34.º ENCONTRO DO SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

spm
SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA
SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

3 E 4 DEZEMBRO 2021

snhm34.wixsite.com/snhm34

Conferencistas convidados:

Christian Gilain
Instituto de Matemática de Jussieu-Paris Rive Gauche

Jens Høyrup
Universidade Roskilde

Craig Fraser
Universidade de Toronto

Luis Español
Universidade La Rioja

Eberhard Knobloch
Academia de Tecnologia de Berlim

Wagner Valente
Universidade Federal de S. Paulo

Encontro acreditado pelo Conselho Científico-Pedagógico da Formação Contínua de Professores como 12 horas de formação para os grupos 230 e 500

Presencial: Auditório Municipal António Chainho, SANTIAGO DO CACÉM
Online: plataforma Zoom

SUMÁRIO (continuação)

34.º Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática

(continua no verso)

SUMÁRIO (continuação)

34.º Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática

Auditório Municipal António Chainho, Santiago do Cacém
Encontro realizado presencialmente e online na plataforma Zoom
3 e 4 de Dezembro de 2021

Introdução

Luis Saraiva[1]
(Coordenador Nacional do SNHM, CIUHCT, DM da FCUL)

A realização deste Encontro do SNHM teve para o Seminário o desafio de realizar pela primeira vez um Encontro que teria simultaneamente participantes presenciais e online, estes utilizando a plataforma Zoom.

Temos de louvar a acção da equipa técnica da Câmara de Santiago do Cacém, coordenada por Rui Gonçalves, e incluíndo Carlos Gonçalves, Rui Teixeira e Bruno Moreira, que garantiram o bom decorrer de todo o Encontro, incluindo a monitorizacão do som e da luz das sessões, e possibilitando a quem estava online não só ter uma visão dos conferencistas e dos seus power points, mas igualmente uma visão de conjunto da sala onde decorreram as sessões, permitindo-lhes uma maior proximidade virtual dos participantes presenciais.

Foi o nosso primeiro Encontro presencial desde 2019, e podemos dizer que decorreu em completa normalidade, sempre com as devidas precauções inerentes à pandemia — só se aceitaram inscrições presenciais para quem tivesse um certificado de vacinação, e mantendo-se as precauções básicas ao longo do Encontro. Deste modo regressámos aos ambientes usuais dos Encontros do SNHM, com as trocas de impressões dentro e fora da sala de conferências, o conviver como grupo durante os dois dias do Encontro, algo que nos fez sentir como parte de um projecto coletivo comum.

Queremos também agradecer a toda a Comissão Organizadora local, e muito especialmente à sua coordenadora, Dra. Ana Maria Vieira, o empenho que colocaram na realização do Encontro em todos os seus pormenores e na recepção aos participantes. É sempre muito tocante constatar essa genuína intenção de fazer o melhor possível, que nos fez sentir a todos o especial que foram os dois dias deste Encontro. Tivemos no seu início uma curta exibição de dança contemporânea por alunos do Agrupamento de Escolas de Santiago do Cacém; após o excelente jantar do Encontro houve uma sessão de cantares alentejanos pelo agrupamento de Cercal do Alentejo; e no sábado de manhã tivemos uma interessante e esclarecedora visita guiada ao centro histórico de Santiago, que incluiu o Castelo e o Jardim da Tapada do Palácio dos Condes de Avillez.

Estendemos os nossos agradecimentos à Câmara Municipal de Santiago do Cacém, e ao seu presidente, Dr. Álvaro Beijinha, ao Agrupamento de

[1]Agradecimentos institucionais são devidos à *Fundação para a Ciência e a Tecnologia* de Portugal no âmbito do projeto UIBD/00286/2020.

Escolas de Santiago do Cacém, na pessoa do seu Director, Dr. Manuel Mourão, que desde o início apoiaram esta iniciativa, permitindo-nos a utilização do Auditório Municipal António Chainho, disponibilizando os técnicos que garantiram, quanto ao som, luz e informática, o bom decorrer das sessões. Tivemos igualmente a colaboração de um grupo de alunos e ex-alunos do Agrupamento de Escolas de Santiago do Cacém, que contribuiram para que tudo corresse bem. A todos agradecemos os contributos dados, e muito em especial a Rui Filipe Sousa Santos, que nos acompanhou de perto em todas as sessões, dando todo o apoio pedido.

Houve ainda todo um conjunto de instituições da zona de Santiago do Cacém que apoiaram o Encontro e a quem são devidos os nossos agradecimentos: União das Freguesias de Santiago do Cacém, Santa Cruz e São Bartolomeu da Serra; Casa do Povo de Cercal do Alentejo; Cafés Delta; Herdade do Cebolal; Hotel Dom Nuno e Restaurante Mercado à Mesa.

"Last, but not least", como dizem os ingleses, queremos igualmente agradecer aos nossos colegas da Comissão Científica, João Caramalho Domingues e Fernando Figueiredo, que contribuiram de forma decisiva para o êxito desta realização do SNHM. De referir também que o Encontro foi acreditado pelo Conselho Científico Pedagógico da Formação Contínua, como Acção de Formação para professores Professores de Matemática do Ensino Básico e Secundário (Grupos 230, 500).

Aproveitando a possibilidade que nos deu o Zoom, tivemos entre nós seis ilustres convidados, todos com um notável currículo em história da Matemática:

Dois *Prémios Kenneth O. May*, a mais importante distinção em História da Matemática, atribuída de 4 em 4 anos pela *Comissão Internacional de História da Matemática* (ICHM): Jens Høyrup (2013) e Eberhard Knobloch (2017); o actual presidente da *Sociedade Canadiana de História e Filosofia da Matemática* e presidente entre 2009 e 2017 da ICHM, Craig Fraser; o editor das obras completas de D'Alembert e Professor Emérito da Sorbonne, Christian Gilain; o antigo presidente da *Sociedade Espanhola de História das Ciências e das Técnicas* entre 1999 e 2005, Luis Español González; e o Presidente do GEHMAT-Brasil, *Grupo Associado de Estudos e Pesquisas em História da Educação Matemática*, Wagner Valente.

Todos eles já estiveram em Portugal em realizações de História da Matemática. Os Professores Christian Gilain e Craig Fraser visitaram Lisboa em 2001, participando no Encontro Internacional sobre a História das Equações Diferenciais que teve lugar no então Complexo Interdisciplinar da Universidade de Lisboa (CIUL). O Professor Gilain voltou em 2009 a Lisboa para realizar conferências no CIUL e no Departamento de Matemática da FCUL. O Professor Eberhard Knobloch foi o convidado do 11.º Encontro do SNHM, em Aveiro, em 1999, e do 23.º Encontro, em Évora, em 2010. O Professor Jens Høyrup participou em Coimbra, em 2002, no 15.º Encontro do SNHM, integrado na Conferência Internacional "Pedro Nunes e a Ciência do seu Tempo". O Professor Wagner Valente foi conferencista convidado do 26.º Encontro do SNHM, realizado em Aveiro em 2013. Finalmente o Professor Luis Español foi conferencista no 2.º Encontro Ibérico de História da Matemática, realizado no Museu da Ciência da Universidade de Coimbra em 2016.

Duas outras conferências foram apresentadas por Zoom, de Helena Sousa Melo e Maria do Carmo Martins, e a de Luis Miguel Carolino. Por diferentes razões estes conferencistas não puderam deslocar-se a Santiago. A conferência de Luis Miguel Carolino foi feita em inglês por deferência com os convidados que não falam o português. Igualmente por este motivo a conferência de Fernando Figueiredo, embora falada em português, tinha um power point em inglês.

As comunicações abrangeram um vasto leque de temas da História da Matemática e do Ensino da Matemática, indo de temas desde a Antiguidade Grega ao século XX. Foram faladas figuras significativas da história matemática mundial, como Arquimedes, Benedetto de Firenze, Johannes Kepler, Giovanni Paolo Lembo, Gottfried Wilhelm Leibniz, Jean le Rond D'Alembert, Antonio Rosell Viciano e Henri Poincaré; foram analisadas questões da história matemática portuguesa, em particular sobre a navegação astronómica e sobre observatórios da Universidade de Coimbra no último terço do século XIX. A descrição de instrumentos antigos utilizados no traçado de curvas especiais foi assunto de uma das conferências e houve igualmente várias palestras sobre temas da história do Ensino da Matemática no século XX.

