

# Análise e Equações com Derivadas Parciais

*Editor Convidado:* Luís Trabucho

*Telma Guerra & Jorge Tiago*

Aplicação de problemas de controlo a uma estenose idealizada ..... 9

*Hermenegildo Borges de Oliveira*

Escoamentos de mantos de gelo em climas polares ..... 13



# APLICAÇÃO DE PROBLEMAS DE CONTROLO A UMA ESTENOSE IDEALIZADA

*Telma Guerra*

Escola Superior de Tecnologia do Barreiro (IPS)  
e-mail: [telma.guerra@estbarreiro.ips.pt](mailto:telma.guerra@estbarreiro.ips.pt)

*Jorge Tiago*

Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa  
e-mail: [jftiago@math.ist.utl.pt](mailto:jftiago@math.ist.utl.pt)

**Resumo:** Neste trabalho apresentamos, de forma sucinta, simulações numéricas de fluidos, de problemas do tipo Assimilação de Dados numa abordagem variacional. Apresentamos resultados aplicados à Hemodinâmica considerando uma geometria tridimensional na forma de uma estenose idealizada e recuperamos o perfil da velocidade do sangue nesta geometria.

**Abstract:** In this work, numerical simulations of fluids of Data Assimilation problems in a variational approach are briefly presented. We obtain some results applied to Hemodynamics in a 3D idealized stenosis and we recover the blood velocity profile in this geometry.

**palavras-chave:** Controlo óptimo; Hemodinâmica; Equações de Navier-Stokes generalizadas.

**keywords:** Optimal control; Hemodynamics; Generalized Navier-Stokes equations.

## 1 Introdução

As simulações numéricas de fluidos, e em particular aplicadas à circulação do sangue, aliadas ao avanço nas técnicas de imagiologia, constituem uma poderosa ferramenta na prevenção de doenças e eventualmente no seu tratamento. A introdução de dados médicos reais nas simulações vem torná-las mais realistas e mais precisas do ponto de vista das aplicações. Este procedimento em que se inclui dados conhecidos nas simulações tem o nome de Assimilação de Dados (DA) e, ainda que recentes, existem agora alguns trabalhos que aplicam estas técnicas à modelação de fluidos [1, 2, 3]. Neste trabalho consideramos dados gerados artificialmente através da resolução das equações que modelam o fluido, as equações de Navier-Stokes, que são equações diferenciais às derivadas parciais.

Apresentamos um funcional de custo diferente do habitual que contém um termo relacionado com a componente tangencial da tensão na parede do vaso (WSS) com a forma de uma estenose idealizada tridimensional.

## 2 Descrição do Problema

O objectivo é obter soluções numéricas que nalgumas partes do domínio ( $\Omega_{part}$ ) são iguais, a menos de um determinado erro pré-definido, aos dados observados. Para isso definimos um critério a otimizar, o que corresponde a resolver um problema de controlo. Neste trabalho consideramos como critério a velocidade do sangue. Definimos o seguinte funcional de custo que inclui um termo para a velocidade, representada por  $\mathbf{y}$ , outro para o WSS, representado por  $\mathbf{w}$  e um termo regularizador para o controlo:

$$\min \mathbf{J}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = w_1 \int_{\Omega_{part}} |\mathbf{y} - \mathbf{y}_d|^2 dx + w_2 \int_{\Gamma_{\Omega_{part}}} |\mathbf{w} - \mathbf{w}_d|^2 ds + w_3 \int_{\Gamma_{in}} |\nabla \mathbf{u}|^2 ds, \quad (1)$$

sujeito às restrições

$$\begin{cases} -div \tau + \rho(\mathbf{y} \cdot \nabla) \mathbf{y} + \nabla p = 0 & \text{em } \Omega \\ div \mathbf{y} = 0 & \text{em } \Omega \\ \mathbf{y} = 0 & \text{em } \Gamma_{wall} \\ \mathbf{y} = \mathbf{u} & \text{em } \Gamma_{in} \\ (-p\mathbf{I} + \tau) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{em } \Gamma_{out} \end{cases} \quad (2)$$

A variável  $p$  representa a pressão, e os parâmetros  $w_1$ ,  $w_2$  e  $w_3$  dos termos do funcional de custo, são escolhidos de acordo com critérios empíricos. As variáveis  $\mathbf{y}_d$  e  $\mathbf{w}_d$  representam os dados para a velocidade e para o WSS, respectivamente. O conjunto  $\Gamma_{\Omega_{part}}$  é a fronteira de  $\Omega_{part}$ . O tensor das tensões viscosas  $\tau$  é dado por  $\tau = 2\mu(D\mathbf{y})D\mathbf{y}$  onde  $\mu$  representa a viscosidade que é aqui definida usando o modelo generalizado de Cross  $\mu(\eta) = \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{(1 + (\lambda\eta)^b)^a}$ . Neste modelo  $\mu_0$ ,  $\mu_\infty$ ,  $\lambda$ ,  $a$  e  $b$  são constantes e  $D\mathbf{y} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{y} + (\nabla\mathbf{y})^T)$ . A variável  $\mathbf{u}$  representa o controlo como função definida na fronteira de entrada.

