Sobre um resultado de Emil Artin

Dinamérico P. Pombo Jr.
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Caixa Postal 68530
21945-970 Rio de Janeiro, Brasil
e-mail: `dpombo@terra.com.br`

Resumo: Um teorema clássico sobre valorizações em corpos, devido a E. Artin, é estendido a valorizações em anéis de divisão.

Abstract A classical theorem of E. Artin concerning valuations on fields is extended to valuations on division rings.

palavras-chave: Valorizações, anéis de divisão.

keywords: Valuations, division rings.

Em [2] discutimos alguns resultados básicos sobre a noção de valorização em um anel de divisão. Nesta nota, complemento natural ao referido trabalho, estendemos o Teorema 10 da página 16 de [1] a valorizações em um anel de divisão. Mas, antes de enunciar o resultado que pretendemos provar, lembremos que se $\mathbb{K}$ é um anel de divisão arbitrário e C é um número real, então uma aplicação

$$|\cdot|\colon \mathbb{K} \to \mathbb{R}$$

é uma *C-valorização* em $\mathbb{K}$ quando as seguintes condições são satisfeitas para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

(a) $|\lambda| > 0$ se $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ e $|0| = 0$;

(b) $|\lambda\mu| = |\lambda|\,|\mu|$;

(c) a relação $|\lambda| \leq 1$ implica $|1 + \lambda| \leq C$.

É claro que $1 = |1| \leq C$. Logo, $|2| = |1 + 1| \leq C$, e

$$\max\{1, |2|\} \leq C.$$

Podemos agora enunciar o resultado prometido, o qual assegura que cada C-valorização $|\cdot|$ é uma D-valorização para algum número real $D \leq C$ dependendo de $|\cdot|$. Mais precisamente, temos o seguinte

Teorema. *Se $|\cdot|$ é uma C-valorização em um anel de divisão $\mathbb{K}$, então $|\cdot|$ é uma $\max\{1, |2|\}$-valorização em $\mathbb{K}$.*

Demonstração. Se $|\cdot|$ é não arquimediana, isto é, se $C = 1$ é permissível para $|\cdot|$, tem-se $|2| \leq \max\{|1|, |1|\} = 1$ em vista da Proposição 12 de [2], de modo que $1 = \max\{1, |2|\}$.

Admitamos, agora, que $|\cdot|$ seja arquimediana (isto é, não seja não arquimediana). Então, pela proposição a qual acabamos de nos referir, a característica de $\mathbb{K}$ é zero; logo, $\mathbb{K}$ contém o corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Como a restrição de $|\cdot|$ a $\mathbb{Q}$ é uma valorização arquimediana, um célebre teorema de Ostrowski ([1], pp. 11-12) garante a existência de um número real $\beta > 0$ tal que

$$|q| = \left(|q|_\infty\right)^\beta$$

para todo $q \in \mathbb{Q}$, onde $|\cdot|_\infty$ designa a valorização usual em $\mathbb{Q}$. Por outro lado, a Proposição 8 de [2] fornece

$$|\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{2^r}| \leq C^r \max\{|\lambda_i|; 1 \leq i \leq 2^r\}$$

para todo inteiro $r \geq 1$ e para quaisquer $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2^r} \in \mathbb{K}$.

Agora, sejam $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ tal que $|\lambda| \leq 1$ e r um inteiro ≥ 1, e ponhamos $n = 2^r - 1$. Então

$$\begin{aligned}|1+\lambda|^n = |(1+\lambda)^n| = \left|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k\right| &\leq C^r \max\left\{\left|\binom{n}{k}\right| |\lambda|^k; 0 \leq k \leq n\right\} \\ \leq C^r \max\left\{\left|\binom{n}{k}\right|; 0 \leq k \leq n\right\} &= C^r \max\left\{\binom{n}{k}^\beta; 0 \leq k \leq n\right\}.\end{aligned}$$

Além disso, como

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$

segue que $\binom{n}{k} \leq 2^n$, e $\binom{n}{k}^\beta \leq 2^{\beta n}$ $(0 \leq k \leq n)$. Portanto,

$$|1+\lambda|^n \leq C^r\, 2^{\beta n} = C^r \left(2^\beta\right)^n,$$

o que implica

$$|1+\lambda| \leq C^{\frac{r}{n}}\, 2^\beta = C^{\frac{r}{2^r-1}}\, 2^\beta.$$

Daí, em vista da arbitrariedade de r, resulta que

$$|1+\lambda| \leq 2^\beta.$$

Finalmente, como $|2| = 2^\beta > 1$, tem-se $2^\beta = \max\{1, |2|\}$, concluindo assim a demonstração.

Cabe aqui frisar que a demonstração do teorema fornece explicitamente: $\max\{1, |2|\} = 1$ se $|\cdot|$ é não arquimediana e $\max\{1, |2|\} = |2|$ se $|\cdot|$ é arquimediana.

Gostaríamos de concluir mencionando que a referida demonstração segue a filosofia daquela de E. Artin, apesar de um argumento importante usado nesta última não ser aplicável ao nosso caso.

Referências

[1] E. Artin, Algebraic Numbers and Algebraic Functions, New York University, 1951.

[2] D.P. Pombo Jr., A noção de valorização em um anel de divisão, Bol. Soc. Port. Mat. 69, Outubro de 2013, 21-26 (http://revistas.rcaap.pt/boletimspm/article/view/3853).