

# A CONJETURA DA CENSURA CÓSMICA FORTE: UNICIDADE GLOBAL PARA AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN

*João L. Costa*<sup>1</sup>

Instituto Universitário de Lisboa - ISCTE / CAMGSD - ULisboa  
Av. das Forças Armadas  
1649-026 Lisboa, Portugal  
e-mail: jlca@iscte.pt

**Resumo:** Neste artigo, começaremos por argumentar que a noção de determinismo em relatividade geral se reduz ao problema de unicidade global para as equações de Einstein. Nesse contexto, o efeito de desvio para o azul leva-nos então à conjectura da censura cósmica forte. Depois de discutirmos as dificuldades em obter uma formulação precisa para essa conjectura, motivamos um problema de valor inicial específico para o sistema Einstein-Maxwell-campo escalar, em simetria esférica, como ponto de partida para a investigação da censura cósmica. Em seguida, apresentamos resultados recentes, obtidos pelo autor em colaboração com P. Girão, J. Natário e J. D. Silva. Finalizamos, discutindo as implicações desses resultados para a censura cósmica.

**Abstract** We will argue that the notion of determinism in general relativity reduces to the question of global uniqueness for the Einstein equations. In that context, the blue shift effect then leads us to the strong cosmic censorship conjecture. After discussing the difficulties in obtaining a precise formulation for the conjecture at hand, we motivate the study of a particular characteristic initial valued problem for the Einstein-Maxwell-scalar field system, in spherical symmetry, as a model problem to study cosmic censorship. Recent results, obtained by the author in collaboration with P. Girão, J. Natário and J. D. Silva, are then presented. We finish by discussing the potential consequences of these results to strong cosmic censorship.

**palavras-chave:** equações de Einstein; problema de valor inicial; censura cósmica.

**keywords:** Einstein equations; initial values problem; cosmic censorship.

---

<sup>1</sup>This work was partially supported by FCT/Portugal through UID/MAT/04459/2013.

## 1 Determinismo e unicidade global

A análise da estrutura global das soluções de Kerr e de Reissner-Nordström<sup>2</sup> põe em causa o carácter determinístico da relatividade geral. Visto que esta situação perturbante se revela de forma semelhante para ambas as famílias de soluções, vamos descrevê-la no contexto das métricas de Reissner-Nordström para assim podermos tomar partido da sua simetria esférica. No entanto, devemos ter presente que os buracos negros de Kerr, matematicamente mais ricos e exigentes, são considerados mais relevantes do ponto de vista astrofísico e que, assim sendo, o nosso objectivo deverá eventualmente ser o da compreensão do processo de colapso gravitacional que leva à sua formação.

Em particular, a simetria esférica permite-nos uma descrição global da estrutura causal da situação em causa através do diagrama de Penrose da Figura 1, que passamos agora a descrever: Sendo as equações de Einstein essencialmente hiperbólicas, um contexto natural para a relatividade geral é o da evolução da geometria do espaço-tempo e do seu conteúdo de energia e matéria a partir dum problema de valor inicial (PVI). Consideremos então que queremos determinar uma dada métrica de Reissner-Nordström, não pertencente à subfamília de Schwarzschild e com constante cosmológica<sup>3</sup> nula, nesse contexto. Para tal, começamos por especificar os dados iniciais correspondentes (métrica induzida, segunda forma fundamental e carga eléctrica não nula) ao longo duma superfície de Cauchy do tipo espaço, por exemplo a superfície  $\Sigma$ , que podemos tomar como o instante inicial para o nosso problema. Em seguida, fazemos evoluir esses dados através dum sistema Einstein-matéria apropriado; a escolha mais simples corresponde ao sistema Einstein-Maxwell. O desenvolvimento maximal  $(\mathcal{M}, g)$ <sup>4</sup> corresponde então à região sombreada. No entanto, nada nos impede de escolher, de forma altamente não única, novos dados transversais à superfície denotada por  $\mathcal{CH}^+$  e através da sua evolução estender o desenvolvimento maximal a uma variedade Lorentziana  $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g})$ . A fronteira de  $\mathcal{M}$  na extensão designa-se por horizonte de Cauchy  $\mathcal{CH}^+$ . Esta quebra de unicidade global

<sup>2</sup>Recorde que enquanto as primeiras descrevem buracos negros estacionários em rotação, as segundas modelam buracos negros estáticos eletricamente carregados; recorde ainda que as soluções de Schwarzschild, que descrevem buracos negros estáticos e sem carga, se podem obter a partir das anteriores por anulação do momento angular e da carga, respetivamente.

<sup>3</sup>A constante cosmológica ( $\Lambda$ ) é o coeficiente de ordem zero das equações de Einstein (2).

<sup>4</sup>Note que o desenvolvimento maximal é único no sentido em que dada uma solução  $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g})$  do PVI em causa, existe uma imersão  $\iota : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}$  que é uma isometria na sua imagem, i.e.,  $\iota^*g = \tilde{g}$ .

