

Sistemas Dinâmicos

Editor Convidado: Mário Bessa

Alexandre Rodrigues

Bifurcações Homoclínicas 121

Mário Bessa, Jorge Rocha & Maria Joana Torres

Estabilidade de Hamiltonianos 125

BIFURCAÇÕES HOMOCLÍNICAS

Alexandre Rodrigues

Centro de Matemática da Universidade do Porto
Rua do Campo Alegre, 687
4169-464 Porto, Portugal
e-mail: alexandre.rodrigues@fc.up.pt

Resumo: Bifurcações homoclínicas associados a um ponto de equilíbrio constituem centros organizadores para a análise de modelos concretos. Neste texto apresentam-se os quatro tipos genéricos de bifurcações homoclínicas associadas a pontos de equilíbrios hiperbólicos.

Abstract Homoclinic bifurcations provide useful organizing centers for the analysis of explicit models. In this article, we present the four generic types of homoclinic bifurcations associated to a hyperbolic equilibrium.

palavras-chave: Bifurcação, Ciclo homoclínico, Caos, Bifoco

keywords: Bifurcation, Homoclinic cycle, Chaos, Bifocus

1 Introdução

Uma *trajectória homoclínica* para uma equação diferencial do tipo:

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad (1)$$

onde $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo de vectores diferenciável, é uma solução não trivial biassimptótica ($t \rightarrow \pm\infty$) para um ponto estacionário. Na exposição assumir-se-á que esse ponto é a origem $O \equiv 0_{\mathbb{R}^n}$. O *ciclo homoclínico* associado a O é a união da trajectória com o ponto estacionário e será designado por Γ – ver Figura [1](#).

Para campos de vectores genéricos, a existência de um ciclo homoclínico é estruturalmente instável, existindo apenas para valores isolados do parâmetro λ . Assume-se, daqui em diante, que o ciclo existe para $\lambda = 0$. Em bifurcações homoclínicas, pretende-se estudar o que acontece numa pequena vizinhança de Γ para $|\lambda| \approx 0$, sendo determinante para isso a caracterização da dinâmica quando $\lambda = 0$.

Bifurcações homoclínicas têm sido estudadas por muitos autores nas últimas décadas e cada vez mais se torna claro que podem ser consideradas como centros organizadores da dinâmica caótica de alguns modelos – ver por exemplo [\[6\]](#), [\[7\]](#). Algum esforço tem sido implementado para catalogar

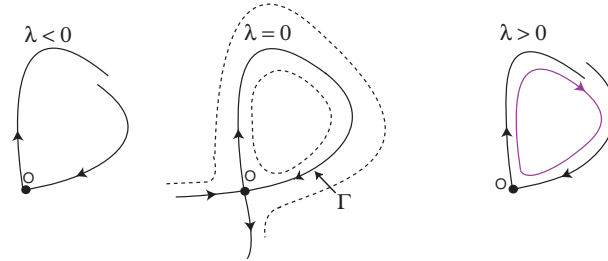


Figura 1: Bifurcação homoclínica planar.

os diferentes tipos de bifurcações que podem ocorrer, tendo-se constituído um instrumento fulcral no estudo de modelos concretos. As condições que determinam a existência de caos na vizinhança de ciclos homoclínicos estão baseadas na parte linear de df em O .

2 Linearização

Admita-se que os valores próprios de df_O são não-nulos e que não há ressonâncias não triviais^[1]. Assumindo que o ciclo homoclínico não passa perto de outros pontos estacionários para além de O , a dinâmica perto de Γ pode ser determinada estudando o sinal dos valores próprios de df_O . A menos de uma mudança de coordenadas, pode-se assumir que a equação diferencial (1) pode ser escrita como:

$$\dot{x} = df|_{(O,\lambda)}x + G(x, \lambda)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $n \geq 2$. Neste caso, $G(0, \lambda) = 0$, G é suave e contém termos não lineares^[3]. Uma vez que O é uma sela hiperbólica, os valores próprios de $df|_{(O,\lambda)}$ podem ser divididos em dois conjuntos $\{\rho_i\}_{i=1,\dots,n_u}$ e $\{\nu_i\}_{i=1,\dots,n_s}$ onde

$$n_u + n_s = n \quad \text{e} \quad \forall i (Re(\rho_i) > 0 \quad \text{e} \quad Re(\nu_i) < 0).$$