Como é costume terminarmos esta introdução, esperamos que a publicação destes resumos seja útil a todos os que os consultarem, que aumente a curiosidade de saberem mais sobre alguns destas questões, e que constitua um estímulo para futura participação em outros encontros do SNHM, quer como palestrantes quer como assistentes.

O Seminário está aberto a todos e de todos precisa.

Programa

3 de Dezembro

09.00 *Entrega de pastas*

09.30 Abertura do Encontro. Mesa: Luis Saraiva, Dr. Manuel Mourão, Diretor do Agrupamento de Escolas de Santiago do Cacém, Dr. Álvaro Beijinha, Presidente da Câmara Municipal de Santiago do Cacém, Professora Ana Jacinta Soares (via Zoom), em representação da Sociedade Portuguesa de Matemática.

09.50 *Exibição de dança contemporânea por alunos do Agrupamento de Escolas de Santiago do Cacém com o poema "Lágrima" de Amália Rodrigues, música de Carlos Gonçalves e cantado por Dulce Pontes.*

10.00 Christian Gilain (Sorbonne Université – Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche) — D'Alembert: Mathematics and the Enlightenment

11.00 *Café*

11.30 Jens Høyrup (Emeritus, Section for Philosophy and Science Studies, Roskilde University) — Benedetto da Firenze's gradual creation of symbolic linear algebra with four to five unknowns – and why he did not see the new technique as an important innovation

12.30 Luís Miguel Carolino (ISCTE - Instituto Universitário de Lisboa) — The legacy of Clavius: Giovanni Paolo Lembo and the telescopic novelties of 1610

13.00 *Almoço*

15.00 Wagner Rodrigues Valente (Universidade Federal de São Paulo, GHEMAT Brasil) — A Matemática do Ensino como Saber Profissional do Professor de Matemática

16.00 Luis Saraiva (CIUHCT, DM da FCUL, SNHM) — Lembrando Ubiratan D'Ambrósio (1932–2021)

16.30 Pedro Medeiros (Universidade de Aveiro) — O planisfério azimutal de João Carlos de Brito Capello

17.00 *Café*

17.30 Helena Sousa Melo e Maria do Carmo Martins (Dep. de Matemática e Estatística, da F. Ciências e Tecnologia, CEHu, Universidade dos Açores) — Instrumentos antigos para a construção de curvas: Lemniscata de Bernoulli

18.00 Mária Almeida (Centro Interdisciplinar de Ciências Sociais (CICS.NOVA), FCT da Universidade Nova de Lisboa) — Reforma da Matemática Moderna em Portugal: subsídios da imprensa

3 de Dezembro

(cont.)

18.30 Alexandra Rodrigues (Instituto de Gouveia – Escola Profissional, UIED) e José Manuel Matos (UNL, UIED) — Matemática Recreativa na Folha Informativa dos professores do 1.º grupo

20.00 *Jantar do Encontro*

22.00 *Sessão de Cantar Alentejano com o grupo de Cercal do Alentejo*

Programa

4 de Dezembro

09.00 Luis Español González (Professor Honorífico da Universidade de La Rioja, Departamento de Matemáticas y Computación) — Sobre *Instituciones Matemáticas* (1785) de Antonio G. Rosell Viciano (ca. 1748–1829). Formación matemática del autor y fuentes usadas para la obra.

10.00 Ana Teorgas Queirós (Escola Naval) — Latitude por duas alturas do Sol — Proposta de Cornelis Douwes

10.30 *Café*

11.00 *Passeio Social, com visita ao centro histórico de Santiago do Cacém*

13.00 *Almoço*

15.00 Eberhard Knobloch (Berlin University of Technology and Berlin-Brandenburg Academy of Sciences and Humanities) — Mathematical rigour, mathematical creativity, and the transgression of limits

16.00 Craig Fraser (Institute for the History and Philosophy of Science and Technology, University of Toronto) — Hamilton-Jacobi Theory 1860–1910

17.00 Fernando Figueiredo (DM-FCTUC/CITEUC) — A visita do Imperador do Brasil Pedro II ao Observatório Meteorológico e Magnético da Universidade de Coimbra: contribuições para uma arqueologia de um espaço científico

17.30 António Costa Canas (Escola Naval/CINAV, CHULisboa) — Cálculos de navegação astronómica usando o cronogoniómetro

18.00 Encerramento do Encontro

D'Alembert: Mathematics and the Enlightenment

Christian Gilain
Sorbonne Université
(Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche)

The mathematician and philosopher Jean le Rond d'Alembert (1717–1783), coeditor of the *Encyclopédie*, is a central figure of the Enlightenment. As a scientist, he worked in the various fields of "pure" and "mixed" mathematics. In this talk, we present a few of his research topics in the realm of pure mathematics (see [1]): the integral calculus with algebraic methods (integration of rational or irrational functions, of linear differential systems; beginning of the theory of partial differential equations); the imaginary quantities and the proof of the fundamental theorem of algebra; the foundation of infinitesimal analysis with the concept of limit.

In the light of this study, we examine d'Alembert's conception of mathematics, which is far removed from the utilitarian view often attributed to him by the historiography. Whereas some of d'Alembert's works on the integral calculus are to be situated directly in a framework of pure mathematics, other parts of his work originated in the search for solutions to mechanical problems. However, in these latter cases, d'Alembert, at a certain moment, develops a study of pure analysis with its own logic.

Moreover, for him, mathematics can play an important role in the promotion of the Enlightenment and the emancipation of society, as he argues in the article "Géomètre" of the *Encyclopédie, remarkable plea for the cultural and humanist value of mathematics* (see [2]).

References

[1] *Œuvres complètes de Jean le Rond d'Alembert*, volume I/4a, *Textes de mathématiques pures (1745–1752)*, C. Gilain (éd.), Paris : CNRS Editions, 2007.

[2] C. Gilain, « Les Lumières dans l'historiographie des mathématiques », in F. Salaün & J.-P. Schandeler (dir.), *Enquête sur la construction des Lumières*, Ferney-Voltaire : Centre international d'étude du XVIIIe siècle, 2018, p. 167–179.

Benedetto da Firenze's gradual creation of symbolic linear algebra with four to five unknowns – and why he did not see the new technique as an important innovation

Jens Høyrup
Section for Philosophy and Science Studies, Roskilde University

At an earlier occasion I have pointed to the appearance of first-degree rhetorical algebra with two unknowns in a number of sources from Fibonacci's *Liber abbaci* (1202/1228) until Luca Pacioli's *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalità* (1494), and mentioned that Benedetto da Firenze supports the argument by means of rudimentary symbolic algebra in his *Trattato di praticha d'arismetricha*.

Further analysis of Benedetto's *Praticha* reveals a number of problem solutions making use of symbolic first-degree algebra with up to five unknowns. We know the *Praticha* from Benedetto's autograph (and beyond that from two incomplete copies, which leave out what interests us here). The autograph is Benedetto's working copy, as revealed by a large number of calculations made before the verbal descriptions were written down. This allows us to see how Benedetto gradually develops and hones the technique.

The first problem of interest deals with four men finding a purse with *denari*.

> Four have denari, and walking on a road they found a purse with denari. The first and second say to the third, if you give us the purse we shall have 2 times as much as you. The second and third men say to the fourth, if we had the denari of the purse we should have 3 times as much as you. [and so on cyclically] It is asked how much each one had, and how many *denari* there were in the purse.