Para resolver o problema de controlo numericamente, primeiro discretizamos e depois optimizamos. Começamos assim por usar o Método dos elementos finitos com elementos do tipo  $P1 - P1$  estabilizados, com os espaços funcionais adequados para as funções teste e de forma, obtendo o problema discreto

$$\min J(Y, U) = w_1 \|Y - Y_d\|_{N_y}^2 + w_2 \mathbf{W}(Y) + w_3 \|U\|_{N_u}^2 \quad (3)$$

sujeito a

$$\begin{cases} \mathbf{Q}(Y) + \mathbf{G}(Y)Y + B^T P = F \\ BY = 0 \end{cases} \quad (4)$$

onde  $\|\cdot\|_{N_y}$  e  $\|\cdot\|_{N_u}$  são normas especiais que resultam da discretização. Para este efeito utilizámos o programa COMSOL Multiphysics.

De seguida é utilizado o método SQP (sequencial quadratic programming) implementado na biblioteca SNOPT para resolver o problema (3)-(4). Este é um problema de optimização não linear, em dimensão finita, cuja solução é obtida através da resolução de sub-problemas de programação quadrática e cujas restrições são linearizações das restrições originais.

### 3 Resultados Numéricos para a Estenose

Consideramos uma estenose idealizada de comprimento  $L = 10R$  com  $R = 3.162 \text{ mm}$ , como podemos observar na Figura 1 à esquerda.

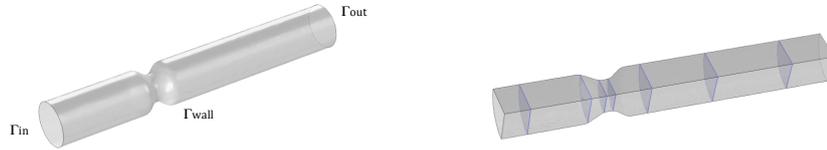


Figura 1: Esquerda: representação do domínio computacional da estenose. Direita: representação das secções,  $\Omega_{part}$ .

As simulações numéricas foram efectuadas em 1/4 da geometria, por se tornarem menos exigentes do ponto de vista computacional, e os resultados foram estendidos ao restante domínio por simetria. Os dados conhecidos considerados correspondem à região representada pelas secções que se observam na Figura 1 à direita. Para gerar a solução da qual se extraem os dados, resolvemos as equações que modelam o movimento do fluido com condição de fronteira na entrada, no sentido longitudinal da geometria (correspondente ao eixo dos  $z$ ) dada por  $\mathbf{y} = U_m \left( 1 - \left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R} \right)^2 \right)$  (condição parabólica de Poiseuille). Aqui  $U_m = 0.0993 \text{ (m/s)}$  corresponde à velocidade máxima na entrada. A malha foi construída com 336500 graus de liberdade

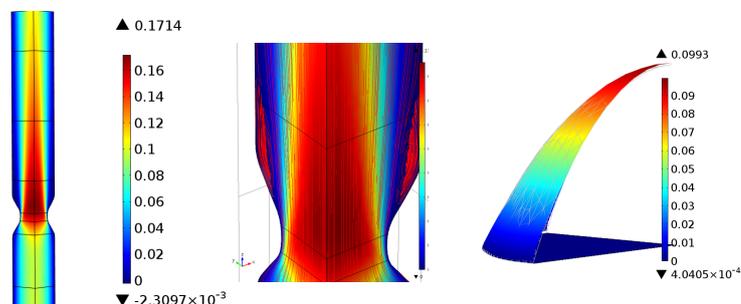


Figura 2: Esquerda e centro: componente longitudinal da velocidade pretendida. Direita: comparação do controlo obtido com o perfil original.

para a velocidade, sendo esta também utilizada para o problema de controlo. Na Figura 2, à direita, podemos ver como o controlo obtido aproximou bem o perfil utilizado para gerar os dados (à esquerda). Na Tabela 1 podemos ver a precisão da solução obtida.