Podem ainda ser ordenados do seguinte modo:

$$Re(\nu_{n_s}) \leq \dots \leq Re(\nu_2) \leq Re(\nu_1) < 0 < \dots < Re(\rho_1) \leq Re(\rho_2) \leq \dots \leq Re(\rho_{n_u}).$$

Tipicamente, trajectórias que se aproximam de O em $+\infty$ fazem-no tangencialmente ao subespaço gerado pelos valores próprios com maior parte real

¹Detalhes sobre ressonâncias podem ser encontrados em [1].

negativa (*i.e.* os que estão mais próximos de 0). Analogamente, trajectórias que se aproximam de O em $-\infty$ fazem-no tangencialmente ao subespaço gerado pelos valores próprios com menor parte real positiva. Estes valores próprios são conhecidos como *valores próprios dominantes* e, genericamente, determinam completamente a dinâmica na vizinhança de Γ .

Catálogo: Assumindo que o campo de vectores é genérico, a menos de reversão do tempo, há quatro tipos possíveis de bifurcações associadas a um ponto de equilíbrio estacionário (ver [2, 3]):

1. **sela-nó:** os valores próprios dominantes ρ_1 e ν_1 são reais. No caso em que $\rho_1 + \nu_1 \neq 0$, a bifurcação homoclínica cria uma solução periódica para $\lambda > 0$ ou $\lambda < 0$. Quando $\lambda \rightarrow 0$ (do lado em que a solução periódica é gerada), o período do ciclo limite tende para $+\infty$ e colapsa com Γ em $\lambda = 0$. Dependendo do sinal de $\rho_1 + \nu_1$, o ciclo emergente é atractor ou repulsor – ver Figura [1].
2. **sela-foco atractiva:** os valores próprios dominantes são ρ_1 e ν_1 e ν_2 onde $\rho_1 \in \mathbb{R}$ e $\nu_1 = \bar{\nu}_2 \in \mathbb{C}$. No caso em que $Re(\nu_1) + \rho_1 < 0$, a bifurcação é semelhante ao caso sela-nó.
3. **sela-foco caótica:** os valores próprios dominantes são ρ_1 e ν_1 e ν_2 onde $\rho_1 \in \mathbb{R}$ e $\nu_1 = \bar{\nu}_2 \in \mathbb{C}$. No caso em que $Re(\nu_1) + \rho_1 > 0$, existe caos perto do ciclo homoclínico para $\lambda = 0$. Há uma sequência de selas-nó acumulando em $\lambda = 0$ de ambos os lados do espaço de parâmetros e sequências de bifurcações homoclínicas acumulando em $\lambda = 0$.
4. **bifoco:** os valores próprios dominantes são ρ_1 , ρ_2 , ν_1 e ν_2 onde $\rho_1 = \bar{\rho}_2 \in \mathbb{C}$ e $\nu_1 = \bar{\nu}_2 \in \mathbb{C}$. Este caso aparece com $n \geq 4$ e a dinâmica é similar à sela-foco caótica [6, 7]; todavia tipicamente surgem bifurcações mais complicadas. Devido à topologia complicada das soluções perto de Γ (Fig. [2]), a geometria das soluções que passam perto de Γ não está completamente descrita.

3 Ciclo homoclínico bifocal (caso 4.)

Actualmente, a análise de modelos cujo fluxo tem ciclos homoclínicos associado a um bifoco é um grande desafio. Inicialmente considerada em [6, 7], a geometria das bifurcações foi estudada nos anos 90 em [2, 3, 5]. Com base nestes trabalhos e nas Condições de Conley e Moser, em [4] descreve-se a

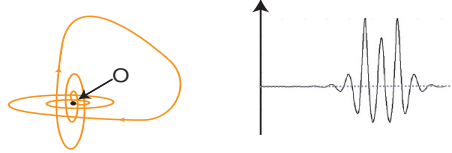


Figura 2: (a) Esquema de um ciclo homoclínico associado a um bifoco e respectiva série temporal.

existência de uma sucessão de ferraduras suspensas $\mathcal{L}(\Lambda_n)$ acumulando em Γ . Os índices de Morse das soluções periódicas (*i.e.* a dimensão das variedades instável) nessas ferraduras depende crucialmente do sinal de $\nu_1 + \rho_1$. Cada ferradura suspensa $\mathcal{L}(\Lambda_n)$, bem como a sua hiperbolicidade, persiste para pequenas perturbações do sistema – detalhes em [4].