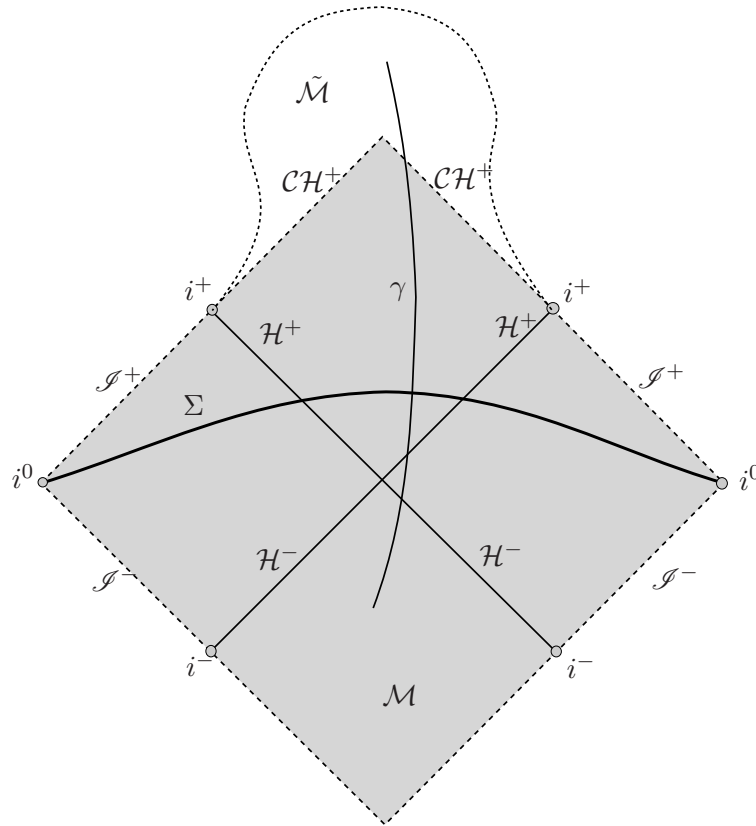


Figura 1: Diagrama de Penrose da solução de Reissner-Nordström  $(\mathcal{M}, g)$  e de uma sua possível extensão  $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g})$ .

corresponde a uma quebra de determinismo: as extensões não são determinadas pelos dados iniciais prescritos em  $\Sigma$ . Por exemplo, um observador  $\gamma$  (curva do tipo tempo orientada para o futuro) que entre no buraco negro irá inevitavelmente atingir o horizonte de Cauchy, em tempo próprio finito, sem que isso corresponda ao fim da sua existência; de facto a curva  $\gamma \cap \mathcal{M}$  é extensível para o futuro, em  $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g})$ , no entanto, a partir do acontecimento  $\gamma \cap \mathcal{CH}^+$ , a história do nosso observador não pode ser prevista pelas equações de Einstein, a partir dos dados em  $\Sigma$ .

De notar que a situação Schwarzschildiana, onde qualquer observador que entre no buraco negro será inevitavelmente destruído na aproximação à

singularidade  $r = 0$ , através da qual não há sequer extensões com métrica contínua [23], é melhor do ponto de vista da salvaguarda do determinismo.

Concentremo-nos agora, com fizeram Simpson e Penrose em [24], no que se passa numa vizinhança de um dos pontos  $i^+$  da Figura 1 e consideremos (ver Figura 2) dois observadores:  $\gamma$  que se mantém para sempre na região

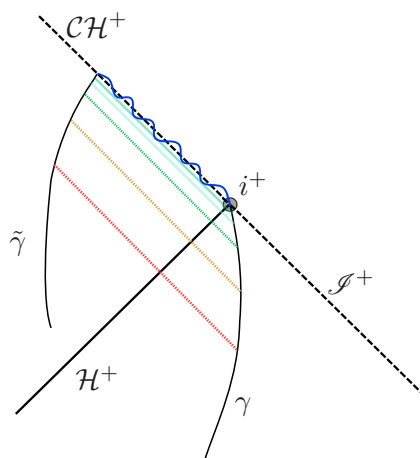


Figura 2: O efeito de desvio para o azul.

exterior e  $\tilde{\gamma}$  que entra no buraco negro e encontra inevitavelmente o horizonte de Cauchy. O facto fundamental a reter desde já é que enquanto  $\tilde{\gamma}$  tem comprimento (Lorentziano) finito,  $\gamma$  tem comprimento (Lorentziano) infinito. Assim sendo, se  $\gamma$  decidir enviar sinais a  $\tilde{\gamma}$  em intervalos de tempo constantes, como medidos pelo seu relógio, acabará por enviar uma quantidade infinita de sinais. Todos esses sinais chegarão a  $\tilde{\gamma}$  num intervalo de tempo finito, como medido pelo seu relógio, o que portanto corresponderá a um aumento ilimitado da frequência (desvio infinito para o azul) medida por  $\tilde{\gamma}$ . Esta ideia tornou então plausível a seguinte expectativa: qualquer perturbação, por mais insignificante, dos dados iniciais de Reissner-Nordström será infinitamente amplificada pelo mecanismo de desvio para o azul. Essa divergência levará então à formação duma singularidade, i.e., uma “barreira” através da qual não é possível estender o espaço-tempo. A situação descrita pela Figura 1 seria então instável e desprovida de significado físico. Uma versão, mais subtil, de determinismo (unicidade global) poderia ainda subsistir. Eventualmente estas ideias foram substanciadas na conjectura:

## Censura Cósmica Forte:

*“Genericamente“, o desenvolvimento maximal  $(\mathcal{M}, g)$ , de problemas de valor inicial “apropriados“ para as equações de Einstein, é inextensível como variedade Lorentziana “suficientemente regular“.*

O primeiro grande desafio desta conjectura é a obtenção de uma formulação precisa para a mesma. É de notar que, apesar da formulação apresentada ainda conter três adjetivos vagos, realçados por aspas, ela corresponde a um considerável e relativamente recente <sup>5</sup> avanço conceptual que advém da historicamente difícil mudança de paradigma que colocou a análise das equações de Einstein enquanto equações diferenciais parciais no centro da censura cósmica em detrimento da teoria da causalidade <sup>6</sup>, cujos notáveis sucessos haviam tornado preponderante.

