

# **Matemática nas Ciências e Tecnologia**

*Editores Convidados:* António Malheiro, Filipe Oliveira

<i>Filipe S. Cal, Gonçalo A. S. Dias &amp; Juha H. Videman</i>	
Wave trapping above freely-floating obstacles .....	103
<i>Olivier Pellegrino, Luís Filipe Ribeiro &amp; Eduarda Filipe</i>	
Aspetos dos Algarismos Significativos em Metrologia .....	107



# WAVE TRAPPING ABOVE FREELY-FLOATING OBSTACLES

*Filipe S. Cal, Gonçalo A. S. Dias, Juha H. Videman*

CAMGSD and Departamento de Matemática

Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa

Av. Rovisco Pais, 1, 1049-001 Lisboa, Portugal

e-mail: videman@math.ist.utl.pt

**Abstract** We present conditions under which a freely-floating obstacle is most likely to amplify oscillations of the surrounding fluid.

**keywords:** Trapped mode, freely-floating, spectral problem.

## 1 Introduction

Trapped modes are localized harmonic oscillations in unbounded media that can be referred to as acoustics resonances, edge waves, bound states or Rayleigh-Bloch surface waves depending on the context (acoustics, water-wave theory, quantum mechanics, electromagnetics). They may appear in acoustic waveguides, around floating structures and along coastlines, in quantum waveguides and along diffraction gratings and their detection is critical, e.g., in naval architecture, offshore oil and gas drilling as well as in the design of turbomachinery, coupling devices and semiconductors.

In the water-wave theory, a trapped mode corresponds to a free oscillation of the fluid around a partially or totally submerged structure, having finite energy and existing only at a particular oscillation frequency. When the submerged structure is allowed to float freely the trapping problem becomes a quadratic spectral boundary-value problem for the mechanical system governing the coupled motion of the structure and the surrounding fluid. In a series of articles, cf. [5, 3, 1, 4] and the review article [2], we have shown how to make the quadratic spectral problem amenable to mathematical analysis. Moreover, we have put forward conditions on the floating structures that, if satisfied, warrant the existence of trapped modes. In this short note, we will zoom in on these conditions and on a submarine-shaped obstacle to show that there exists a submergence depth around which the obstacle is most vulnerable to wave trapping.

## 2 Problem definition

Consider two infinite liquid layers of finite depth, bounded laterally by rigid walls and lying on top of one another. Assume that a rigid body is totally

immersed and floating freely within the open fluid channel and that the fluid is incompressible, inviscid and layerwise homogeneous with the density in the lower layer greater than the one in the upper layer ( $\rho_2 > \rho_1 > 0$ ).

Let  $h_j > 0$  denote the layer depths,  $2l$  the channel width,  $B \subset \mathbb{R}^3$  the immersed body,  $\Theta^1$  and  $\Theta^2$  its submerged parts and  $\Sigma^1$  and  $\Sigma^2$  its surfaces in the upper and lower layer, respectively. Denote the fluid domain within each layer by  $\Omega^j$ ,  $j = 1, 2$ , the part of the interface not pierced by the obstacle by  $\Gamma$  and the cross-section of the part of the body piercing the interface by  $\theta$  (assume that the free surface is left unpierced).

Under the usual assumptions of the linear water-wave theory, the motion is time harmonic, with the radian frequency  $\omega > 0$ , and under gravity, with  $g$  denoting the acceleration due to gravity. Our coupled (spectral) water-wave problem consists in finding a non-trivial  $(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \boldsymbol{\alpha}) \in H^1(\Omega^1) \times H^1(\Omega^2) \times \mathbb{C}^6$  and  $\omega \in \mathbb{C}$ , such that the following equations are satisfied for all  $(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \boldsymbol{\beta}) \in H^1(\Omega^1) \times H^1(\Omega^2) \times \mathbb{C}^6$  (cf. [1]):