Referências

- [1] G.R. Belitskii, *Functional equations, and conjugacy of local diffeomorphisms of finite smoothness class*, *Funkcional. Anal. i Prilozen* **7**, pp. 17–28, 1973.
- [2] P. Glendinning, *Differential equations with bifocal homoclinic orbits*, *Internat. J. Bifur. Chaos.* **7**(1), pp. 27–37, 1997.
- [3] P. Glendinning, C. Laing, *A homoclinic hierarchy*, *Physics Letters A.* **211**, pp. 155–160, 1996.
- [4] S. Ibáñez, A.A.P. Rodrigues, *On the dynamics near a homoclinic network to a bifocus: switching and horseshoes*, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 25, No. 11, 15300(19p), 2015.
- [5] C. Laing, P. Glendinning, *Bifocal homoclinic bifurcations*, *Phys. D* **102**, pp. 1–14, 1997.
- [6] L.P. Shilnikov, *The existence of a denumerable set of periodic motions in four dimensional space in an extended neighbourhood of a saddle-focus*, *Sov. Math. Dokl* **8**(1), pp. 54–58, 1967.
- [7] L.P. Shilnikov, *A contribution to the problem of the structure of an extended neighborhood of a rough equilibrium state of saddle-focus type*, *Math. USSR Sb.* **10**(1), pp. 91–102, 1970.

ESTABILIDADE DE HAMILTONIANOS

Mário Bessa

Departamento de Matemática, Universidade da Beira Interior
Rua Marquês d'Ávila e Bolama, 6201-001 Covilhã, Portugal
e-mail: bessa@ubi.pt

Jorge Rocha

Departamento de Matemática, Universidade do Porto
Rua do Campo Alegre, 687, 4169-007 Porto, Portugal
e-mail: jrocha@fc.up.pt

Maria Joana Torres

CMAT, Departamento de Matemática e Aplicações, Universidade do Minho
Campus de Gualtar, 4700-057 Braga, Portugal
e-mail: jtorres@math.uminho.pt

Resumo: Nesta breve nota considera-se o contexto dos sistemas Hamiltonianos, definidos numa variedade simplética M de dimensão $2d$ ($d \geq 2$). Prova-se que um sistema Hamiltoniano estrela é Anosov. Como consequência obtém-se a prova da conjectura da estabilidade para Hamiltonianos. Prova-se ainda que um sistema Hamiltoniano H é Anosov se qualquer das seguintes afirmações se verifica: H é robustamente topologicamente estável; H é estavelmente sombreável; H é estavelmente expansivo; e H possui a propriedade de especificação fraca estável. Além disso, para um Hamiltoniano C^2 -genérico $H \in C^2(M, \mathbb{R})$, a união das hipersuperfícies de energia regulares parcialmente hiperbólicas e das órbitas fechadas elípticas, forma um subconjunto denso de M . Como consequência, qualquer hipersuperfície de energia regular robustamente transitiva de um Hamiltoniano C^2 é parcialmente hiperbólica. Por fim, as hipersuperfícies de energia regulares estavelmente fracamente sombreáveis são parcialmente hiperbólicas.

Abstract In this brief note we consider the setting of Hamiltonian systems, defined on a $2d$ -dimensional symplectic manifold M ($d \geq 2$). We prove that a Hamiltonian star system is Anosov. As a consequence we obtain the proof of the stability conjecture for Hamiltonians. We also prove that a Hamiltonian system H is Anosov if any of the following statements holds: H is robustly topologically stable; H is stably shadowable; H is stably expansive; and H has the stable weak specification property. Moreover, for a C^2 -generic Hamiltonian $H \in C^2(M, \mathbb{R})$, the union of the partially hyperbolic regular energy hypersurfaces and the closed elliptic orbits, forms a dense subset of

M . As a consequence, any robustly transitive regular energy hypersurface of a C^2 -Hamiltonian is partially hyperbolic. Finally, stably weakly shadowable regular energy hypersurfaces are partially hyperbolic.

palavras-chave: campo de vetores Hamiltoniano; órbitas fechadas hiperbólicas; estabilidade estrutural; hiperbolicidade parcial; órbitas fechadas elípticas.

keywords: Hamiltonian vector field; hyperbolic closed orbits; structural stability; partial hyperbolicity; elliptic closed orbits.