Outra atitude a ter em relação a esta conjectura é a de a encarar, não como uma conjectura clássica em matemática, que, caso decidível, será ou verdadeira ou falsa, mas antes como um programa de investigação: *dado um problema de valor inicial para as equações de Einstein, estudar a existência e regularidade de extensões do seu desenvolvimento maximal.*

Para estabelecer teoremas relacionados com a censura cósmica forte é inevitável clarificar a adjectivação utilizada na formulação apresentada:

Se tomarmos o disco  $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1$ , em  $\mathbb{R}^3$ , com a métrica Euclidiana e segunda forma fundamental nula como dados iniciais para as equações de Einstein-vácuo,  $R_{\mu\nu} = 0$ , então o desenvolvimento maximal corresponderá a  $(\mathcal{D}, \eta)$ , com  $\mathcal{D} = \{r - 1 < t < -r + 1\}$  e  $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ , a métrica de Minkowski. Não só este desenvolvimento é claramente extensível, como qualquer perturbação suficientemente pequena dos dados iniciais, dentro da classe de dados de vácuo, levará, por estabilidade de Cauchy, a um novo desenvolvimento maximal  $(\mathcal{D}, g)$  que admite extensões  $(\tilde{\mathcal{D}}, \tilde{g})$  com métrica tão regular como os dados iniciais o permitirem. A existência destas extensões “suficientemente regulares“ é então uma propriedade genérica, i.e., uma propriedade dos desenvolvimentos associados a um aberto do espaço de dados iniciais de vácuo. A origem da patologia neste caso é clara e consequência da artificialidade da superfície inicial considerada; aprendemos então que a noção de PVI “apropriado“ deve exigir que a superfície inicial  $(\Sigma, g_0)$  seja completa. Este critério não é, no entanto, suficiente: se

<sup>5</sup>Tanto quanto sabemos a primeira formulação explícita nestes termos só surgiu em [4], 26 anos após a descoberta do efeito de desvio para o azul [24].

<sup>6</sup>Para uma breve introdução a alguns conceitos fundamentais em relatividade, incluindo tópicos da teoria da causalidade, aconselhamos [18] nesta mesma edição do boletim da SPM.

considerarmos agora como superfície inicial o hiperbolóide de  $\mathbb{R}^4$  de equação  $t = -\sqrt{1+r^2}$  e  $g_0$  a métrica induzida pela métrica de Minkowski, então os problemas anteriores reaparecem mas agora com  $\mathcal{D} = \{(t, x_i) \in \mathbb{R}^4 \mid t < r\}$ . Esta última dificuldade pode ser ultrapassada exigindo que a superfície inicial seja assintoticamente plana <sup>7</sup>; esta noção está em geral associada ao estudo das equações de Einstein com constante cosmológica nula,  $\Lambda = 0$ . Para  $\Lambda > 0$  a classe de superfícies iniciais fechadas (compactas e sem bordo) parece ser suficiente para cobrir as aplicações mais relevantes e para  $\Lambda < 0$  teremos ainda novos desafios pela necessidade de ter de definir condições de fronteira no infinito.

A discussão anterior teve como intuito ilustrar a dificuldade em definir geometrias apropriadas para o problema de valor inicial. No entanto, a noção de PVI “apropriado” esconde ainda a dificuldade em determinar quais são os sistemas Einstein-matéria “razoáveis” no contexto da censura cósmica. À partida, o lado direito das equações de Einstein (2), ou a “parte de madeira” como Einstein descrevia depreciativamente, ao contrário do lado esquerdo, ou “parte de mármore”, pode ser prescrita livremente: escolha a sua métrica Lorentziana preferida, introduza-a no lado esquerdo de (2) e use a equação para definir o tensor de energia-momento  $T_{\mu\nu}$ . Condições de energia, procurando restringir a escolha de  $T_{\mu\nu}$  a partir de critérios físicos gerais, não serão com certeza suficientes para resolver o problema; não podemos deixar que o sucesso dos Teoremas de Incompletude Geodésica (Teoremas de Singularidades [18]) criem expectativas excessivas. Para um modelo de matéria ser considerado “razoável” teremos, no mínimo, de exigir que o correspondente sistema Einstein-matéria conduza a um problema de evolução bem posto <sup>8</sup>. Mas estes critérios, apesar de necessários, não são ainda suficientes. O caso dos fluídos perfeitos sem pressão (poeira) é paradigmático: para além de formarem singularidades que não estão necessariamente relacionadas com o processo de colapso gravitacional, i.e., que se formam mesmo no problema desacoplado, levam ainda à formação de singularidades onde a densidade se torna infinita, mas onde a pressão se mantém nula por definição! Este modelo de matéria deve ser considerado como patológico e, portanto, como estando fora da jurisdição do nosso censor cósmico que não pode ser responsabilizado pelo comportamento da matéria em situações onde os limites

<sup>7</sup> $(\Sigma, g_0)$  diz-se assintoticamente plana se  $\Sigma$  é difeomorfa à união duma variedade compacta com um número finito de abertos de  $\mathbb{R}^3$  da forma  $r > R_i$ , com  $R_i > 0$ , e se em cada um desses abertos  $\lim_{r \rightarrow \infty} \|g_0 - \delta\| = 0$ , onde  $\delta$  é a métrica Euclidiana e  $\|\cdot\|$  é uma norma apropriada.

<sup>8</sup>Isto é, que haja a garantia de existência, unicidade e dependência contínua das condições iniciais, para o correspondente PVI.

que justificam o seu modelo são infinitamente transpostos. Um exemplo no outro sentido é fornecido pela formação de choques em fluidos compressíveis governados pelas equações de Euler: de facto, apesar destes choques corresponderem a uma região terminal de validade das soluções clássicas, devido à divergência de quantidades fundamentais à avaliação pontual das equações, existem outras noções de solução, designadas por soluções fracas, que se estendem através dos choques e são univocamente determinadas pelas equações. Se, para além do mais, o acoplamento à gravidade através do sistema Einstein-Euler determinar univocamente (como solução fraca) a geometria do espaço-tempo, então a escolha de “suficientemente regular” na formulação da censura cósmica deverá ser feita de forma a não suprimir estas soluções.