After having written the statement Benedetto starts calculating in a margin that soon spreads into the text column, using current standard abreviations for 1st, 2nd, 3rd, 4th and *borsa*. He writes down four equations, a process for which he introduces a technical term. Replacing Benedetto's standard abbreviations by Greek letters we may write them thus:

$$\begin{aligned}
\gamma &= \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}b,\\
\delta &= \tfrac{1}{3}\beta + \tfrac{1}{3}\gamma + \tfrac{1}{3}b,\\
\alpha &= \tfrac{1}{4}\gamma + \tfrac{1}{4}\delta + \tfrac{1}{4}b,\\
\beta &= \tfrac{1}{5}\alpha + \tfrac{1}{5}\delta + \tfrac{1}{5}b.
\end{aligned}$$

(addition is indicated in the manuscript by juxtaposition, equality by enlarged distance). Stepwise, Benedetto then eliminates three of the unknowns. That brings him back to a situation he has already dealt with, a system with 2 unknowns q (for *quantità*) and b (for *borsa*). The writing is somewhat disorderly, the various sections of the calculation being separated by curved lines representing the "chambers" of a "castelet".

Benedetto appears not to regard his new technique as revolutionary, and from his own perspective he is right. The problem is borrowed from Fibonacci's *Liber abbaci*, where it is solved by a purely verbal argument following the same lines. We may suspect Fibonacci to have used a line diagram as basis for his thought (he shows them elsewhere, but only in borrowed problems), and Benedetto may have had the same suspicion. He therefore had good reasons to regard the advance as marginal.

Marginal or not, Benedetto was still aware to have produced something new. Sligthly later comes a problem about four men buying a horse which none of them can afford on his own. Benedetto states that "there are many ways to solve such cases. I shall take the most convenient, or let us say the least tedious" — and that turns out to be his new metod. The calculation is still not quite orderly, but now a technical term for the elimination is introduced.

In another horse-buying problem, the same technique is used, now getting the name "by equation" — and now the calculations are as orderly as could be asked from a modern mathematics teacher calculating on the blackboard. And in yet another horse-buying Benedetto only explains how to produce the first equation, for the rest referring the reader to the symbolic calculation for which he has prepared space on the page — unfortunately forgetting to fill it out. But at least we see that now he supposes his reader to be better served by the symbolic than by the rhetorical exposition. The cake is baked and ready to be eaten. And Benedetto leaves matters there for his readers.

It appears, however, that his readers either did not look carefully at that part of his extensive treatise, or did not find it worthwhile to learn and emulate. Next times something similar turns up is (to my knowledge) in Stifel's *Arithmetica integra* from 1544. Stifel introduces principles that allow naming of unknowns ad libitum and even of their powers and products. Stifel appears not to know about what Benedetto had done and instead generalizes from Cardano's and Rudolff's use of two unknowns *thing* and *quantity*. Stifel's examples, however, are trivial, which may explain that even he remained uninfluential (a possible exception being Buteo, who in 1559 did something similar to what Benedetto had done while using symbols that may come from Stifel).

We may wonder at these repeated dead ends. But we probably shouldn't. Benedetto had used his technique to attack classical recreational problems where it was not really needed, as Benedetto says himself. What Stifel and Buteo offered was not qualitatively different. A leap only appeared in the the intellectually competitive context of the 17th century. Here, mathematicians had to prove their valour on problems inspired by Archimedes, Apollonios and Pappos. In order to tackle *these*, as Viète as well as Descartes point out, a *new* kind of algebra was needed. That brought about the end of dead ends.

Bibliography, chronologically ordered:

Benedetto's manuscript is Siena, Biblioteca degl'Intronati, L.IV.21.

Michael Stifel, *Arithmetica integra*. Nürnberg: Johan Petreius, 1544.

Joannes Buteo, *Logistica*. Lyon: Guillaume Rovillé, 1559.

Høyrup, "Reinventing or Borrowing Hot Water? Early Latin and Tuscan Algebraic Operations with Two Unknowns". *Gaṇita Bhārati* **41** (2019, published 2021), 115–159.

The legacy of Clavius: Giovanni Paolo Lembo and the telescopic novelties of 1610

Luís Miguel Carolino
Iscte – Instituto Universitário de Lisboa, CIES

In the last edition of his *Commentarius in sphaeram Ioannis de Sacrobosco*, published in 1611, Christoph Clavius urged astronomers to work out an astronomical solution that integrated the ground-breaking Galilean novelties of 1610. As the Collegio Romano mathematics professor stated, "since this is so, astronomers ought to see how the celestial orbs may be arranged in order to save the phenomena". What was the real meaning of Clavius's plea? This paper approaches this question by analysing the astronomical work of the Jesuit Giovanni Paolo Lembo.

Lembo was an accomplished telescope maker and astronomical observer, having played a crucial role in the telescopic observations carried out at the Collegio Romano between 1610 and 1611. In April 1611, Clavius himself acknowledged the central role played by Lembo in these telescopic observations. In a letter addressed to Cardinal Robert Bellarmine, who had asked the Collegio Romano mathematicians for their opinion on the new celestial phenomena observed through the telescope, Clavius made Lembo sign the letter together with him, Christoph Grienberger and Odon van Maelcote. In this missive, the four Jesuit astronomers responded affirmatively to each of the five queries previously put by Bellarmine. They thereby recognized how telescope observations had revealed that there were indeed a great number of stars in the nebulas of Cancer and Pleiades, though it remained not entirely clear whether the Milky Way was made up of minute stars; that Saturn was not round like Jupiter and Mars although they were unable to clearly depict three distinct stars; that Venus did actually wax and wane although they said nothing about its potential cosmological implications; that the Moon's surface did appear uneven even though Clavius attributed this appearance to variations in the density of the Moon's body; and finally, that there were four stars moving quickly and in almost a straight line around Jupiter.

Furthermore, Lembo was one of the closest collaborators of Clavius and an advocate of his astronomical ideas. He endorsed Clavius's traditional ideas of celestial solidity and perfection.

The question is, then, how could he stand for these traditional ideas and simultaneously incorporate the output of telescopic observations? Lembo circumvented this difficulty by putting forward a partially geo-heliocentric planetary system, which differed radically from that of Tycho Brahe. Based upon the principle of celestial solidity and the astronomical evidence regarding the phases of Venus and Mercury, the Italian astronomer argued that Venus and Mercury moved around the Sun in epicycles with their centres coinciding with the Sun's centre. Thus, the Sun, Venus and Mercury occupied a shared and solid orb: "having shown and proven this [the phases of Venus and Mercury], who would disagree in placing the Sun, Venus and Mercury in the same orb, excluding at least two orbs from the number traditionally recognized so far [...]?" (Lembo, *Tratado da Esfera*, Arquivo Nacional da Torre do Tombo, Lisbon, Manuscrito da Livraria 1770, fol. 36r.). The Sun, together with the remaining planets (Moon, Mars, Jupiter and Saturn) and the fixed stars, were supposed to move inside solid orbs concentric to the Earth. Three further celestial spheres were factored in order to account for the precession of the equinoxes (firmament), the two oscillatory movements and diurnal motion (Primum mobile). The Empyrean heaven thus acted to seal the universe.

In putting forward this planetary system, Lembo came to terms with the telescopic novelties and particularly with the brand new observations of the phases of Venus and Mercury. Furthermore, he did this without jeopardizing the traditional Aristotelian-Ptolemaic cosmology then endorsed by Clavius and the majority of Jesuit mathematicians and philosophers. In fact, while arguing that Venus and Mercury moved around the Sun in a common orb, he maintained the cosmological postulate of the solidity of the heavens and maintained the explanation of the dynamics of celestial bodies dynamics as resulting from the motions of the spheres.

These two principles stemmed from the foundations of his Aristotelian-Ptolemaic worldview, and particularly from the need to comply with Aristotle's postulate stipulating heavenly bodies experienced one single, regular and circular motion around a unique cosmic centre. Thus, it would seem highly plausible that Lembo's astronomical solution aligned with an appropriate understanding of Clavius's plea when the German Jesuit urged astronomers to rearrange the "celestial orbs" (*orbes coelestes*) so that the Galilean novelties could be successfully integrated. From this point of view, Lembo's system configured a sort of conservative and yet updated response to the Galilean telescopic novelties. Other Jesuit astronomers, not directly connected to Clavius's team at the time of the Collegio Romano telescopic observations, took different understandings of this plea. In subsequent years, these astronomers were then to push for the official adoption of Tychonism by the Jesuit authorities.