Norma da solução desejada $y_d$	Erro Absoluto $E_a$	Erro Relativo $E_r$	Custo Final $J$
$3.2 \times 10^{-5}$	$9.73 \times 10^{-8}$	0.003	$1.61 \times 10^{-5}$

Tabela 1: Precisão da solução obtida relativamente à solução desejada, para o problema da Estenose. Parâmetros  $(w_1, w_2, w_3) = (10^4, 10^4, 10^{-3})$ .  $E_a = \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_d\|_2$  e  $E_r = E_a / \|\mathbf{y}_d\|$ .

## Referências

- [1] M. D'Élia, M. Perego, A. Veneziani, “A Variational Data Assimilation Procedure for the Incompressible Navier-Stokes Equations in Hemodynamics”, *J. of Sci. Comp.*, Vol. 52(2), (2012), pp. 340-359.
- [2] T. Guerra, J. Tiago, A. Sequeira, “Optimal Control in Blood Flow Simulations”, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, Vol. 64, (2014), pp. 57-69.
- [3] T. Guerra, “Controle Ótimo de Fluidos Não Newtonianos”, Tese de Doutoramento, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, Portugal, 2014.

## ESCOAMENTOS DE MANTOS DE GELO EM CLIMAS POLARES

*Hermenegildo Borges de Oliveira*

FCT – Universidade do Algarve

CMAF – Universidade de Lisboa

e-mail: holivei@ualg.pt

**Resumo:** Neste trabalho derivamos um modelo tridimensional que descreve o escoamento de mantos de gelo em climas polares. A grande novidade, reside na consideração de um expoente de Glen que varia com a temperatura. No caso do problema isotrópico, apresentamos resultados de existência e unicidade de soluções. Provamos, também, algumas propriedades qualitativas das soluções com potencial aplicação em modelos de previsão climática.

**Abstract** A three-dimensional model that describes the flow of ice sheets in polar climates is derived in this work. The major novelty lies in considering a temperature-depending Glen's exponent. In the case of the isotropic problem, we present results of existence and uniqueness of solutions. Some qualitative properties of the solutions with potential applications in climate prediction models are established as well.

**palavras-chave:** expoente de Glen variável; equação da espessura do gelo; equação da temperatura.

**keywords:** Variable Glen's exponent, ice-thickness equation, temperature equation.

## 1 Introdução

Manto de gelo é a tradução da expressão inglesa *ice sheet* para designar extensões de gelo que cobrem superfícies da litosfera com mais de 50 000 Km<sup>2</sup>. Os mantos de gelo têm extensões laterais na ordem dos 10 000 Km e, hoje em dia, concentram-se principalmente na Antártica e em menor escala na Gronelândia. O deslocamento dos mantos de gelo deve-se ao seu próprio peso e faz-se por processos de arrastamento característicos do estado sólido, tais como o deslocamento na estrutura da rede cristalina do gelo. Neste tipo de rios de gelo, a espessura máxima varia entre 1 e 3 Km e o escoamento faz-se a velocidades na ordem dos 100 m por ano. Apesar do seu movimento lento e imutabilidade aparente, os mantos de gelo exibem vários fenómenos dinâmicos interessantes. A neve acumula-se nas terras altas, é comprimida em gelo e escoada sob a ação da força de gravidade. O gelo escoado a partir das zonas centrais, onde a espessura do manto de gelo é maior, para as margens que poderão estar em terra ou dentro de água. Neste último caso, poderão formar-se enormes placas de gelo que ao quebrarem dão origem aos icebergs. A base do manto de gelo está em contacto com a crosta terrestre e, devido ao calor por esta transmitido, o gelo pode fundir. Quando isto acontece, a água resultante lubrifica a interface entre

o gelo e a crosta terrestre, o que provoca o deslize do manto de gelo. A dinâmica dos mantos de gelo é mantida através de um equilíbrio entre a acumulação no centro e a ablação nas margens. A acumulação ocorre principalmente por precipitação de neve e a ablação pode ocorrer tanto por meio de evaporação ou derretimento de gelo no clima mais quente da margem, ou por meio de quebra de icebergs. Muito importante para a manutenção dos mantos de gelo, são as temperaturas atmosféricas das regiões onde se encontram, que, no caso do interior da Antártica, é na ordem dos  $-60^{\circ}\text{C}$  de temperatura média anual, enquanto que as zonas costeiras têm uma temperatura média anual de cerca de  $-15^{\circ}\text{C}$ . No entanto, a temperatura típica de um manto de gelo, no seu interior profundo, poderá rondar os  $50^{\circ}\text{K} \simeq -223^{\circ}\text{C}$  (ver *e.g.* [5]).