Parece claro que será muito difícil obter um critério geral para a razoabilidade dum modelo de matéria no contexto da censura cósmica. Provavelmente, não fora o já referido sucesso dos Teoremas de Incompletude Geodésica e a questão nem se colocaria em termos tão gerais: a resolução da conjectura para o caso das equações de vácuo seria por si só uma conquista notável. Outra perspectiva relevante vira a questão ao contrário e, partindo do princípio que o determinismo numa teoria física é irrevogável, transforma a censura cósmica num critério de validação dum dado modelo de matéria, de facto de toda a teoria.

Existem várias propostas para o conceito de genericidade. Na abordagem mais popular, uma propriedade diz-se genérica se for comum a todos os desenvolvimentos maximais dum conjunto aberto e denso do espaço dos dados iniciais. A dificuldade é assim transferida para a determinação duma topologia apropriada nesse espaço. Em [3], Christodoulou estabelece censura cósmica para o sistema Einstein-campo escalar, em simetria esférica, mostrando que o conjunto de soluções com extensões contínuas advém de dados iniciais contidos num espaço de co-dimensão um; assim sendo, Christodoulou evita por completo a necessidade de definir uma topologia. Em [22], Ringström estabeleceu censura cósmica forte para as equações de vácuo, em  $\mathbb{T}^3$ -Gowdy, provando que as soluções que não admitem extensões  $C^2$  correspondem a um conjunto aberto e denso para a topologia  $C^\infty$  no espaço de dados iniciais.

Chegamos finalmente à noção de extensão “suficientemente regular” que terá um papel fundamental neste artigo e que discutiremos apenas ao nível da métrica (ver [7] para uma discussão mais aprofundada deste tema). As noções mais usadas na literatura correspondem a duas noções extremas de regularidade:  $C^2$  e  $C^0$ .

A motivação para a primeira está associada à ordem das equações de Einstein e ao facto da divergência do escalar de Kretschmann  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ , uma medida das forças de maré, garantir inextensibilidade da métrica em  $C^2$ . No entanto, sendo claro que um falhanço da censura cósmica a este nível de regularidade forneceria um grande argumento contra o carácter determinístico da relatividade geral, um sucesso, apesar de notável, não seria um argumento igualmente forte na defesa do determinismo da teoria: como discutido anteriormente, existem soluções fracas das equações de Einstein de grande relevância e cujo grau de regularidade está bem abaixo de  $C^2$ .

Inextensibilidade em  $C^0$  surge na formulação inicialmente proposta por Christodoulou [4]. Corresponde a uma versão muito forte de determinismo e está em consonância com o que se passa no interior dos buracos negros de Schwarzschild.

Acontece que nenhum dos critérios anteriores é suficiente para captar a subtilidade do problema. Como vamos ver mais à frente, existem grandes classes de soluções que admitem extensões em  $C^0 \setminus C^2$ . Se o nosso objectivo é uma resposta definitiva para a questão do determinismo estes exemplos mostram que estamos do “lado errado” de ambas as noções de regularidade discutidas.

Como resposta a esta situação, Christodoulou [5] sugeriu “inextensível com coeficientes de conexão de quadrado integrável” para a formulação da censura cósmica. A verificação deste critério seria suficiente para garantir que nenhuma extensão pode existir como solução fraca das equações de Einstein, salvando-se assim uma versão de determinismo para a teoria. Algum tempo antes, Chruściel [6] já tinha debatido a mesma questão a este nível de regularidade e, assim sendo, vamo-nos referir ao critério anterior como o critério de Christodoulou-Chruściel ou, em alternativa, o critério  $\Gamma \in L^2$ .

## 2 Existência global para o sistema Einstein-Maxwell-campo escalar com constante cosmológica.

### 2.1 Enquadramento e motivação

A censura cósmica é uma questão sobre o comportamento global de grandes classes de soluções das equações de Einstein. Devido à complexidade destas, antes de atacar o problema geral, é aconselhável começar por um problema mais simples, com simetrias que reduzam as equações a um sistema hiperbólico em  $1+1$  dimensões. Aqui vamos restringir-nos a soluções esfericamente

simétricas assumindo que a métrica do nosso espaço-tempo tem a forma

$$g = -\Omega^2(u, v)du dv + r^2(u, v)\sigma_{\mathbb{S}^2}, \quad (1)$$

onde  $\sigma_{\mathbb{S}^2}$  é a métrica da esfera redonda.

A nossa principal motivação é a censura cósmica para as equações de vácuo com constante cosmológica ( $\Lambda$ ) e nesse contexto o estudo da estabilidade do horizonte de Cauchy das soluções de Kerr (assimptoticamente planas, de Sitter ou anti-de Sitter). Como estas últimas não são esfericamente simétricas, vamos considerar em alternativa as soluções de Reissner-Nordström; para tal temos de acrescentar ao nosso tensor de energia-momento (3) um campo electromagnético  $F_{\mu\nu}$ , satisfazendo as equações de Maxwell (5); nas palavras de John Wheeler “charge is a poor man’s angular momentum“. Sucede que, como consequência do Teorema de Birkhoff [25], o electro-vácuo não tem graus de liberdade dinâmica e, assim sendo, vemo-nos forçados a acrescentar matéria ao nosso problema. O mais simples dos modelos de matéria que não exhibe as patologias da poeira, discutidas anteriormente, é o campo escalar sem massa ( $\phi$  em (3)). Para além do mais, o campo escalar satisfaz uma equação de onda (4) o que cria uma forte ligação às equações de vácuo sem simetrias.