Bibliography

BALDINI, Ugo, "Giovanni Paolo Lembo's lessons in Lisbon: a partial content analysis", in Luís Saraiva (org.), *Proceedings of the International Conference History of Astronomy in Portugal, Institutions, theories, practices*, Porto, Sociedade Portuguesa de Astronomia, 2014, pp. 123–181.

CAROLINO, Luís Miguel, "Between Galileo's Celestial Novelties and Clavius's Astronomical Legacy: The Cosmology of the Jesuit Giovanni Paolo Lembo (1615)", *Galilaeana. Studies in Renaissance and Early Modern Science*, 17 (2020), pp. 193–217.

LATTIS, James M., *Between Copernicus and Galileo. Christoph Clavius and the Collapse of Ptolemaic Cosmology*, Chicago and London, The University of Chicago Press, 1994.

LERNER, Michel-Pierre, "L'entrée de Tycho Brahe chez les jésuites ou le chant du cygne de Clavius", in Luce Giard (ed.), *Les Jésuites à la Renaissance. Système éducatif et production du savoir*, Paris, Presses Unversitaires de France, 1995, pp. 145–185.

REEVES, Eileen and VAN HELDEN Albert, "Verifying Galileo's discoveries: telescope-making at the Collegio Romano", in Jürgen Hamel and Inge Keil (eds.), *Der Meister und die Fernrohre: das Wechselspiel zwischen Astronomie und Optik in der Geschichte*, Frankfurt am Main, H. Deutsch, 2007, pp. 127–141.

A matemática do ensino como saber profissional do professor de matemática

Wagner Rodrigues Valente
Universidade Federal de São Paulo / GHEMAT Brasil

Por que considerar como tema de pesquisa o saber profissional do professor? A resposta à pergunta vem sendo dada, ao que parece, desde a década de 1960. Um dos primeiros teóricos a enfatizar a necessidade de investigações sobre o assunto é Lee Shulman (FERNANDEZ, 2015). A partir de seus estudos, vai sendo reafirmada a necessidade de caracterização de um saber específico para a docência, um saber que distingue a profissão docente das demais profissões.

O esforço de caracterização da docência como profissão acentua-se, no entanto, a partir da década de 1980, onde o foco dos estudos, com vistas à profissionalização, atém-se ao saber, numa "tentativa de reformular e renovar os fundamentos epistemológicos do ofício de professor e de educador, assim como da formação para o magistério" (TARDIF, 2000, p. 13). Intenta-se a construção de um repertório de saberes próprios ao ensino.

O pioneirismo de Lee Shulman resultou num verdadeiro paradigma para a pesquisa sobre o saber profissional do professor. Haja vista que, depois dele, uma multiplicidade de autores vem construindo variadas tipologias, como propôs inicialmente Shulman. As tipologias sobre as quais embasam suas pesquisas, levam os autores a considerar, por meio delas, a singularidade do saber profissional da docência, comparativamente a saberes ligados a outros campos de trabalho (HOFSTETTER; VALENTE, 2017).

Um tanto diferente do paradigma que considera uma variada gama de tipos de saberes, estabelecidas por Shulman, iremos reter a caracterização dada por Hofstetter; Schneuwly (2017) que apontam haver, para o saber profissional da docência, tão somente dois tipos: os saberes a ensinar e os saberes para ensinar. Tal caracterização, mesmo sendo datada dos dias atuais, poderá ser mobilizada para análise de tempos passados, tendo em vista que, em qualquer época, estão em discussão os temas do ensino e da formação de professores. E um dos aspectos centrais dessa discussão refere-se ao saber. O saber que referencia o ensino e aquele que integra a formação do futuro professor. Assim, sem correr o risco do anacronismo, pode-se, historicamente, tratar o saber disposto para ser ensinado como um saber a ensinar. Tal saber refere-se ao saber como objeto de ensino: aquilo que está consolidado como saber para o professor ensinar a seus alunos. Também é plausível considerar o saber de formação do professor, considerado como um saber para ensinar, que diz respeito às ferramentas que o professor deverá ter para o exercício da docência de um dado saber a ensinar, numa dada época. Desse modo, objeto de ensino e ferramentas para o ensino constituem aparato conceitual que poderá ser utilizado na análise de épocas passadas com o fim de caracterizar um dos ingredientes do ensino, quiçá o mais importante deles: o saber (VALENTE et al., 2021). E, ainda, tendo em consideração o saber a ensinar e o saber para ensinar, torna-se possível a análise da articulação desses dois saberes, em cada tempo que, por hipótese teórica, constitui a representação do saber profissional do professor.

Isto posto, ainda cabe levar em conta que, no caso dos estudos ligados à matemática, poderemos tratar de uma matemática a ensinar, objeto de ensino do professor; e de uma matemática para ensinar, ferramenta que o professor deverá mobilizar para o ensino da matemática. Também, a articulação entre objeto de ensino e ferramenta para o ensino caracteriza teoricamente o saber profissional do professor. Tal saber denominamos de matemática do ensino. Isto é, a relação estabelecida entre a matemática a ensinar e a matemática para ensinar identifica o objeto teórico de pesquisa ao qual tratamos por matemática do ensino. Tal matemática revela o saber profissional do professor que ensina matemática (BERTINI; MORAIS; VALENTE, 2017).

A pesquisa histórica sobre o saber profissional do professor que ensina matemática, a matemática do ensino, deve ser entendida como uma construção teórica oriunda de sistematizações das experiências docentes realizadas numa dada época escolar. O saber profissional não representa um dado empírico, algo a ser apenas e tão somente nomeado, coletado do mundo fenomenológico. Na investigação do saber profissional, o posicionamento epistemológico trata o real, o que se quer conhecer, como um objeto a ser teoricamente construído. “Ou seja, o real a ser conhecido não é o real na sua plenitude de aparência, mas é o real que aparece teoricamente, que é construído no pensamento” (BORBA; VALDEMARIN, 2010, p. 26). Em específico, trata-se da construção de um objeto histórico pelo historiador, “já que o passado nunca é um objeto que já está ali” (CHARTIER, 2009, p. 16).

Sob essa perspectiva de análise, sendo a matemática do ensino tomada como objeto de conhecimento, o processo de sua construção deverá promover uma abstração a partir das experiências docentes, intentando, num dado tempo, verificar como tratá-las como conhecimento e, posteriormente, verificar a possibilidade desse conhecimento ser considerado como um saber.

Referências bibliográficas

BERTINI, L. F.; MORAIS, R. S.; VALENTE, W. R. *A matemática a ensinar e a matemática para ensinar — novos estudos sobre a formação de professores*. São Paulo: L F Editorial, 2017.

BORBA, S.; VALDEMARIN, V. T. A construção teórica do real: uma questão para a produção do conhecimento em educação. *Currículo sem Fronteiras*, 2010, v. 10, n. 2, p. 23–37, jul./dez.

CHARTIER, R. *A história ou a leitura do tempo*. Belo Horizonte, MG: Autêntica Editora, 2009.

FERNANDEZ, C. Revisitando a base de conhecimentos e o conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK) de professores de ciências. *Revista Ensaio*. Belo Horizonte, 2015, v. 17, n. 2, p. 500–528.

HOFSTETTER, R.; VALENTE, W. R. (Orgs.) *Saberes em (trans)formação: tema central da formação de professores*. São Paulo: L F Editorial, 2017.

HOFSTETTER, R.; SCHNEUWLY, B. Saberes um tema central para as profissões do ensino e da formação. In R. Hofstetter; W. R. Valente. *Saberes em (trans)formação — tema central da formação de professores*. São Paulo: L F Editorial, 2017.

TARDIF, M. Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários. Elementos para uma epistemologia da prática profissional dos professores e suas consequências em relação à formação para o magistério. *Revista Brasileira de Educação*. 2000, jan./abr., no. 13.

VALENTE, W. R. (Org.) *Ciências da Educação, Campos Disciplinares e Profissionalização: saberes em debate para a formação de professores*. São Paulo: L F Editorial, 2020.