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 \rho_j (\nabla \varphi^{(j)}, \nabla \psi^{(j)})_{\Omega^j} + \sum_{j=1}^2 i\omega \rho_j (\mathbf{n}^T D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \boldsymbol{\alpha}, \psi^{(j)})_{\Sigma^j} \\ &= g^{-1} \omega^2 \frac{1}{\rho_2 - \rho_1} (\rho_2 \varphi^{(2)} - \rho_1 \varphi^{(1)}, \rho_2 \psi^{(2)} - \rho_1 \psi^{(1)})_{\Gamma}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$g(K\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})_{\mathbb{C}^6} - \sum_{j=1}^2 i\omega \rho_j (\varphi^{(j)}, \mathbf{n}^T D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \boldsymbol{\beta})_{\Sigma^j} = \omega^2 (M\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})_{\mathbb{C}^6}. \quad (2)$$

Here,  $(\cdot, \cdot)_{\Omega^j}$ ,  $(\cdot, \cdot)_{\Sigma^j}$  and  $(\cdot, \cdot)_{\Gamma}$  denote the usual scalar products in  $[L^2(\Omega^j)]^3$ ,  $L^2(\Sigma^j)$  and  $L^2(\Gamma)$ , respectively. Moreover,  $D(\mathbf{x})$  is a matrix given by

$$D(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & 0 & 0 & z \\ 0 & 1 & x & 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y & -x \end{bmatrix},$$

$M = \int_B \rho_B(\mathbf{x}) D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}$  is the mass matrix and  $K$  is the buoyancy matrix defined block-wise as

$$\begin{aligned} K &= \begin{bmatrix} \mathbb{O}_3 & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & K' \end{bmatrix}, \quad K' = K^{\theta} + K^{\Theta}, \\ K^{\theta} &= (\rho_2 - \rho_1) \int_{\theta} d(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T d(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) dx dy, \\ K^{\Theta} &= \text{diag}\{0, \rho_1 I_z^{\Theta_1} + \rho_2 I_z^{\Theta_2}, \rho_1 I_z^{\Theta_1} + \rho_2 I_z^{\Theta_2}\}, \end{aligned}$$

where  $d(\mathbf{x}) = (1, y, -x)$ ,  $I_z^{\Theta_j} = \int_{\Theta_j} (z - z_0) d\mathbf{x}$  and  $\mathbb{O}_3$  denotes the  $3 \times 3$  null matrix, see [1] or [2] for more details.

**Definition.** A non-trivial solution  $(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \alpha) \in H^1(\Omega^1) \times H^1(\Omega^2) \times \mathbb{C}^6$  of problem (1)-(2) is called a trapped mode; the corresponding value of  $\omega$  is referred to as a trapping frequency.

One must also take into account the following stability conditions: (i) the mass of the displaced liquid is equal to that of the floating body (Archimedes' principle of flotation); (ii) the centre of buoyancy lies on the same vertical line as the centre of mass; (iii) the quadratic form represented by matrix  $K'$  is positive definite. The last statement ensures stability of the equilibrium position of the floating body (cf. [1]).

### 3 Submarine-shaped obstacle

Let  $B$  be a totally submerged ellipsoidal obstacle of constant density  $\rho_B$  ( $\rho_1 < \rho_B < \rho_2$ ) with its immersed parts in each layer defined through

$$\begin{aligned}\Theta^1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} \leq 1, 0 < z < c(t+1)\}, \\ \Theta^2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} \leq 1, c(t-1) < z < 0\},\end{aligned}$$

where  $t \in (-1, 1)$  is a parameter given, in view of the Archimedes' principle of flotation, by  $t = 1 - 2 \frac{\rho_B - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}$  and  $a > \max\{b, c\}$  (see Figure 1).