1 Sistemas Hamiltonianos

Seja (M, ω) uma variedade simplética, onde M é uma variedade Riemanniana de dimensão $2d$ ($d \geq 2$) compacta, sem bordo, conexa, munida de uma forma simplética ω . Um *Hamiltoniano* é uma função real C^r definida em M , $2 \leq r \leq \infty$. Denotamos por $C^r(M, \mathbb{R})$ o conjunto dos Hamiltonianos C^r em M . No que se segue estaremos restritos à topologia C^2 e, portanto, tomamos $r = 2$. Dado um Hamiltoniano H , o *campo de vetores Hamiltoniano* X_H é definido por $\omega(X_H(p), u) = \nabla H_p(u)$, para todo $u \in T_p M$; este campo de vetores gera o fluxo Hamiltoniano X_H^t . Uma *energia* de H é um escalar $e \in H(M) \subset \mathbb{R}$. Dada uma energia e , definimos o conjunto *nível de energia* como $H^{-1}(\{e\})$; uma *hipersuperfície de energia* $\mathcal{E}_{H,e}$ é uma componente conexa de $H^{-1}(\{e\})$, e é *regular* se não contém singularidades.

Um *sistema Hamiltoniano* é um triplo $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$, onde H é um Hamiltoniano, e é uma energia e $\mathcal{E}_{H,e}$ é uma componente conexa regular de $H^{-1}(\{e\})$.

Fixada uma pequena vizinhança \mathcal{W} de uma hipersuperfície de energia regular $\mathcal{E}_{H,e}$, existem uma pequena vizinhança \mathcal{U} de H e $\epsilon > 0$ tais que, para todo o Hamiltoniano $\tilde{H} \in \mathcal{U}$ e para todo o nível de energia $\tilde{e} \in (e - \epsilon, e + \epsilon)$, $\tilde{H}^{-1}(\{\tilde{e}\}) \cap \mathcal{W} = \mathcal{E}_{\tilde{H},\tilde{e}}$, onde $\mathcal{E}_{\tilde{H},\tilde{e}}$ é uma hipersuperfície de energia de \tilde{H} . Chamamos a $\mathcal{E}_{\tilde{H},\tilde{e}}$ a *continuação analítica* de $\mathcal{E}_{H,e}$.

No espaço dos sistemas Hamiltonianos consideramos a topologia gerada por um sistema fundamental de vizinhanças. Dado um sistema Hamiltoniano $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ dizemos que \mathcal{V} é uma *vizinhança* de $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ se existem uma pequena vizinhança \mathcal{U} de H e $\epsilon > 0$ tais que, para todo o Hamiltoniano $\tilde{H} \in \mathcal{U}$ e para todo o nível de energia $\tilde{e} \in (e - \epsilon, e + \epsilon)$, a continuação analítica $\mathcal{E}_{\tilde{H},\tilde{e}}$ de $\mathcal{E}_{H,e}$ está bem definida.

2 Hiperbolicidade versus estabilidade estrutural

Um sistema Hamiltoniano $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ é *Anosov* se a hipersuperfície de energia $\mathcal{E}_{H,e}$ é uniformemente hiperbólica.

Um sistema Hamiltoniano $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ é um *sistema Hamiltoniano estrela* se existe uma vizinhança \mathcal{V} de $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ tal que, para qualquer $(\tilde{H}, \tilde{e}, \mathcal{E}_{\tilde{H},\tilde{e}}) \in \mathcal{V}$, a correspondente hipersuperfície de energia regular $\mathcal{E}_{\tilde{H},\tilde{e}}$ possui todas as órbitas fechadas hiperbólicas.

Um sistema Hamiltoniano $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ é *estruturalmente estável* se existe uma vizinhança \mathcal{V} de $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ tal que, para qualquer $(\tilde{H}, \tilde{e}, \mathcal{E}_{\tilde{H},\tilde{e}}) \in \mathcal{V}$, existe um homeomorfismo $h_{\tilde{H},\tilde{e}}$ entre $\mathcal{E}_{H,e}$ e $\mathcal{E}_{\tilde{H},\tilde{e}}$ que preserva as órbitas e as suas orientações. Além disso, $h_{\tilde{H},\tilde{e}}$ é contínuo nos parâmetros \tilde{H} e \tilde{e} , e converge para *id* quando \tilde{H} C^2 -converge para H e \tilde{e} converge para e .