VALENTE, W. R. et al. (Orgs.) Experts — *saberes para o ensino e para a formação de professores*. L F Editorial, 2021.

Lembrando Ubiratan D'Ambrosio (1932–2021)

Luis Saraiva
CIUHCT, DM da FCUL/Universidade de Lisboa

Nesta comunicação demos uma perspectiva global sobre a vida e obra de Ubiratan D'Ambrosio, com especial relevo para o seu trabalho em História da Matemática e da Ciência, e em particular a sua ação no que se refere à comunidade luso-brasileira de História da Matemática. Realçou-se igualmente a imensa qualidade humana do Professor.

Começou a sua actividade como professor em 1952, no Estado de S. Paulo. Terminou em 1955 o Curso de Matemática na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de S. Paulo (USP), e concluiu o seu doutoramento em Ciências Matemáticas na Escola de Engenharia de S. Carlos (USP) em 1963. Em 1961 passou a leccionar no curso de Matemática da então recém-criada Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Rio Claro, aí permanecendo até à sua ida para os Estados Unidos, para realizar uma especialização pós-doutoramento na Universidade de Brown. Devido à situação criada no Brasil em 1964, com a ditadura militar, Ubiratan ficou nos Estados Unidos cerca de nove anos, leccionando na Brown University (1964–65), na Universidade de Rhode Island (1966–68), e na State University of New York (1965–66 e 1968–72). Em 1970 doutora-se o seu primeiro orientado americano, T. K. Puttaswamy. Só regressa ao Brasil em 1972, a pedido do Professor Zeferino Vaz, reitor da então recém-criada Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), para ser o Director do Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, cargo que exerceu até 1980, tendo sido um dos responsáveis pelas contratações feitas para o instituto, que lhe vão dar reputação internacional em todos os seus campos. É um dos fundadores do Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência (CLE) na UNICAMP, em 1977, e nesse ano há o primeiro doutoramento de um seu orientado no Brasil, Rodney Bassarezzi. É coordenador de Institutos na UNICAMP (1982–86), e Pró-Reitor do Desenvolvimento Universitário (1986–90). Aposenta-se em 1992. É Professor Emérito da UNICAMP em 1995.

Muitas foram as áreas e as organizações em que colaborou, quer brasileiras quer internacionais. Foi consultor da UNESCO – *United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization* (1970–90). Foi Diretor do Projeto Multinacional para a Melhoria do Ensino de Ciências e de Matemática da *Organização dos Estados Americanos* (OEA) (1974–83). Foi membro do Conselho Executivo das *Pugwash Conferences on Science and*

World Affairs entre 1980 e 1986. A esta organização foi atribuído o Prémio Nobel da Paz em 1995, em conjunto com Joseph Rotblat. Entre 1998 e 2002 foi membro do *Institut for Information Technologies in Education* da UNESCO, instituto criado em 1997.

Desenvolveu trabalho importante em História da Matemática e em História da Educação Matemática, tendo recebido nas duas áreas as distinções mais importantes nessas áreas: o *Prémio Kenneth O. May* em 2001, atribuído pela *Comissão Internacional de História da Matemática* de quatro em quatro anos, e a *Medalha Felix Klein* em 2005, distinção da *Comissão Internacional de Instrução Matemática* (ICMI), comissão da *União Matemática Internacional* (IMU), e que é atribuída de 2 em 2 anos.

Foi elemento fundador do HPM – *International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics*, e seu presidente (1984–88); Presidente da *Sociedade Latino-Americana da História das Ciências e da Tecnologia* (1988–92); membro do Comité Executivo da *International Comission on the History of Mathematics* (1989–97); fundador da *Sociedade Brasileira de História da Ciência* em 1991 e seu Presidente (1991–93); fundador da *Sociedade Brasileira de História da Matemática* (SBHMat) em 1999, e seu presidente entre 1999 e 2007; membro do Conselho Consultivo da *Associação de Filosofia e História da Ciência no Cone Sul* entre 2000 e 2004.

O meu primeiro contacto com Ubiratan foi feito durante o Colóquio Internacional realizado em Lisboa em 1987 para comemoração do distinto matemático José Anastácio da Cunha (1744–1787), onde o Professor D'Ambrosio apresentou uma comunicação. Desde então mantivemo-nos sempre em contacto. O Colóquio proporcionou uma reunião dos muitos que se interessavam pela história da Matemática Portuguesa, constatou-se um vazio na investigação nessa área e foi criado o *Seminário Nacional de História da Matemática* (SNHM) no início de 1988. O Professor Ivor Grattan-Guinness, também participante daquele Colóquio Internacional, deu-nos uma ajuda importante para fixar as linhas gerais do que devia ser o funcionamento do SNHM. Uma das regras (que tem sido sempre observada) é ter um convidado não português em todos os Encontros do SNHM. No 1.º Encontro, realizado em 1988 na U. do Minho, foi o Professor D'Ambrosio o nosso primeiro convidado. Esteve também nos Encontros 8.º (1996), 9.º (1997) e 19.º (2006).

Para além de ter sido fundamental a sua ação aglutinadora e de desenvolvimento da comunidade brasileira de historiadores da matemática e do ensino da matemática, Ubiratan foi igualmente importante na criação dos

Encontros Luso-Brasileiros de História da Matemática e a sua actividade em Portugal. Em 1990 o SNHM, consciente da necessidade de ter o contacto de especialistas estrangeiros em História da Matemática, organizou uma Escola de Verão em Évora em 1990. O Professor Ubiratan, sempre atento ao que se passava nesse domínio, aconselhou o seu aluno Sergio Nobre, que estava a preparar doutoramento em Leipzig em História da Matemática sob a orientação de Hans Wussing (Prémio Kenneth O. May em 1993), a assistir a esta Escola. Foi aí que se começou uma relação mais intensa com os investigadores brasileiros, com a criação dos Encontros Luso-Brasileiros de História da Matemática (o 1.º na Universidade de Coimbra em 1993), Encontros esses que se têm vindo a realizar regularmente, com a edição das respectivas Actas[1], oito até hoje, o 9.º está marcado para Outubro deste ano em Setúbal.

Alguma Bibliografia

Ubiratan D'Ambrosio – Para uma história da Etnomatemática ou a matemática dos não-matemáticos – Actas do IV Encontro Luso Brasileiro de História da Matemática, Natal, SBHMat, 2005, pp. 199–213

Ubiratan d'Ambrosio – Um estudo de história institucional da matemática no Brasil do pós-guerra – Actas do 5.º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática, Castelo Branco, CM de Castelo Branco, 2011, pp. 111–122

Sergio Nobre e Luís Saraiva – Ubiratan D'Ambrosio (1932–2021) In Memoriam – *International Archive of the History of Sciences*, Vol. 71, n.º 187, 2021, pp. 177–200.
(inclui uma lista das publicações de Ubiratan nas páginas 187-200)

[1]Uma excepção: o 3.º Encontro, havendo ainda esperança de publicação das suas Actas.

O Planispherio Azimuthal de João Carlos de Brito Capello

Pedro Medeiros, *Vitor Bonifácio* e *Paulo Lopes*
Departamento de Física, Universidade de Aveiro

Este trabalho pretende dar a conhecer um instrumento náutico, o Planisfério Azimutal, inventado, na década de 1860, pelo oficial de marinha João Carlos de Brito Capello (1831–1901). O dispositivo permitia obter com rapidez o azimute, A, verdadeiro de um astro, sendo conhecidas a latitude do local de observação, ϕ, e a declinação, δ, e altura, h, do astro.