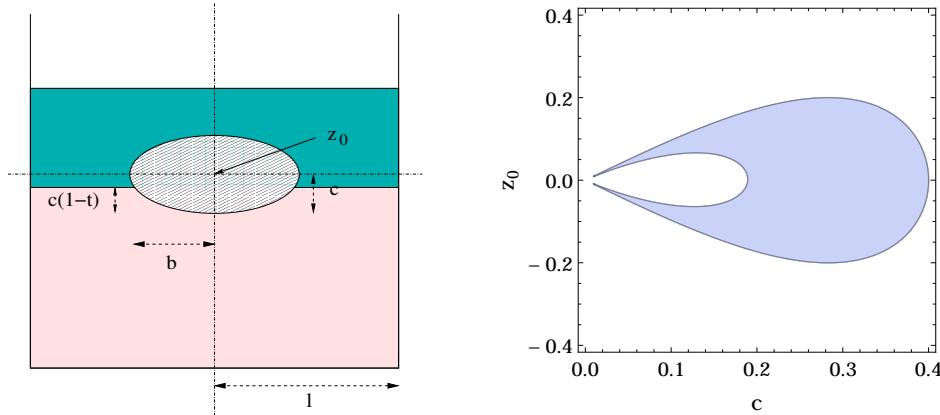


Figure 1: Left: an ellipsoid piercing the interface, with  $-c < z_0 < c$ . Right: Region where the stability and the trapping conditions are satisfied for  $l = 0.5$ ,  $b = 0.4$ ,  $\rho_1/\rho_2 = 0.9$ ,  $h_1 = 1$  and  $h_2 = 10$ .

It can be shown that the equilibrium position of the obstacle is stable if  $c/b < \sqrt{1 - t^2}$ . At the same time, the obstacle supports trapped modes if

$$g^{-1}\omega_{\dagger}^2 \left( I_{yy}^B + I_{zz}^B \right) > \rho_1 I_z^{\Theta^1} + \rho_2 I_z^{\Theta^2} + (\rho_2 - \rho_1) I_{yy}^{\theta},$$

where  $I_{yy}^B = \int_B \rho_B(y-y_0)^2 d\mathbf{x}$ ,  $I_{zz}^B = \int_B \rho_B(z-z_0)^2 d\mathbf{x}$ ,  $I_{yy}^{\theta} = \int_{\theta} (y-y_0)^2 dx dy$  and  $\omega_{\dagger}^2$  is computed from the dispersion relation of the problem in the absence of obstacles (cf. [3, 4]).

In Figure 1 we have depicted the region where both the stability and trapping conditions are met in the  $(c, z_0)$ -plane. One can see that there is a critical value for  $|z_0|$ , that is, for the distance between the geometric centre of the ellipsoid and the interface, above which the trapping and stability conditions are never satisfied. This critical submergence depth occurs when the configuration of the ellipsoid satisfies  $b = \sqrt{2}c$ .

## References

- [1] F. S. Cal, G. A. S. Dias, S. A. Nazarov, and J. H. Videman. Linearised theory for surface and interfacial waves interacting with freely floating bodies in a two-layer fluid. *ZAMP*, 2014. doi:10.1007/s00033-014-0423-8.
- [2] F. S. Cal, G. A. S. Dias, and J. H. Videman. Wave interaction with floating bodies in a stratified multilayer fluid. In J. Bourguignon, R. Jeltsch, A. Pinto, and M. Viana, editors, *Mathematics of Planet Earth: Dynamics, Games and Science*, volume 2 of *CIM Series in Mathematical Sciences*. Springer-Verlag. To appear.
- [3] F. S. Cal, G. A. S. Dias, and J. H. Videman. Existence of trapped modes along periodic structures in a two-layer fluid. *Q. J. Mech. Appl. Maths.*, 65(2):273–293, 2012. doi:10.1093/qjmam/hbs001.
- [4] F. S. Cal, G. A. S. Dias, and J. H. Videman. Trapped modes around freely floating bodies in a two layer fluid channel. *Proc. R. Soc. A*, 470(2170):20140396, 2014. doi:10.1098/rspa.2014.0396.
- [5] S. A. Nazarov and J. H. Videman. Trapping of water waves by freely floating structures in a channel. *Proc. R. Soc. A*, 467(2136):3613–3632, 2011. doi:10.1098/rspa.2011.0288.

