

A GEOMETRIA E NOÇÃO DE ESPAÇO NOS SÉCULOS XIX E XX

Isabel Serra

CFCUL

Faculdade de Ciências

Universidade de Lisboa

e-mail: imserra@fc.ul.pt

Na ciência moderna, a geometria euclidiana foi associada à concepção do espaço físico através do estudo teórico do movimento e da utilização de coordenadas cartesianas. Aplicada com sucesso a vários ramos da ciência durante dois séculos, o método das coordenadas contribuiu para estabelecer a física matemática em bases sólidas, e também para reforçar a ideia de que a geometria é a ciência do espaço. O método cartesiano, para além de se ter revelado um instrumento fundamental no tratamento de problemas físicos, foi também essencial para considerar o mundo como uma realização do espaço euclidiano. De facto, o método de Descartes foi muito mais do que um instrumento – determinou também as concepções acerca do espaço e da geometria do século XVII ao século XIX¹.

De acordo com Henri Poincaré² (1854-1912), no século XIX todos os físicos estavam implicitamente de acordo com a ideia de que o espaço geométrico é contínuo, infinito, tridimensional, homogéneo e isotrópico, e ainda que todos os seus pontos satisfazem a geometria euclidiana. Embora a geometria euclidiana tenha sido usada durante mais de dois séculos no tratamento dos fenómenos físicos sem que nunca tivesse sido posta em causa a sua validade, as suas proposições não pareciam, no entanto, ser suscetíveis nem de confirmação nem de refutação empírica. A descoberta das geometrias não euclidianas viria alterar esta situação, embora não de imediato.

Carl Gauss (1777-1855) foi o primeiro a formular, em trabalhos não publicados³, a possibilidade da existência de outras geometrias, mas serão os trabalhos de Janos Bolyai (1802-1860) et Nikolai Lobatchevsky (1792-1856), publicados nos anos 1820, a desencadear um conjunto de discussões

¹R. Torreti (1978), *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, 2^o éd., Reidel, Dordrecht, 1984, p. 34.

²H. Poincaré, “Sur les Hypothèses Fondamentales de la Géométrie”, *Bulletin de la Société mathématique de France*, Vol. XV (1886-1887), pp. 203-216.

³A. Dahan-Dalmedico et J. Peiffer, *Une histoire des mathématiques – Routes et dédales*, Editions du Seuil, Paris, 1986, p. 154.

acerca dos fundamentos da geometria. O debate filosófico e matemático em torno das novas concepções não euclidianas inicia-se por volta de 1860 após a publicação da correspondência de Gauss, e renova-se após a publicação, em 1867, de uma conferência de Bernhard Riemann (1826-1866)⁴. As novas geometrias, que segundo Carl Boyer surgiram quando os matemáticos se libertam dos preconceitos que haviam condicionado as concepções acerca do espaço⁵, viriam a contribuir para reformular essas concepções.

Os trabalhos de Bolyai, Lobatchevsky e Riemann desencadearam diversas controvérsias que envolveram físicos e matemáticos, entre os quais Hermann Helmholtz (1821-1894) e Henri Poincaré. Dessas controvérsias resultaram novas ideias acerca do espaço e da sua relação com a geometria. Helmholtz foi talvez o primeiro a aperceber-se do alcance que poderiam ter os resultados de Riemann na matemática e na física. As ideias apresentadas em 1870 na conferência “Sobre a origem e o significado dos axiomas da geometria”⁶, onde Helmholtz segue um percurso quase análogo ao de Riemann, vão conduzi-lo a definir uma direção essencial na investigação sobre geometria e espaço: a de procurar estabelecer os fundamentos da geometria a partir da mecânica. Nessa linha de investigação, a ideia de associar a invariância geométrica aos movimentos dos corpos rígidos abre caminho para estabelecer uma relação entre os resultados de Riemann e a teoria dos grupos de transformação⁷. Esse trabalho é realizado por Sophus Lie (1842-1899) a partir de uma sugestão de Félix Klein (1849-1925).