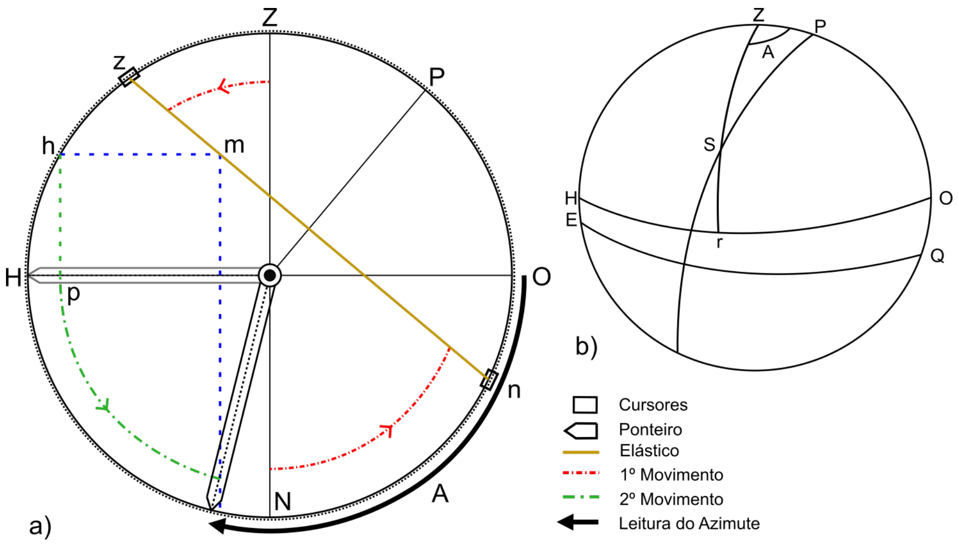


Figura 1: Face simplificada do planisfério azimutal (a) e da esfera celeste (b). Para a definição dos símbolos consulte-se o texto.

O instrumento possuía forma circular, 25 cm de diâmetro, continha dois cursores, um elástico e um ponteiro transparente graduado no valor dos cossenos de 0 a 90 graus. O semi-círculo superior (HZO) da face do instrumento correspondia ao semi-plano do meridiano do lugar, em que Z é o zénite. Este incluía linhas verticais e horizontais de grau em grau, enquanto que o semi-círculo inferior era atravessado pelo prolongamento das linhas verticais presentes na metade superior (não representadas na figura 1). As linhas horizontais representam a interceção entre os planos do meridiano e dos almicantarados, isto é os círculos menores paralelos ao horizonte. Os dois cursores deslocam-se a partir do zénite, Z, e do nadir, N, correspondendo o elástico que os une à interceção dos planos do meridiano e do paralelo de declinação do astro. O semi-círculo inferior (HNO) corresponde, na leitura do azimute, ao rebatimento do semi-plano do horizonte sobre o plano do meridiano local. No exemplo ilustrado na figura 1, P corresponde ao pólo Norte Celeste, H e O aos pontos cardeais Sul e Norte, respetivamente, e a curva EQ ao equador celeste. Para determinar o azimute marca-se primeiro a altura, h do astro. Movem-se, depois, os cursores para os pontos correspondentes aos ângulos z e n em que $z = \phi - \delta$ e $n = \phi + \delta$. As marcações horizontais e verticais permitem determinar os pontos m do elástico e p do ponteiro quando este se encontra na horizontal. Rodando o ponteiro, a interseção de p com a linha vertical que passa por m determina, neste exemplo, o azimute, A [1, 3].

O Planisfério Azimutal permitia resolver, de forma gráfica, um triângulo esférico. Na situação ilustrada na figura 1b, isto correspondia a resolver a equação

$$\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{ZS+PS+ZP}{2}\right) \times \sin\left(\frac{ZS+PS+ZP}{2} - PS\right)}{\sin(ZP) \times \sin(ZS)} \tag{1}$$

em que A é o azimute do astro, ZS a distância zenital $(90^\circ - h)$, PS a distância polar $(90^\circ - \delta)$ e ZP a colatitude $(90^\circ - \phi)$, sem consultar tabelas de logaritmos. O planisfério azimutal substituía, assim, a leitura de cinco logaritmos nas tabelas e de algumas operações aritméticas pelo cálculo dos ângulos z e n, a manipulação do instrumento e a leitura do resultado. Note-se que o instrumento pode requerer manipulações diferentes noutras combinações de latitude e declinação [1].

A referência mais antiga encontrada que refere o planisfério data de 1869. No dia 7 de junho o diretor do Observatório da Marinha, Filippe Folque (1800–1874), enviou um parecer favorável para o Ministério da Marinha em consequência do qual se determinou, por portaria de 22 do mesmo mês publicada no Diário do Governo, "que o referido planispherio azimuthal seja adoptado na armada nacional, e que o seu inventor, o primeiro tenente da armada, João Carlos de Brito Capello, seja muito especialmente louvado por ter conseguido com este seu novo trabalho scientifico dotar a marinha com mais um instrumento que facilita extremamente os usos da navegação" [6]. Na década de 1890 o Planisfério Azimutal ainda fazia parte do conjunto de instrumentos a bordo dos navios da armada Portuguesa. "Seria ocioso dar aqui a descripção do planispherio de Capello, porque é bem conhecida e, alem disso, existe publicada n'um pequeno folheto de trez paginas que é distribuido a todos os navios" [7, p. 117], e era ensinado na 1.ª cadeira da

Escola Naval [5]. O Planisfério Azimutal teve, ainda, alguma visibilidade internacional. João Brito Capello levou-o, em 1874, à Conferência Marítima de Londres [2]. No ano de 1876, o Planisfério esteve exposto na "South Kensington Instrument Exhibition", uma das iniciativas realizadas com o objetivo de melhorar o ensino das ciências no Reino Unido [4].

Foi assim, com surpresa, que não conseguimos encontrar um exemplar do instrumento. Quais as razões que levaram ao seu abandono? Desenvolvimento de instrumentos mais precisos? Aparecimento de métodos mais práticos para a determinação do Azimute? Não o sabemos. Fontes coevas referem "um tão util apparelho e tão simples que qualquer o póde executar por suas mãos com a maior facilidade" [7, p. 120].

Com este trabalho pretendemos relembrar a existência de um instrumento de navegação de invenção portuguesa e reflectir sobre a necessidade de preservar e valorizar o património instrumental, nomeadamente o de construção mais frágil.

Referências

[1] J. Capello, *Planispherio Azimuthal*, Imprensa Nacional, Lisboa, 1869.

[2] J. Capello, "Conferencia meteorologica e marítima", *Diario do Governo*, No. 263 (1874), pp. 1893–1895.

[3] J. Capello, *Azimuthal Planisphere*, Imprensa Nacional, Lisboa, 1876.

[4] V. Bonifácio e I. Malaquias, "Portugal and the 1876 South Kensington Instrument Exhibition", *Quaderns d'História de l'Enginyeria*, Vol. XIII (2012), 115–131.

[5] P. Carvalho, "Programma da primeira cadeira da Escola Naval", *Diario do Governo*, No. 275 (1895), pp. 3257.

[6] J. Coelho, "Direcção Geral da Marinha, 1ª Repartição", *Diario do Governo*, No. 139 (1869), pp. 768.

[7] V. Costa, "Algumas reflexões aobre o methodo para resolver graphicamente o triangulo espherico determinativo da posição de um astro", *Anais do Club Militar Naval*, Vol. XXIII. No. 4 (1893), 115–122.

Instrumentos antigos para a construção de curvas: Lemniscata de Bernoulli

Helena Sousa Melo, *Maria do Carmo Martins*
Faculdade de Ciências e Tecnologia e Centro de Estudos Humanísticos, Universidade dos Açores

No Museu de História Natural e Instrumentação Científica da Universidade de Modena e Reggio Emília, fundado em 1990, podemos encontrar uma coleção, com mais de 200 peças, de reconstruções artesanais dos instrumentos antigos, de acordo com as descrições contidas na literatura científico-técnica, numa ligação entre a matemática e a mecânica, e consoante as propriedades específicas de cada uma das curvas que as distinguem como lugares geométricos. Como um exemplo desses instrumentos, iremos destacar aquele que permite traçar a Lemniscata de Bernoulli.