# ASPETOS DOS ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS EM METROLOGIA

*Olivier Pellegrino, Luís Filipe Ribeiro, Eduarda Filipe*

Laboratório Nacional de Metrologia, IPQ, Caparica

e-mail: [OPellegrino@ipq.pt](mailto:OPellegrino@ipq.pt)

[LRibeiro@ipq.pt](mailto:LRibeiro@ipq.pt), [Efilipe@ipq.pt](mailto:Efilipe@ipq.pt)

*António Cruz*

UNIDO, Maputo, Moçambique

e-mail: [ASRCruz@gmail.com](mailto:ASRCruz@gmail.com)

**Resumo:** É essencial que a escrita dos valores numéricos dos resultados de medição seja reconhecida por todas as partes interessadas. Assim, para os algarismos significativos e arredondamento, foram estabelecidas convenções e regras publicadas em normas internacionais, que apresentamos nesta comunicação. A proposta da Conferência Geral dos Pesos e Medidas de definir as unidades de base do sistema internacional de unidades de medida a partir de constantes fundamentais realça a importância da correta escrita dos respetivos valores numéricos, que exemplificamos na constante de Avogadro.

**Abstract:** It is essential that the writing of the numerical values of the measurement results is acknowledged by all interested parties. Thus, for significant figures and rounding, rules and conventions were established and published in international standards that we display in this communication. The proposal by the General Conference of Weights and Measures to define the base units of the International System of Units from fundamental constants underlines the importance of the correct writing of the respective numerical values that we exemplify in the writing of the Avogadro constant.

**Palavras-chave:** algarismo significativo, arredondamento, valor estipulado, constantes fundamentais.

**Keywords:** significant figure, rounding, stipulated value, fundamental constants.

## 1 Introdução

De acordo com o “Guia para a estimativa de incertezas de medição”, designado por GUM [1], publicação conceituada e reconhecida por quem tem

necessidade de apresentar resultados de medição com rigor e sob a coordenação do Bureau International dos Pesos e Medidas (BIPM), é suficiente apresentar a incerteza de medição “...com no máximo dois algarismos significativos” e que “...as estimativas de grandezas de entrada e saída devem ser arredondadas para ser coerentes com as suas incertezas.” Propomos então apresentar as regras existentes nos documentos internacionais e nacionais respeitantes aos algarismos significativos e arredondamentos. No seguimento das reflexões do F. Pavese [2, 3] sobre algumas consequências da recente proposta da Conferência Geral dos Pesos e Medidas (CGPM) na redefinição das unidades de base do Sistema Internacional de Unidades de Medida (SI), consideramos também uma aplicação atual desta temática respeitante às constantes fundamentais [4]. Trata-se da constante de Avogadro que, para manter o respetivo significado de contagem de número de entidades, necessita de uma notação para escrita do valor numérico de grande amplitude.

## 2 Algarismos significativos, arredondamentos

### 2.1 Algarismos significativos

Segundo a norma americana ASTM E 29 [5], qualquer algarismo num número é um algarismo significativo à exceção dos 0 à esquerda ou, em números sem separador decimal, de alguns 0 à direita. O algarismo 0 à esquerda de algarismos não nulos só serve para indicar a ordem de grandeza do número e não é significativo. Por exemplo, o número 0,0017 tem dois algarismos significativos. Por sua vez, o algarismo 0 à direita do último algarismo não nulo é significativo em número com um separador decimal: 16,00 tem quatro algarismos significativos. Em número sem separador decimal, os algarismos 0 à direita do último algarismo não nulo podem ou não ser significativos: 700000 Pa pode ter um ou até seis algarismos significativos. Esta ambiguidade pode ser evitada utilizando uma unidade de medida com prefixo SI adequado: 0,700 MPa ou 0,70 MPa que têm três ou dois algarismos significativos, respetivamente. A norma ASTM E 29 sugere também o uso da expressão com potências de 10 para contar os algarismos significativos: em  $7,00 \times 10^5$  Pa, o valor numérico tem 3 algarismos significativos. Assim, ao expressar um valor numérico  $W$ , cuja maior potência de 10 é  $10^N$ , num desenvolvimento decimal segundo:

$$W = (d_N 10^0 + d_{N-1} 10^{-1} + \cdots + d_{N-L} 10^{-L}) \times 10^N = \sum_{m=N-L}^N d_m 10^m, \quad (1)$$

em que os  $d_m$  são um dos 10 algarismos 0, 1, ..., 9, à exceção de  $d_N$  que é não nulo, evidencia-se  $L + 1$  algarismos significativos. Na expressão (1), podemos observar que  $10^{N-L}$ , a potência mínima de 10, apresenta-se como uma resolução da representação do valor numérico  $W$ .