Em [1] foi provado que todo o sistema Hamiltoniano estrela, definido numa variedade simplética de dimensão 4, é Anosov. Posteriormente, em [2], este resultado foi generalizado a dimensões superiores (ver Teorema 1). Como consequência foi obtida a prova da conjectura da estabilidade para Hamiltonianos (ver Teorema 2).

Teorema 1 *Se $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ é um sistema Hamiltoniano estrela, então $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ é Anosov.*

Teorema 2 *Se $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ é um sistema Hamiltoniano estruturalmente estável, então $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ é Anosov.*

3 Hiperbolicidade versus sombras estáveis

Nesta secção fornecemos caracterizações da estabilidade estrutural de sistemas Hamiltonianos, usando as noções de estabilidade topológica, sombreamento, expansividade e especificação (as definições das propriedades referidas, no contexto Hamiltoniano, podem ser consultadas em [3, Secção 3]). Os sistemas Anosov e, portanto, os Hamiltonianos estruturalmente estáveis, são topologicamente estáveis, expansivos e satisfazem a propriedade de sombreamento. Mas o recíproco não é verdade (ver [3, Secção 1]). Consequentemente, o problema sobre a relação entre a estabilidade estrutural e propriedades topológicas e geométricas do sistema não é trivial. A restrição a C^2 -interiores de conjuntos de Hamiltonianos que satisfazem uma certa propriedade, que explorámos em [3], tornou-se uma abordagem efetiva

para a solução deste problema (ver Teorema 3). Dizemos que uma propriedade vale de *modo estável* para algum sistema Hamiltoniano se for válida em alguma C^2 -vizinhança desse sistema.

Teorema 3 *Seja $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ um sistema Hamiltoniano. Se qualquer das seguintes afirmações se verificar: $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ é robustamente topologicamente estável; $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ é estavelmente sombreável; $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ é estavelmente expansivo; e $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ possui a propriedade de especificação fraca estável, então $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ é Anosov.*

4 Hiperbolicidade parcial versus órbitas elípticas densas

Um sistema Hamiltoniano $(H, e, \mathcal{E}_{H,e})$ é *parcialmente hiperbólico* se a hipersuperfície de energia $\mathcal{E}_{H,e}$ é parcialmente hiperbólica.

Em [3] foi provado que, C^2 -genericamente, os Hamiltonianos possuem apenas dois tipos de comportamento bem diferenciado: hiperbolicidade parcial ou então muitas órbitas fechadas elípticas.

Teorema 4 *Para um Hamiltoniano C^2 -genérico $H \in C^2(M, \mathbb{R})$ a união das hipersuperfícies de energia regulares parcialmente hiperbólicas e das órbitas fechadas elípticas, forma um subconjunto denso de M .*

Como consequência, qualquer hipersuperfície de energia regular robustamente transitiva de um Hamiltoniano C^2 é parcialmente hiperbólica. Por fim, obtivemos que as hipersuperfícies de energia regulares estavelmente fracamente sombreáveis são parcialmente hiperbólicas (ver [3, Teorema 6]).

MJT foi parcialmente financiada pelo CMAT - “Centro de Matemática da Universidade do Minho”, através de fundos Portugueses da “Fundação para a Ciência e a Tecnologia”, Projeto PEstOE/MAT/UI0013/2014.

Referências

- [1] M. Bessa, C. Ferreira and J. Rocha, “On the stability of the set of hyperbolic closed orbits of a Hamiltonian”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, Vol. 149, No. 2 (2010), pp. 373–383.
- [2] M. Bessa, J. Rocha e M. J. Torres, “Hyperbolicity and Stability for Hamiltonian flows”, *Jr. Diff. Eq.*, Vol. 254, No. 1 (2013), pp. 309–322.
- [3] M. Bessa, J. Rocha e M. J. Torres, “Shades of Hyperbolicity for Hamiltonians”, *Nonlinearity*, Vol. 26, No. 10 (2013), pp. 2851–2873.