Jacob I nasceu na Basileia em 6/01/1655 e faleceu em 16/08/1705 na mesma cidade. Influenciado pelos pais, estudou Filosofia e Teologia, tendo obtido o Mestrado em Filosofia na Universidade de Basileia em 1671 e, cinco anos mais tarde, a licenciatura em Teologia. Contra a vontade dos pais, estudou também Matemática e Astronomia, vindo a lecionar Matemática na mesma universidade até à sua morte. Em parceria com o seu irmão Johann I, estudou e difundiu o cálculo de Leibniz na Europa, deixando vários artigos publicados em jornais científicos da época e uma obra incompleta intitulada *Ars Conjectandi*. Na área da matemática e da física, a família Bernoulli destacou-se por ter dado ao mundo, durante um século, oito eminentes matemáticos.

Jacob era fascinado por curvas matemáticas e pelo cálculo diferencial. Em setembro de 1694, Bernoulli introduziu a lemniscata, como uma modificação de uma elipse, apresentando-a na página 336 da revista científica mensal alemã *Acta Eruditorum*, fundada entre 1682 e 1782. A lemniscata foi então descrita, como semelhante a uma fita com laço e sendo o lugar geométrico dos pontos do plano cujo produto das distâncias a dois pontos fixos é constante e igual ao quadrado da metade da distância entre esses dois pontos.

A Lemniscata de Bernoulli é uma curva algébrica de quarto grau, sendo um caso especial da Oval de Cassini, uma curva estudada pelo matemático e astrónomo italiano Giovanni Domenico Cassini (1625–1712). Esta, por sua vez, é o lugar geométrico dos pontos do plano cujo produto das distâncias a dois pontos fixos é uma constante. A realçar que tal curva já tinha sido estudada pelo matemático grego Eudoxo de Cnido (390–337 a. C.) aquando do movimento da Terra vista a partir do seu centro, sendo então conhecida por “hipópeda”. A palavra Lemniscata deriva do latim “lēmniscātus” que significa “decorado com fitas” e do grego “ληµνίσκος”, que significa “fita”.

O instrumento que constrói a Lemniscata de Bernoulli é da autoria do engenheiro mecânico escocês, James Watt (19/01/1736–25/08/1819), responsável pelo desenvolvimento da máquina a vapor. O mecanismo de Watt consiste de uma série de três hastes, duas longas e de igual comprimento nas extremidades da cadeia, ligadas por uma terceira haste curta no meio. As extremidades são fixas em relação uma à outra, e as três hastes são livres para girar em torno das articulações onde elas se encontram. Assim, considerando a ligação do comprimento fixo entre as extremidades, a invenção de Watt é um exemplo de um mecanismo de quatro barras. Esse instrumento não gera um movimento em linha reta, mas uma curva em forma de oito, denominada curva de Watt. Quando os comprimentos das suas hastes e da sua base são escolhidos para formar um paralelogramo cruzado, obtemos a Lemniscata de Bernoulli.

Watt, em 1784, ao estudar a curva que descreve o lugar geométrico do ponto médio, M, do segmento de reta $[AB]$ da articulação de um quadrilátero entrecruzado $[ABF_2F_1]$, no caso particular em que $\overline{AB} = 2a$, e considerando os pontos fixos F_2 e F_1 tais que $\overline{F_1F_2} = 2a$, bem como $\overline{F_1A} = \overline{F_2B} = a\sqrt{2}$, observou que obtinha a Lemniscata de Bernoulli (Figura 1).

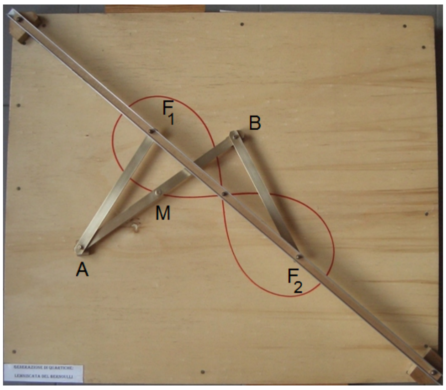


Figura 1: Instrumento de Watt

Através da Geometria Euclidiana, e em específico a teoria relativa à semelhança e congruência entre triângulos, demonstramos, de acordo com as considerações anteriormente apresentadas, a condição da referida curva, ou seja, $\overline{F_1M} \times \overline{F_2M} = a^2$.

Bibliografia

Lockwood, E. H. (1961). *A Book of curves.* Cambridge University Press.

Yates, R. C. (1947). *A Handbook on Curves and their properties.* Edwards Brothers, Inc., Michigan. U. S. A.

http://www.macchinematematiche.org/

Reforma da Matemática Moderna em Portugal: subsídios da imprensa

Mária Cristina Almeida[1]
Centro Interdisciplinar de Ciências Sociais (CICS.NOVA),
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

O movimento da matemática moderna em Portugal tem sido estudado recorrendo essencialmente a documentação oficial, a textos publicados em revistas da especialidade, a materiais de arquivo ou a testemunhos de participantes. Este trabalho pretende alargar as fontes estudadas, integrando artigos publicados em jornais diários de grande circulação, permitindo aceder a documentação dirigida ao grande público e, portanto, com um olhar e uma intencionalidade diferente da dos textos académicos, redigida por pessoas, jornalistas na sua maioria, exteriores ao corpo educativo. O objetivo deste texto é, pois, através do estudo de artigos sobre matemática moderna publicados em diários lisboetas, alargando o conhecimento sobre o modo como a reforma se desenvolveu. Os diários trazem-nos um ponto de vista próximo do quotidiano e da "pequena história", dão-nos a visão do exterior da comunidade educativa trazida pelos jornalistas e ocasionalmente publicam textos dos próprios atores da reforma. Como veremos, nas palavras dos jornalistas, em especial nos títulos, a reforma é associada à modernidade, ao progresso e ao desenvolvimento. Mas veremos também a preocupação dos responsáveis com mudanças demasiado radicais. Observamos ainda, da parte de alguns matemáticos e educadores, o gradual desencanto à medida que se vai compreendendo o desajuste das novas propostas curriculares à realidade escolar. As outras fontes — artigos em revistas educacionais ou manuais escolares — omitem a descrição do quotidiano, ou as intenções dos reformadores. No caso destas reportagens quer pela arte dos jornalistas, quer pela inteligência dos entrevistados, o essencial das ideias norteadoras da reforma parece ter sido publicado recorrendo precisamente a entrevistas.

Em 6 de março de 1963, o jornal *Diário Popular* inicia uma série de quatro artigos da autoria do jornalista Corregedor da Fonseca com o título genérico "Revolução no ensino" em que se refere uma nova conceção da Matemática e se propõe uma reforma para o ensino da disciplina (Fonseca, 1963a, 1963b, 1963c, 1963d). Após num primeiro artigo, desenvolver as

[1]Este trabalho foi parcialmente financiado por fundos portugueses através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I. P., no contexto do projeto PTDC/CED-EDG/32422/2017.