## 2.2 Arredondamentos

A partir do desenvolvimento decimal do valor numérico  $W$ , sem fatorização pela potência máxima  $10^N$ :

$$\begin{aligned} W &= d_N 10^N + \cdots + d_1 10^1 + d_0 10^0 + d_{-1} 10^{-1} + \cdots + d_{l+1} 10^{l+1} + d_l 10^l \\ &= \sum_{m=l}^N d_m 10^m, \end{aligned} \quad (2)$$

a norma portuguesa NP 37 [6] define o arredondamento de  $W$  à casa de ordem  $n$ , ou seja à potência  $10^n$ , segundo o procedimento:

- se  $d_{n-1} < 5$ , para  $m \geq n$ ,  $d_m$  fica igual e, para  $m < n$ ,  $d_m = 0$ ; assim, 11341,01 é arredondado à casa de ordem 1 em 11340;
- se  $d_{n-1} > 5$  ou se  $d_{n-1} = 5$  sem ser o último  $d_{n-q} \neq 0$ , com  $q \geq 1$ , para  $m > n$ ,  $d_m$  fica igual,  $d_n$  muda para  $d_n + 1$  e, para  $m < n$ ,  $d_m = 0$ ; assim, 11346,01 e 11345,01 são arredondados à casa de ordem 1 em 11350;
- se  $d_{n-1} = 5$ , é o último  $d_{n-q} \neq 0$  e  $n = 2p$ , para  $m \geq n$ ,  $d_m$  fica igual e, para  $m < n$ ,  $d_m = 0$ ; assim, 11345,00 é arredondado à casa de ordem 1 em 11340;
- se  $d_{n-1} = 5$ , é o último  $d_{n-q} \neq 0$ , com  $q \geq 1$ , e  $n = 2p + 1$ , para  $m > n$ ,  $d_m$  fica igual,  $d_n$  muda para  $d_n + 1$  e, para  $m < n$ ,  $d_m = 0$ ; assim, 11335,00 é arredondado à casa de ordem 1 em 11340. Este procedimento de arredondamento, idêntico ao da norma ASTM E 29, “favorece” os algarismos pares e é alcunhado de “five-even” rule. Também é utilizado maioritariamente em Ciência e Tecnologia.

Uma abordagem semelhante a este procedimento de arredondamento do valor numérico  $W$  à casa de ordem  $n$  é a da norma internacional ISO 80000-1 [7] que, a partir da designação da potência  $r = 10^n$  por resolução de arredondamento (rounding range), considera os múltiplos inteiros de  $r$ . Arredondar consiste em identificar um desses múltiplos inteiros de  $r$  que é mais próximo de  $W$ . Assim, ainda para arredondamentos em casa de ordem 1, 11341,01 fica 11340, enquanto ambos 11346,01 e 11345,01 mudam para 11350. No entanto, quando dois múltiplos inteiros de  $r$  são equidistantes do valor numérico para arredondar, a norma ISO 80000-1 refere a existência de dois procedimentos diferentes. Segundo a regra A, é escolhido o múltiplo de  $r$

de divisor par; assim, 11345,00 e 11335,00 são arredondados em 11340, o que é o procedimento da norma NP 37 e da norma ASTM E 29. Segundo a regra B, é escolhido o múltiplo de  $r$  com a maior amplitude; assim, -11345,00 é arredondado em -11350. Este procedimento, idêntico ao da norma ASTM D 6026, é alcunhado de “five-up” rule. A norma ISO 80000-1 mostra uma preferência para a regra A porque, nos tratamentos de dados experimentais, esta regra causa menos erros de arredondamento que a regra B. Mas refere que a regra B é às vezes utilizada nas aplicações informáticas. Por sua vez, a norma IEEE 754 [8] considera estas duas regras de arredondamento.