## 2 As equações que governam o escoamento

Em Mecânica dos Fluidos, o gelo frio é modelado como um fluido não-newtoniano altamente viscoso, exotérmico, homogêneo e incompressível. As equações que governam o escoamento dos mantos de gelo resultam dos princípios básicos da Mecânica aplicados a um fluido geofísico (ver *e.g.* [2, 4]):

$$\text{Conservação da massa : } \operatorname{div} \mathbf{u} = 0; \quad (1)$$

$$\text{Conservação do momento linear : } \operatorname{div} \mathbf{T} = -\rho \mathbf{g}, \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{S}(\mathbf{D}), \quad (2)$$

$$\text{Conservação da energia: } \rho c \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta \right) = \operatorname{div} (k(\theta) \nabla \theta) + \operatorname{tr}(\mathbf{S}\mathbf{D}). \quad (3)$$

A notação usada nas equações (1)-(3) é bem conhecida: as incógnitas são o campo de velocidades  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ , a pressão  $p$  e a temperatura absoluta  $\theta$ ; a densidade  $\rho$  e o calor específicos  $c$  são constantes; e  $k$  é a função de condutividade térmica. O campo de forças externas  $\mathbf{g}$  deve-se à aceleração gravítica,  $\mathbf{I}$  é o tensor unitário,  $\mathbf{S}$  é a parte viscosa do tensor das tensões  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{D}$ , a parte simétrica de  $\nabla \mathbf{u}$ , é o tensor das velocidades de deformação. Os tensores  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{D}$  estão relacionados através da lei de Glen

$$\mathbf{D} = A(\theta) |\tau|^{n-1} \mathbf{S}, \quad \tau = \sqrt{II_{\mathbf{S}}}, \quad II_{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathbf{S}^2), \quad (4)$$

onde  $A(\theta)$  é dada pela lei de Arrhenius

$$A(\theta) = A_0 e^{-\frac{Q}{k\theta}}, \quad (5)$$

sendo  $Q$  a energia de activação,  $k$  a constante de Boltzman e  $A_0$  um parâmetro de normalização. A letra  $n$  designa-se por expoente de Glen e todos os trabalhos que consultamos consideram  $n$  constante, sendo  $n = 3$  o valor mais usado. No entanto, deve-se referir que resultados experimentais (ver *e.g.* [5]) têm mostrado alguma evidência de que  $n$  varia em função da temperatura. A novidade deste trabalho, consiste em considerarmos um expoente de Glen dependendo da temperatura

$$n = n(\theta). \quad (6)$$

### 3 Equações de campo

Consideremos um sistema cartesiano de coordenadas  $(x, y, z)$  habitual, onde o plano  $z = 0$  indica o nível médio do mar. Denotemos por  $z = h(x, y, t)$  a superfície livre que separa o manto de gelo da atmosfera e por  $z = b(x, y, t)$  a interface que separa a sua base da litosfera. As designadas equações de campo são derivadas fazendo uma análise comparativa das escalas das diferentes quantidades intervenientes nas equações (2)-(3). Esta análise permite-nos usar as aproximações hidrostática e do gelo raso (do inglês *shallow ice*), bem como inferir que as normais exteriores à superfície livre e à interface da base são aproximadamente verticais. Procedendo como em [1], obtemos, a partir de (2) e (4)-(6), a seguinte equação para a função  $H(x, y, t) = h(x, y, t) - b(x, y, t)$  que caracteriza a evolução da espessura do gelo

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \mathbf{u}_b \cdot \nabla H = \operatorname{div} \left( \int_b^h \mathcal{A}(\theta)(h-z)^{n(\theta)+1} dz |\nabla h|^{n(\theta)-1} \nabla h \right) + a, \quad (7)$$

onde  $\mathbf{u}_b = (u_b, v_b)$  é a velocidade de deslize da base,  $\mathcal{A}(\theta) = 2(\rho g)^{n(\theta)} A(\theta)$  e  $a = a_h - a_b$  é a taxa de acumulação/ablação. Um procedimento análogo, usando também (4)-(6), permite-nos reduzir a equação (3) a

$$\rho c \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( k(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \rho g \mathcal{A}(\theta)(h-z)^{n(\theta)+1} |\nabla h|^{n(\theta)+1}. \quad (8)$$