Somos então levados a considerar o seguinte sistema de equações:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 2T_{\mu\nu}, \quad (2)$$

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi g_{\mu\nu} + F_{\mu\alpha}F_\nu^\alpha - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}, \quad (3)$$

$$\square_g\phi = 0, \quad (4)$$

$$dF = d^*F = 0, \quad (5)$$

onde  $\square_g\phi = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\partial_\nu\phi$  e  $*F$  é o dual do campo electromagnético pelo operador estrela de Hodge associado à métrica  $g$ .

Note-se que o campo escalar e o campo electromagnético só estão relacionados através da geometria. Como consequência da simetria esférica o campo electromagnético é então simplesmente o campo associado a uma carga constante  $Q = 4\pi e$ . Como não estamos interessados no caso Schwarzschildiano, que não admite extensões regulares para começar, temos de impor  $e \neq 0$ . Note que isto é possível, apesar de estarmos a considerar as equações de Maxwell sem fontes, desde que a topologia do espaço-tempo admita esferas que não são homólogas a um ponto; a carga diz-se então topológica.

Se introduzirmos o invariante escalar  $\varpi$  através da identidade

$$1 - \mu := 1 - \frac{2\varpi}{r} + \frac{e^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2 = g(\nabla r, \nabla r), \quad (6)$$

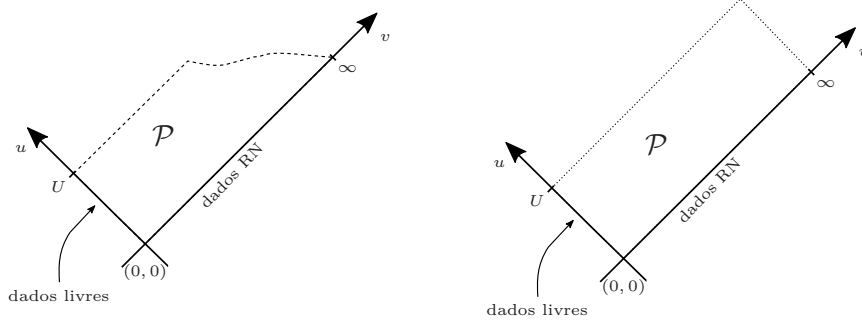


Figura 3: O nosso PVI.

conhecido por massa de Hawking (renormalizada) e cujos méritos se vão tornar aparentes, as equações Einstein-Maxwell-campo escalar reduzem-se ao seguinte sistema

$$\partial_u \partial_v \phi = -\frac{\partial_u r \partial_v \phi}{r} - \frac{\partial_v r \partial_u \phi}{r}, \quad (7)$$

$$\partial_u \partial_v r = \partial_u r \partial_v r \frac{\frac{2\varpi}{r^2} - \frac{2e^2}{r^3} - \frac{2\Lambda}{3}r}{1 - \frac{2\varpi}{r} + \frac{e^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2}, \quad (8)$$

$$\partial_u \varpi = \left(1 - \frac{2\varpi}{r} + \frac{e^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) \frac{(r\partial_u \phi)^2}{2\partial_u r}, \quad (9)$$

$$\partial_v \varpi = \left(1 - \frac{2\varpi}{r} + \frac{e^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) \frac{(r\partial_v \phi)^2}{2\partial_v r}, \quad (10)$$

uma equação de onda para o campo escalar  $\phi$ , uma equação de onda para a função raio  $r$  e a prescrição do gradiente da massa, que substituí a equação de onda para o factor conforme  $\Omega$ .

Estamos agora em condições de formular um PVI para o sistema (7)-(10) que nos vai permitir investigar a conjectura da censura cósmica forte (estabilidade do horizonte de Cauchy): Dada uma solução de Reissner-Nordström sub-extremal de referência, consideremos então dados iniciais característicos (prescritos em cones de luz) de acordo com a Figura 3. Mais precisamente, ao longo do  $v$ -eixo consideramos  $r(0, v) \equiv r_+$ ,  $\varpi(0, v) \equiv M$ ,  $\phi(0, v) \equiv 0$ , etc, onde  $r_+$  e  $M$  são, respetivamente, o raio do horizonte de acontecimentos e a massa da solução de referência. Os dados ao longo do  $u$ -eixo correspondem aos nossos graus de liberdade; de facto, a menos da fixação da coordenada  $u$ , toda a liberdade está na especificação de  $\partial_u \phi(u, 0)$ . É ainda útil começar

por fixar a coordenada  $v$  de forma a que  $\mathcal{CH}^+ = \{v = \infty\}$ , em Reissner-Nordström.

O objectivo é então: *estudar a existência de extensões “suficientemente regulares” do desenvolvimento maximal  $(\mathcal{P}, g)$  do PVI anterior.*

Este enquadramento corresponde à inclusão duma constante cosmológica  $\Lambda$  no problema estudado por Dafermos em [10]. A primeira motivação para a introdução duma constante cosmológica está relacionada com o importante papel que esta desempenha na física moderna. Mas, à partida, pode parecer que a sua inclusão não terá grande efeito no problema em estudo; neste, a região de interesse corresponde à região interior de buracos negros de Reissner-Nordström cuja estrutura não se altera significativamente com a inclusão deste termo de ordem zero nas equações. No entanto, o argumento heurístico baseado no mecanismo de desvio para o azul, o putativo responsável pela instabilidade, altera-se significativamente com a inclusão duma constante cosmológica positiva: de facto, se compararmos os diagramas de Penrose das Figuras 2 e 4 notamos que para  $\Lambda > 0$  existe um novo horizonte, o horizonte cosmológico  $\mathcal{C}^+$ , ao longo do qual existirá um efeito de desvio para o vermelho que levará à atenuação de perturbações; cria-se assim uma competição entre mecanismos que poderá resultar na estabilidade do horizonte de Cauchy.