Devido àquelas regras de arredondamento poderem ser diferentes das aplicadas na recolha dos dados experimentais, é necessário efetuar os arredondamentos no fim de todos os cálculos e não após cada cálculo. Por sua vez, o GUM recomenda de avaliar os algarismos significativos da incerteza para os consequentes arredondamentos na apresentação do resultado da medição. Finalmente, se o primeiro algarismo significativo da incerteza for entre 5 e 9, a incerteza fica só com este algarismo, porque o valor numérico arredondado do resultado de medição não cria um erro absoluto maior que o décimo da incerteza. Se o primeiro algarismo significativo da incerteza for entre 0 e 4, a incerteza mantém-se com dois algarismos significativos e arredonda-se o valor numérico do resultado de medição à casa de ordem seguinte.

### 3 Uma aplicação atual

Evocada por F. Pavese [2, 3], uma das consequências da redefinição das unidades de base explicitamente a partir de constantes fundamentais [4] respeita à natureza e expressão do valor numérico da constante de Avogadro,  $N_A$ . Estipular tal valor numérico mantendo o significado de contagem associado a  $N_A$  levanta a questão: como expressar corretamente este número inteiro com 24 algarismos em que só os primeiros algarismos 602214129 são conhecidos? A expressão  $6,02214129 \times 10^{23}$  não parece ser a mais apropriada e como os dois últimos algarismos 2 e 9 são estipulados, essa expressão significa que só pacotes de  $10^{17}$  unidades são exatamente conhecidos. Embora de maior resolução, múltiplos de  $10^3$  não podem ser utilizados porque não correspondem a uma contagem direta. É portanto necessária uma notação específica para tais números inteiros de grande amplitude só sendo conhecidos os primeiros algarismos. A partir da sugestão de F. Pavese [3], de apresentar um número inteiro  $I$  em que os  $M$  primeiros algarismos dentro do total de  $N$  são conhecidos com:  $I_M| \rightarrow N$ , para  $N_A$  dando:  $602214129| \rightarrow 24$ , propo-

mos para  $N_A$  a notação:  $602214129| \rightarrow 10^{15}$ , em que “ $| \rightarrow |$ ” representa um separador decimal e a presença de algarismos desconhecidos.

## 4 Conclusões

Nesta comunicação, foram sintetizadas as regras publicadas em normas internacionais da determinação dos algarismos significativos e arredondamentos. No entanto, se o número a arredondar for equidistante de dois múltiplos sucessivos da resolução de arredondamento, no domínio técnico-científico, como na norma nacional NP 37, escolhe-se o múltiplo par, enquanto o domínio informático escolhe o múltiplo de maior amplitude. As redefinições previstas das unidades de base do SI, a partir de constantes fundamentais, colocam questões sobre a correta utilização desses valores estipulados, nomeadamente quando se perde informação contida nas respetivas incertezas. Uma representação de número inteiro de grande amplitude com algarismos desconhecidos é sugerida, baseada numa proposta de F. Pavese.

**Agradecimentos.** A apresentação desta comunicação foi possível graças à Sociedade Portuguesa de Metrologia (SPMet).

## Referências

- [1] Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement, BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML, JCGM 100: 2008.
- [2] Pavese, F., Some reflections on the proposed redefinition of the unit for the amount of substance and other SI units, Accred Qual Assur 16, 161-165, 2011.
- [3] Pavese, F., Rounding and notation, namely when using stipulations in the definition of measurements units, Measurement 46, 3725-3729, 2013.
- [4] On the possible future revision of the SI, <http://www.bipm.org/en/measurement-units/new-si/>
- [5] ASTM E 29, Standard Practice for Using Significant Digits in Test Data to Determine Conformance with Specifications, 2013.
- [6] NP 37, Arredondamento dos valores numéricos, 2009.
- [7] ISO 80000-1, Quantities and units Part 1: General, 2009.
- [8] The Institute of Electrical and Electronic Engineers, IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic, 2008.