Devido à natureza do problema, a equação (7) é somente válida em pontos  $(x, y)$  do seu domínio onde  $H > 0$ . De modo análogo, a equação (8) será somente válida em pontos  $(x, y, z)$  do seu domínio tais que  $\theta \leq \theta_m$ , onde  $\theta_m$  é a média anual da temperatura atmosférica da região, pelo que muito inferior à temperatura de fusão do gelo. Por outro lado, ao formularem-se modelos matemáticos para o estudo do escoamento de mantos de gelo, geralmente é necessário ter em conta que o domínio ocupado pelo gelo não é conhecido e é ele próprio, também, parte da solução do problema. Por isso não é possível prescrever uma condição de fronteira para a função  $H$ . No entanto para a temperatura, assumem-se habitualmente as condições de fronteira seguintes

$$\theta = \theta_m \quad \text{sobre } z = h, \quad (9)$$

$$-k(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} = q_{\text{geo}} \quad \text{sobre } z = b \quad (\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ e } \theta < \theta_m), \quad (10)$$

onde  $q_{\text{geo}}$  denota o fluxo de calor geotérmico devido ao atrito provocado pelo deslize da base. Relativamente às condições iniciais  $H_0$  e  $\theta_0$  que complementam as equações (7) e (8), deverão ser consistentes com o problema real e têm de satisfazer às mesmas restrições de  $H_0 > 0$  e  $\theta < \theta_m$ .

### 4 Problema isotérmico

O problema posto pelas equações (7)-(9) é muito complicado de analisar, do ponto de vista da Análise Matemática. Isto deve-se à presença de uma equação integro-diferencial, mas principalmente por causa da lei de Arrhenius que caracteriza a

viscosidade e, também, devido ao expoente de Glen variável. Mesmo modelos exotérmicos que considerem expoentes de Glen constantes, são, ainda, difíceis de analisar. Os modelos mais simples consideram o caso isotérmico que faz com que a viscosidade não dependa mais da temperatura, levando ao desacoplamento das equações (7) e (8). Alguns autores justificam esta substancial simplificação do problema, argumentando que o modelo isotérmico pode resultar de taxas de variação da temperatura aproximadamente nulas (ver *e.g.* [4, 5]). Outra simplificação do modelo, decorre de assumir que o domínio do escoamento é conhecido, digamos

$$Q_T := (0, T) \times \Omega \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2,$$

sendo  $\Omega$  um domínio (conexo) limitado, e que a base do manto de gelo é plana, *i.e.*

$$b = \text{constante}.$$

Usando estas simplificações, o problema (7)-(9) reduz-se a uma única equação

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \mathbf{u}_b \cdot \nabla H = \operatorname{div} \left( \frac{H^{n+2}}{n+2} |\nabla H|^{n-1} \nabla H \right) + a \quad \text{em } Q_T. \quad (11)$$

O problema formulado pela equação (11) complementada por condições iniciais e de fronteira apropriadas, *e.g.*  $H = 0$  sobre  $\Gamma_T := (0, T) \times \partial\Omega$  e  $H = H_0$  em  $\Omega$ , quando  $t = 0$ , foi analisado em [3]. Aí foi demonstrada, sob determinadas condições sobre  $a$  e  $H_0$ , a existência e unicidade de soluções fracas para este problema. Demonstramos, também, que espessuras iniciais, nulas em qualquer parte, propagam-se com velocidade finita. Provamos, ainda, que, se a espessura do manto de gelo se anular localmente, existe um tempo de espera até ao qual a espessura irá permanecer nula. Isto significa que, após uma retracção local, o declive da superfície livre deve reconstruir-se antes de um novo avanço ser possível.

## Referências

- [1] S.N. Antontsev, H.B. de Oliveira. On a mathematical model in ice sheet dynamics. Actas da conferência *Fluid Mechanics and Aerodynamics, Athens (2007)*, pp. 1–8.
- [2] S.N. Antontsev, J.I. Díaz, H.B. de Oliveira. Mathematical models in dynamics of non-Newtonian fluids and in glaciology. Actas do *Congresso de Métodos Numéricos e Computacionais em Engenharia, Porto (2007)*, pp. 1–20.
- [3] S.N. Antontsev, H.B. de Oliveira. Qualitative properties of the ice-thickness in a 3D model. *WSEAS Trans. Math.*, **7** (2008) no. 3, pp. 78–86.
- [4] R. Greve, H. Blatter. *Dynamics of Ice Sheets and Glaciers*. Springer-Verlag, Heidelberg-Berlin, 2009.
- [5] H. Paterson. *The Physics of Glaciers*. Third Edition. Pergamon, Oxford, 1994.