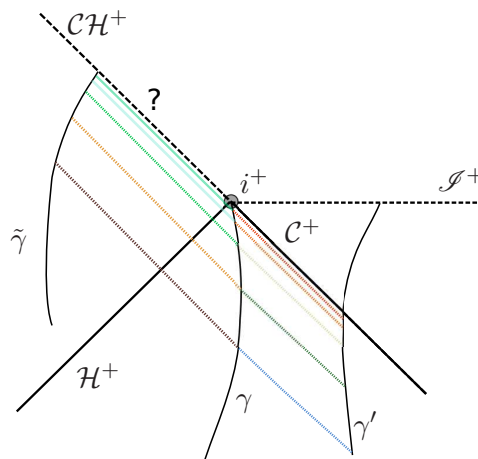


Figura 4: O efeito de desvio para o azul na presença de  $\Lambda > 0$ .

Esta revisão do mecanismo do desvio para o azul foi responsável por uma considerável atividade, durante a década de 1990, relacionada com o estudo da censura cósmica na presença duma constante cosmológica positiva. E se

os primeiros resultados [1] sugeriram a queda do censor cósmico, o debate acabou com um título taxativo [2] e uma crítica aos modelos considerados anteriormente, cujo simplismo, na opinião destes autores, não permitia que as não-linearidades das equações de Einstein actuassem a favor da censura cósmica.

Daí a nossa motivação para o estudo do problema proposto; principalmente tendo em conta que, entretanto, o estatuto da constante cosmológica se alterou consideravelmente, passando duma curiosidade teórica e histórica <sup>9</sup>, para a principal “responsável” por boa parte do conteúdo energético do universo.

## 2.2 Alguns resultados

Passemos agora à apresentação de alguns resultados relativos ao estudo do problema descrito na secção anterior:

O primeiro passo, na análise deste PVI, corresponde à construção [7] do respetivo desenvolvimento maximal  $\mathcal{P}$ ; se restringirmos a  $u$ -coordenada a  $[0, U)$ , com  $U > 0$  suficientemente pequeno,  $\mathcal{P}$  terá, a priori, uma das formas apresentadas na Figura 3. Mais ainda, à medida que nos aproximamos da fronteira de  $\mathcal{P}$  em  $[0, U) \times [0, \infty)$ , que denotamos por  $\partial_0\mathcal{P}$ , a função raio ( $r$ ) converge para zero. De notar que no diagrama da esquerda da Figura 3  $\partial_0\mathcal{P} \neq \emptyset$ , independentemente do quão pequeno se escolha  $U > 0$ ; é natural associar esta situação à imagem Schwarzschildiana, apesar da fronteira  $\partial_0\mathcal{P}$  poder, à partida, conter segmentos nulos. No diagrama da direita é possível escolher  $U$  suficientemente pequeno de forma a que  $\partial_0\mathcal{P} = \emptyset$ ; associamos este caso a uma preservação da situação descrita para Reissner-Nordström, apesar de, à partida,  $r$  poder convergir para zero quando  $v \rightarrow \infty$ .

*Estabilidade  $C^0$  do horizonte de Cauchy:* Acontece que para qualquer escolha de (dados livres)  $\partial_u\phi(\cdot, 0) \in C^0$ , com  $\phi(0, 0) = 0$ , existe  $U > 0$  tal que

$$[0, U) \times [0, \infty) \subset \mathcal{P} ,$$

e  $r_0 > 0$  tal que

$$r(u, v) > r_0 , \forall (u, v) \in [0, U) \times [0, \infty) .$$

Em particular, a situação Schwarzschildiana nunca se verifica. De facto, o controlo sobre o raio permite-nos então construir extensões  $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g}, \tilde{\phi})$  do

<sup>9</sup>Recorde que a constante cosmológica foi introduzida por Einstein, pouco tempo depois da descoberta das equações do campo, e por ele renegada após a observação da expansão do universo por Edwin Hubble [19].

desenvolvimento maximal  $(\mathcal{M} = \mathcal{P} \times_r \mathbb{S}^2, g, \phi)$ , com  $\tilde{g}$  e  $\tilde{\phi}$  contínuos. De notar que a construção destas extensões passa por uma mudança apropriada de coordenada  $\tilde{v} = f(v)$ , com contradomínio limitado, onde  $v$  é a nossa coordenada original.

Estes resultados correspondem à generalização, pela inclusão duma constante cosmológica, de resultados anteriores de Dafermos [10]. De notar que, apesar da nossa análise cobrir qualquer sinal para a constante cosmológica, as novas e consideráveis dificuldades estão principalmente associadas ao caso  $\Lambda > 0$  (ver [8]).

*Cenários de inflação de massa:* Seja

$$\rho := \frac{\kappa_-}{\kappa_+} > 1,$$

o rácio entre as gravidades de superfície dos horizontes de Cauchy e de acontecimentos da solução de referência; essas quantidades são definidas por

$$k_{\pm} = \frac{1}{2} |\partial_r(1 - \mu)(r_{\pm}, M)|,$$

onde  $1 - \mu(\cdot, M)$  é o potencial estático de Reissner-Nordström obtido a partir de (6) por substituição de  $\varpi$  pelo parâmetro de massa  $M$ .

