}(R,S)$ é construída linha por linha começando na última linha, [4].

Algoritmo para construir uma matriz em $\mathcal{A}^{(p)}(R,S)$

Para tornar o algoritmo mais compreensível, antes da descrição de cada passo do algoritmo, damos uma pequena ideia do objetivo desse passo.

Passo-1. Começamos com a matriz $\overline{A_S}$, dada na definição 4.1, e $R=(R_1,\ldots,R_m)$;

Passo-2. Seja $E=[e_{ij}]=\overline{A_S}$;

Passo-3. Seja z o número de linhas de E;

Passo-4. (*Neste passo, comparamos a soma dos elementos da linha z da matriz E, última linha de E, e o valor de R_z.*)

Se $\sum_{j=1}^{n} e_{zj} = R_z$, então vamos para o Passo-9., com $C = E$.

Caso contrário, ou seja, se $\sum_{j=1}^{n} e_{zj} < R_z$, então vamos para o Passo-5.;

Passo-5. (*Neste passo, usando a relação de ordem lexicográfica $\gg$, ou seja*

$$(x_1, x_2) \gg (y_1, y_2) \text{ se, e só se, } x_1 > y_1 \text{ ou } x_1 = y_1 \text{ e } x_2 > y_2,$$

para determinarmos qual o elemento da matriz E que não está na última linha de E e que irá ser alterado.)

Seja (r, l) o maior par (pela relação de ordem lexicográfica) que satisfaz

$$1 \leq r \leq z - 1, \quad 1 \leq l \leq n, \quad e_{rl} \neq 0, \quad \text{e} \quad e_{zl} \neq p;$$

Passo-6. (*Neste passo estabelecemos o valor que irá afetar o elemento da matriz E, encontrado no passo anterior e o elemento de E que está na mesma coluna deste, mas na última linha de E.*)

Seja

$$f_{r,l} = \min \left\{ p - e_{zl}, \quad e_{rl}, \quad R_z - \sum_{j=1}^{n} e_{zj} \right\};$$

Passo-7. (*Neste passo, usando o valor que encontrámos no passo anterior, modificamos a matriz E, alterando unicamente duas posições, a encontrada no Passo-5. e a que está na mesma coluna, mas na última linha de E.*)

Seja $C = [c_{ij}]$ a matriz z por n tal que

$$c_{ij} = \begin{cases} e_{ij} & \text{se } (ij) \notin \{(rl),\ (zl)\} \\ e_{rl} - f_{r,l} & \text{se } (ij) = (rl) \\ e_{zl} + f_{r,l} & \text{se } (ij) = (zl) \end{cases};$$

Passo-8. (*Neste passo, com a matriz C, comparamos a soma dos elementos da linha z com o R_z.*)

Se $\sum_{j=1}^{n} c_{zj} < R_z$, repetimos o processo começando no Passo-5., com $E = [e_{ij}] = C$.

Caso contrário, ou seja, se $\sum_{j=1}^{n} c_{zj} = R_z$, vamos para o Passo-9.;

Passo-9. (*Neste passo, limitamo-nos a remover a última linha da matriz, para reiniciarmos ou terminarmos o algoritmo.*)

Se $z > 2$, construímos a matriz G, do tipo $(z-1)$ por n obtida de C removendo a última linha. Repetimos o processo, começando no Passo-3., com $E = [e_{ij}] = G$.

Caso contrário, ou seja, se $z = 2$, colocamos em C as linhas removidas em cada aplicação do Passo-9. e o algoritmo termina. □

Para terminar, vamos ilustrar este algoritmo com um exemplo.

Exemplo 5.1 *Tal como no* Exemplo 4.2*, seja* $R = (7,7,6,5)$*,* $S = (6,5,5,5,4)$ *e* $p = 3$*. Como vimos,*

$$\overline{A_S} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iniciemos o algoritmo com esta matriz. Temos,

$$\sum_{j=1}^{5} a_{4,j} = 0, \qquad R_4 = 5.$$

De acordo com o algoritmo, o par $(2,5)$ *é o maior par (pela relação de ordem lexicográfica) tal que* $a_{25} = 1 \neq 0$ *e* $a_{45} = 0 \neq p = 3$*. Então,*

$$f_{2,5} = \min\{3-0, 1, 5-0\} = 1,$$

e obtemos a matriz

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pelo Passo-8., e porque $\sum_{j=1}^{5} c_{4j} = 1 < R_4 = 5$, *repetimos o processo, começando no Passo-5., com a matriz* $E = C$.

Com esta nova aplicação do algoritmo, temos $f_{2,4} = 2$ *e uma nova matriz* C *surge,*

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pelo Passo-8., e uma vez que $\sum_{j=1}^{5} c_{4j} = 3 < R_4 = 5$, *repetimos novamente este processo, começando no Passo-5., com a matriz* $E = C$.

Desta vez, obtemos $f_{2,3} = 2$ *e a nova matriz*

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pelo Passo-8., e uma vez que $\sum_{j=1}^{5} c_{4j} = 5 = R_4 = 5$, *vamos para o Passo-9., ou seja, removemos a última linha de* C *e repetimos o processo, começando no Passo-3., com a matriz*

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Repetindo três vezes o processo de Passo-5. a Passo-8., obtemos a matriz

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pelo Passo-8., e porque $\sum_{j=1}^{5} c_{3j} = 6 = R_3 = 6$, *vamos para o Passo-9., que nos leva a remover a última linha de* C *e a repetirmos o processo, começando no Passo-3., com a matriz*

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Repetindo três vezes o processo de Passo-5. a Passo-8., obtemos a matriz

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pelo Passo-8., e porque $\sum_{j=1}^{5} c_{2j} = 7 = R_2 = 7$ *vamos para o Passo-9., onde uma vez que o número de linhas desta matriz é dois, o algoritmo termina. Colocando nesta última matriz as linhas removidas em cada aplicação do Passo-9., obtemos a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

que é uma matriz de $\mathcal{A}^{(3)}(R,S)$.

Esquematizando a construção desta matriz A*, temos*

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc} 3 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc} 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Pelo que a matriz de $\mathcal{A}^{(3)}(R,S)$ *construída por este algoritmo é a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\square$

Referências

[1] R.A. Brualdi, Combinatorial matrix classes, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, vol. 108: Cambridge University Press, Cambridge (2006).

[2] J.A. Dias da Silva e A. Fonseca, Constructing integral matrices with given line sums, *Linear Algebra App.*, 431: 1553-1563 (2009).

[3] R. Fernandes and H.F. da Cruz, Algoritmo de construção de matrizes de zeros e uns com soma das filas prescritas, *Boletim da Sociedade Portuguesa da Matemática*, 70: 1-14 (2014).

[4] R. Fernandes and H.F. da Cruz, A canonical construction for nonnegative integral matrices with given line sums, *Linear Algebra App.*, 484; 304-321 (2015).

[5] D. Gale, A theorem on flows in networks, *Pacific J. Math*, 7: 1073-1082 (1957).

[6] L. Mirsky, Combinatorial theorems and integral matrices, *J. Combin. Theory*, 5: 30-44 (1968).

[7] L. Mirsky, Transversal Theory, *Academic Press*, New York (1971).

[8] H. J. Ryser, Combinatorial properties of matrices of zeros and ones, *Canad. J. Math*, 9: 371-377 (1957).