Durante os anos 1870 e 80, Félix Klein⁸ e Sophus Lee⁹ haviam unificado as diferentes geometrias usando o conceito de grupo de transformação, um trabalho que permitiu considerar que as diferentes geometrias são equivalentes e que qualquer geometria, euclidiana ou não, se reduz ao estudo de um grupo. Esta ideia foi o fundamento do “convencionalismo geométrico”¹⁰ de

⁴B. Riemann, *Acerca das hipóteses que estão na base da geometria* Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Vol. 13, 1867.

⁵C. Boyer (1968), *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York, 1989, 2nd ed, p. 562.

⁶<http://archiv.ub.uni-Heidelberg.de/volltextserver/13158/1/geo2e.pdf>, consultado em julho, 2015.

⁷L. Rougier, *La philosophie géométrique de Henri Poincaré*, Librairie Félix Algan, Paris, 1920, p. 56.

⁸F. Klein, “A comparative review of recent researches in geometry”, *Bull. N. Y. Math. Soc.*, Vol. 2 (1893), pp. 215–249 (*Mathematische Annalen*, Vol. 43, (1893)).

⁹S. Lie, *Theorie der Transformationsgruppen* (3 vol), Leipzig: Teubner, 1888–93.

¹⁰H. Poincaré, “Les Géométries non-euclidiennes”, *Rev. Gén. des Sciences Pures et Appliquées*, Vol. 2 (1891), pp. 769–774.

Poincaré, uma posição filosófica muito contestada no seu tempo e que tem sido discutida até à atualidade¹¹. Mas a existência de geometrias não euclidianas e a equivalência entre geometrias, independentemente das suas consequências filosóficas, modificaram, incontestavelmente, as concepções acerca do espaço. Nesse processo de transformação Poincaré destaca-se pela sua contribuição singular. Sem ser um especialista em geometrias não euclidianas ou em teoria de grupos, como por exemplo Klein, ele aplicou as geometrias não euclidianas e a noção de grupo a vários problemas¹². Foi talvez essa prática que o levou a usar a estrutura de grupo na eletrodinâmica. Esse trabalho abriu caminho para as concepções relativistas que vieram transformar as ideias sobre o espaço.

A demonstração, por Poincaré, de que as equações de Maxwell são invariantes por ação de um grupo¹³, o grupo de Lorentz, permitiu definir o *espaço-tempo* a partir do grupo de simetria das leis da física. A estes resultados seguiram-se os de Hermann Minkowski (1864 -1909) que, em 1908, publica a sua geometria do espaço-tempo e mostra como a cinemática se pode estudar nesse quadro referencial. Finalmente, em 1915, Albert Einstein, inspirado no formalismo geométrico de Riemann, formula uma descrição da gravitação na qual o espaço-tempo de Minkowski é substituído por um espaço-tempo curvo¹⁴. Esta concepção de espaço-tempo, tida como uma das grandes inovações introduzidas pela Relatividade Geral, constitui sem dúvida um marco fundamental na transformação das relações entre geometria e espaço.

¹¹J. Giedymin, “On the origin and significance of Poincaré’s Conventionalism”, *Stud. Hist. Phil. Sci.*, Vol. 8 (1977), pp. 271–301, p. 271.

¹²I. Serra and H. Poincaré, “A Scientist Inspired by his Philosophy”, in *Poincaré’s Philosopher of Science*, Springer, The Western Ontario Series in Philosophy of Science, Vol. 79, 2014, pp. 153-166.

¹³H. Poincaré, “Sur la dynamique de l’électron”, *Ac. des Sc., Comptes-rendus*, Vol. 140 (1905).

¹⁴A. Einstein, *Oeuvres choisies*, Vol. 3, Edit du seuil, Paris, 1994, p. 146.