1. *Inflação da massa.* Se  $\rho > 2$  e

$$\partial_u \phi(u, 0) \geq cu^s, \quad \text{para algum } 0 < s < \frac{\rho}{2} - 1,$$

então

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \varpi(u, v) = \infty, \quad \text{para todo o } 0 < u \leq U.$$

Para decaimentos lentos dos dados livres obtemos então *inflação da massa*. Esse processo, descoberto e batizado por Poisson e Israel [20], pode ser visto como uma quantificação do mecanismo de desvio para o azul. O controlo do raio permite-nos estimar

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} \underset{\sim_{r_0}}{\gtrsim} \varpi^2 + 1.$$

Concluimos então que a inflação da massa leva à divergência do escalar de Kretschmann e portanto à impossibilidade de obter extensões do desenvolvimento maximal de classe  $C^2$ . É ainda possível verificar [12] que, pelo menos para uma das escolhas naturais de mudança de coordenadas  $\tilde{v} = f(v)$ , como anteriormente, as extensões contínuas

construídas não admitem símbolos de Christoffel em  $L_{loc}^2$ ; é portanto presumível que o critério de Christodoulou-Chruściel se verifique neste caso, mas para tal é ainda necessário verificar que  $\Gamma \notin L_{loc}^2$  para todas as possíveis estruturas diferenciáveis (digamos  $C^2$ ) compatíveis com a estrutura inicial.

Este resultado corresponde, de novo, a uma generalização de resultados estabelecidos por Dafermos no caso  $\Lambda = 0$ .

Agora entramos em território previamente inexplorado [9].

2. *Massa finita.* Se

$$|\partial_u \phi(u, 0)| \leq cu^s, \text{ para algum } s > \frac{7\rho}{9} - 1,$$

então existe  $C > 0$  tal que

$$|\varpi(u, v)| < C, \text{ para todo o } (u, v) \in [0, U] \times [0, \infty[.$$

Mais ainda, o critério de Christodoulou-Chruściel falha, i.e.  $(\mathcal{M}, g, \phi)$  é extensível, através do horizonte de Cauchy, a  $(\hat{\mathcal{M}}, \hat{g}, \hat{\phi})$ , com  $\hat{g}$  e  $\hat{\phi}$  em  $C^0$ , símbolos de Christoffel  $\hat{\Gamma}$  em  $L_{loc}^2$ , e  $\hat{\phi}$  em  $H_{loc}^1$ .

De facto, assim que a massa está controlada, é possível verificar que todas as quantidades relevantes se estendem de forma contínua ao horizonte de Cauchy, com a possível excepção de  $\theta := \frac{r\partial_v \phi}{\partial_v r}$ .

3. *Controlando  $\theta$ .* Se

$$|\partial_u \phi(u, 0)| \leq cu^s, \text{ para algum } s > \frac{13\rho}{9} - 1,$$

então existe  $C > 0$  tal que

$$|\theta(u, v)| < C, \text{ para todo o } (u, v) \in [0, U] \times [0, \infty[.$$

A partir do momento que isto sucede, todas as quantidades relevantes são extensíveis ao horizonte de Cauchy com graus de regularidade compatíveis com o teorema de existência de soluções clássicas do nosso PVI original [7]. Podemos então completar esses dados, de forma manifestamente não única, prescrevendo dados transversais ao horizonte de Cauchy e, em seguida, construir extensões resolvendo o sistema (7)-(10). Verificamos então que  $(\mathcal{M}, g, \phi)$  se estende (de forma não única), através do horizonte de Cauchy, a uma solução (clássica e esfericamente simétrica)  $(\hat{\mathcal{M}}, \hat{g}, \hat{\phi})$  das equações de Einstein-Maxwell-campo escalar com constante cosmológica, com  $\hat{g}$  e  $\hat{\phi}$  em  $C^1$ , e escalar de Kretschmann em  $C^0$ .

### 3 Conclusão: Censura Cósmica?

As soluções com extensões regulares descritas na secção anterior são genéricas no conjunto de dados iniciais considerado (dados de Reissner-Nordström ao longo do  $v$ -eixo) e, assim sendo, podem, à primeira vista, parecer corresponder a contra-exemplos para a censura cósmica forte! No entanto, a situação é mais subtil já que não é expectável que esses dados surjam num processo de colapso gravitacional genérico.

A situação é manifestamente confusa. Para a tentar compreender melhor vamos agora concentrar-nos na Figura 1 (em particular  $\Lambda = 0$ ) e no sistema de coordenadas  $(u, v)$  fixado na prescrição do nosso PVI: os dados por nós considerados seriam genéricos se perturbações genéricas dos dados em  $\Sigma$  levassem à formação dum horizonte de acontecimentos  $\mathcal{H}^+ \subset \{u = 0\}$  que se tornaria exatamente Reissner-Nordström antes de  $i^+$  ser atingido, i.e., em tempo  $v$  finito; em particular, o campo escalar, restringido a  $\{u = 0\}$ , teria então suporte compacto em  $v$ . No entanto, vários resultados heurísticos e numéricos sugerem que, em certas situações genéricas, o campo escalar satisfaça a lei de Price [21]

$$v^{-6} \lesssim \partial_v \phi(0, v) \lesssim v^{-2} . \quad (11)$$

A numerologia exata da lei anterior parece depender de forma sensível de vários fatores e a nossa escolha deve ser considerada como essencialmente ilustrativa. Note ainda que a primeira desigualdade da lei descrita só pode almejar a ser genérica já que falha pelo menos num caso: em Reissner-Nordström temos  $\phi \equiv 0$ .

Agora, se no nosso PVI, em vez de dados estacionários (exatamente Reissner-Nordström), considerarmos dados satisfazendo a lei de Price, verificamos, de acordo com [11], que o limite superior da lei garante a estabilidade  $C^0$  do horizonte de Cauchy, enquanto que o limite inferior garante inflação da massa. Se  $\Lambda = 0$ , a lei de Price escolhe então o ponto 1, dos resultados da secção anterior, como única situação genérica a emergir de um processo de colapso gravitacional.

De realçar que o limite superior de (11) foi estabelecido em [13], para grandes classes de dados iniciais. Este resultado permitiu assim invalidar a formulação  $C^0$  da conjectura da censura cósmica forte para as equações Einstein-Maxwell-campo escalar, em simetria esférica, e  $\Lambda = 0$ . O limite inferior mantém-se um problema em aberto, mas progressos interessantes surgiram em [17], onde uma versão integral é estabelecida para a equação de onda.

Sucedem que para  $\Lambda > 0$  a lei de Price prevista toma a forma

$$\partial_v \phi \sim e^{-\Delta v}, \quad \Delta > 0. \quad (12)$$

Esta previsão cria a expectativa de que o cenário de *massa finita*, pontos 2 e 3 da secção anterior, possa ocorrer para  $\Lambda > 0$  e com ele violações severas da censura cósmica forte, por exemplo, com o incumprimento do critério de Christodoulou-Chruściel.

Entretanto, outros progressos interessantes relacionados com a censura cósmica têm vindo a ser alcançados [16, 14, 15]. Quanto ao nosso problema, a sua conclusão, com resultados certamente inesperados, já fará parte do segundo século da relatividade geral.

Feliz centenário.

## Referências

- [1] P. Brady and E. Poisson, "Cauchy horizon instability for Reissner-Nordström black holes in de Sitter space", *Class. Quantum Grav.* 9 (1992), 121-125.
- [2] P. Brady, I. Moss and R. Myers, "Cosmic censorship: as strong as ever", *Phys. Rev. Lett.* 80 (1998), 3432-3435.
- [3] D. Christodoulou, "The instability of naked singularities in the gravitational collapse of a scalar field", *Ann. Math.* 149 (1999), 183-217.
- [4] D. Christodoulou, "On the global initial value problem and the issue of singularities", *Class. Quantum Grav.* 16 A (1999), 23-35.
- [5] D. Christodoulou, *The formation of black holes in general relativity*, EMS Monographs in Mathematics, Zürich, 2009.
- [6] P.T. Chruściel, *On Uniqueness in the Large of Solutions of Einstein Equations ("Strong Cosmic Censorship")*, monograph, Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Volume 27, Australian National University (1991)
- [7] J. Costa, P. Girão, J. Natário and J. Silva, "On the global uniqueness for the Einstein-Maxwell-scalar field system with a cosmological constant. Part 1. Well posedness and breakdown criterion", *Class. Quantum Grav.* 32 (2015), 015017.

- 
- [8] J. Costa, P. Girão, J. Natário and J. Silva, "On the global uniqueness for the Einstein-Maxwell-scalar field system with a cosmological constant. Part 2. Structure of the solutions and stability of the Cauchy horizon", *Comm. Math. Phys.*, 339, 3 (2015) 903-947.
- [9] J. Costa, P. Girão, J. Natário and J. Silva, "On the global uniqueness for the Einstein-Maxwell-scalar field system with a cosmological constant. Part 3. Mass inflation and extendibility of the solutions, (2014) arXiv:1406.7261.
- [10] M. Dafermos, "Stability and instability of the Cauchy horizon for the spherically symmetric Einstein-Maxwell-scalar field equations", *Ann. Math.* 158 (2003), 875-928.
- [11] M. Dafermos, "The interior of charged black holes and the problem of uniqueness in general relativity", *Comm. Pure Appl. Math.* 58 (2005), 445-504.
- [12] M. Dafermos, "Black holes without spacelike singularities", *Commun. Math. Phys.* 332 (2014), 729-757 (arXiv:1201.1797)
- [13] M. Dafermos and I. Rodnianski, "A proof of Price's law for the collapse of a self-gravitating scalar field", *Invent. Math.* 162 (2005), 381-457.
- [14] A. Franzen, "Boundedness of massless scalar waves on Reissner-Nordström interior backgrounds", arXiv:1407.7093.
- [15] D. Gajic, "Linear waves in the interior of extremal black holes", arXiv:1509.06568.
- [16] J. Luk, "Weak null singularities in general relativity", arXiv:1311.4970.
- [17] J. Luk, S. -J. Oh, "Proof of linear instability of the Reissner-Nordström Cauchy horizon under scalar perturbations", arXiv:1501.04598.
- [18] J. Natário, "Relatividade e Singularidades – Uma breve Introdução para Matemáticos", Boletim da SPM 73, Novembro 2015, 100 Anos de Relatividade.
- [19] A. Pais, *Sútil é o senhor - Vida e Pensamento de Albert Einstein*, Gradiva, Lisboa, 1999.
- [20] E. Poisson and W. Israel, "Inner-horizon instability and mass inflation in black holes", *Phys. Rev. Lett.* 63 (1989), 1663-1666.

- [21] R. Price, Nonspherical perturbations of relativistic gravitational collapse. 1. Scalar and gravitational perturbations, *Phys. Rev. D* 5 (1972), 2419-2438.
- [22] H. Ringström, "Strong cosmic censorship in T3-Gowdy spacetimes", *Ann. Math.* 170 (2009), 1181-1240.
- [23] J. Sbierski, "The  $C^0$ -inextendibility of the Schwarzschild spacetime and the spacelike diameter in Lorentzian Geometry", arXiv:1507.00601.
- [24] M. Simpson and R. Penrose, "Internal instability in a Reissner-Nordström black hole", *Int. J. Theor. Phys.* 7 (1973), 183-197.
- [25] K. Schleich, D. M. Witt, "A simple proof of Birkhoff's theorem for cosmological constant", *J.Math.Phys.* 51 (2010) 112502 (arXiv:0908.4110).