ideias que circulam internacionalmente, no segundo artigo (1963b), Corregedor da Fonseca vai entrevistar Sebastião e Silva. Este justifica a necessidade de "modernização" dos conteúdos da Matemática nos liceus, com a enorme expansão científica e tecnológica que se deu após a 2.ª Guerra Mundial, e, adaptando para Portugal os argumentos empregues pelos defensores do movimento internacional, realça o papel da matemática na ciência, na técnica, na indústria, na economia e, na cultura dos países mais desenvolvidos. Pretendia uma nova matemática nas escolas e, por isso, defendia a atualização dos conteúdos ensinados e uma renovação dos métodos de ensino. Quando observamos as palavras de Sebastião e Silva, ressalta uma preocupação em temperar os entusiasmos em relação à reforma. Várias vezes ele se refere à cautela, à necessidade de dar passos curtos, mas certeiros, procurando evitar que as suas palavras sejam interpretadas como propondo alterações radicais do *status quo*. Prosseguindo, Fonseca menciona algumas iniciativas nesse sentido, a primeira, um conjunto de conferências de Gustave Choquet, no Liceu Pedro Nunes e nas Faculdades de Ciências de Lisboa, Porto e Coimbra, ocorrera em 1963. A segunda iniciativa mencionada era um curso de atualização de professores dos liceus iniciado em novembro de 1962 e que ainda estava a decorrer na Faculdade de Ciências de Lisboa, promovido pelo Centro de Estudos Matemáticos do Instituto de Alta Cultura, dirigido por Sebastião e Silva e com a colaboração de João dos Santos Guerreiro. Neste curso abordaram-se lógica matemática, teoria dos conjuntos, álgebra abstrata, geometrias, topologia geral, entre outros temas. No dia seguinte, o terceiro artigo de Corregedor da Fonseca (1963c) é baseado numa entrevista a Jaime Leote, metodólogo de Matemática do Pedro Nunes. Leote desenvolvendo a visão de que a matemática moderna permite ao aluno aperfeiçoar o seu pensamento através de abstrações a partir de situações concretas. Após elencar os diferentes materiais e métodos didáticos usados no Liceu, vai insistir na necessidade de atualização dos professores, especialmente a científica, que considera indispensável para o sucesso da introdução da "matemática nova" no ensino. Leote considera mesmo que essa vertente é mais importante que uma atualização dos conteúdos curriculares. A nova abordagem apresentava a Matemática de uma forma unificada, apoiando-se na linguagem dos conjuntos, dando especial destaque às estruturas algébricas e à lógica, mas a preparação científica que uma licenciatura em Matemática proporcionava aos futuros professores estava desfasada. O último artigo (Fonseca, 1963d) aborda as experiências levadas a cabo por João Nabais no seu colégio do ensino primário envolvendo o uso de múltiplos materiais, em especial o material Cuisenaire. O início da reforma curricular norteada pelas ideias do movimento acontece após a nomeação em julho de 1963 pelo então Ministro Galvão Telles de uma Comissão encarregada da atualização dos programas da disciplina de Matemática do 3.º ciclo do ensino liceal.

Quase cinco anos depois da experiência se iniciar, o *Diário de Notícias* entrevista Sebastião e Silva. Num artigo que tem as honras de primeira página, o professor retoma temas que já tinha discutido noutros jornais e, na parte final, faculta algumas informações sobre o decurso dos trabalhos, nomeadamente que, a partir do ano letivo de 1965–66 o projeto de modernização do ensino de matemática nos liceus passou a ser executado por intermédio do Gabinete de Estudos e Planeamento da Ação Educativa. Segundo ele, trata-se de uma obra que irá certamente exigir grande esforço financeiro e o trabalho intenso de muitos professores. Mas é, em qualquer caso, uma obra que se impõe, embora tenha de vir a ser realizada com tempo e com prudência, num alargamento progressivo do que já se fez (Alves, 1968). Já depois do alargamento a outros níveis de ensino, existem indícios de que o apoio à reforma não era unânime, como é o caso do artigo da autoria de João Ilharco (1969) que questiona os conteúdos de um dos livros utilizados no CPES.

> O primeiro ano do Ciclo Preparatório é, na sua generalidade, frequentado por alunos de dez anos de idade e que, dentro do que é natural e normal, só muito excepcionalmente poderão compreender a série de abstrações com as quais são postos em contacto nas primeiras semanas de aula. (Ilharco, 1969, p. 1)

Um aprofundamento deste tema poderá ser encontrado no livro *A matemática moderna nos jornais diários de Lisboa* da Editora Livraria da Física.

Fontes

Alves, A. D. (1968). Às portas dum novo mundo. Amanhã a matemática “comanda” a humanidade. *Diário de Notícias*, 23/01/1968, 1, 5.

Fonseca, C. (1963a). Revolução no ensino — (1) Uma nova concepção da Matemática inteiramente diferente da tradicional principia a ser conhecida no nosso país. *Diário Popular*, 6/3/1963, 6.

Fonseca, C. (1963b). Revolução no ensino — (2) A introdução das matemáticas modernas no ensino secundário e a sua necessidade. *Diário Popular*, 7/3/1963, 7.

Fonseca, C. (1963c). Revolução no ensino — (3) A formação do professor de liceu (mais do que a elaboração de novos programas) é indispensável para o rejuvenescimento do ensino secundário — afirma o dr. Jaime Leote, metodólogo de Matemática. *Diário Popular*, 8/3/1963, 13.

Fonseca, C. (1963d). Revolução no ensino — (conclusão) É preciso que atinjam a escola primária os novos métodos didáticos da matemática. *Diário Popular*, 9/3/1963, 7.

Ilharco, J. (1969). Ácerca do ensino da Matemática no Ciclo Preparatório. *República*, 18/1/69, 1, 8.

Matemática Recreativa na *Folha Informativa dos professores do 1.º grupo*[1]

Alexandra Rodrigues, *José Manuel Matos*
Centro Interdisciplinar de Ciências Sociais (CICS.NOVA), Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, UIED – Portugal

A *Folha Informativa dos Professores do 1.º Grupo (E. T. P.)* era um periódico mensal português, dirigido aos professores de Matemática no Ensino Técnico, cuja primeira edição foi publicada em janeiro de 1967. O seu Diretor foi o professor de Matemática e autor de livros de texto, Aires Biscaia, e até março de 1972 são publicadas 66 edições e 9 suplementos. Cada edição era constituída por um conjunto de folhas A4 (entre 5 e 37 páginas que dependia do número de colaboradores em cada edição), numeradas e impressas em stencil numa das faces na Escola Industrial e Comercial de Sintra, no Cacém, próximo de Lisboa, onde Biscaia era Diretor.

As primeiras edições encontram-se organizadas em rubricas, cuja notação, a redação só esclarece na *Folha Informativa*, n.º 4 (1967). As rubricas iniciais seriam: AGM – Aprendizagem Geral da Matemática; MM – Matemática Moderna; MR – Matemática Recreativa; EFQ – Elementos de Física e Química; TI – Tradução de Inglês; FR – Física Recreativa (surge a nomenclatura na *Folha Informativa, n.º 7*, 1967) e PA – Problemas de Almanaque. As rubricas assinalavam o início das páginas, tendo a redação afirmado que esta organização permitiria o arquivo, não por edição da *Folha* mas por temática.

Nesta comunicação iremos mostrámos quais os temas trabalhados na rubrica *Matemática Recreativa*, que teve início por iniciativa de Adriano Joaquim Vaz Velho Júnior, licenciado em Ciências Matemáticas pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Após um percurso profissional diversificado, tendo sido professor do ensino particular em vários colégios, diretor, durante três anos, do Colégio Portugal, na Parede; professor do ensino técnico oficial, na escola Comercial Veiga Beirão de Lisboa e na Escola Industrial Marques de Pombal. Na data da publicação das *Folhas* exercia o cargo de professor-diretor da escola Industrial e Comercial de Montemor-o-Novo.

[1]Este trabalho foi financiado por fundos portugueses através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I. P., no âmbito dos projetos UIDB/04647/2020 e UID/CED/02861/2016 do CICS.NOVA – Centro Interdisciplinar de Ciências Sociais da Universidade Nova de Lisboa.

Os problemas apresentados no âmbito da Matemática Recreativa nas Folhas Informativas são muito atuais e perfeitamente enquadráveis para aplicação na aula de matemática contemporânea ou em clubes de matemática nas escolas, tais como “Se dou \$70 a cada um dos pobres que estão à minha porta, ficarei com \$24. Se quiser dar a cada um \$90, faltar-me-ão \$32. Qual o número de pobres e que dinheiro tenho eu? (28 pobres e 220\$00)” (S/ Autor, 1967).

Veja-se um exemplo de uma curiosidade Matemática, publicada em maio de 1967, na Folha Informativa n.º 7, onde se explicava o algoritmo da multiplicação usado pelos árabes.

> Num retângulo, como o indicado na figura, escreve-se o primeiro fator da esquerda para a direita (5472), sobre o lado BC. O segundo fator, (248) sobre AB. Em cada casa escreve-se o produto dos algarismos multiplicando pelo multiplicador. Exemplo: $8 \times 5\ = 40$, colocando o algarismo das dezenas o espaço esquerdo e o das unidades à direita; $8 \times 4 = 32$, etc.
>
> Somam-se à maneira ordinária, da direita para a esquerda por fim, o total dos produtos parciais, segundo as colunas limitadas pelas linhas ponteadas.

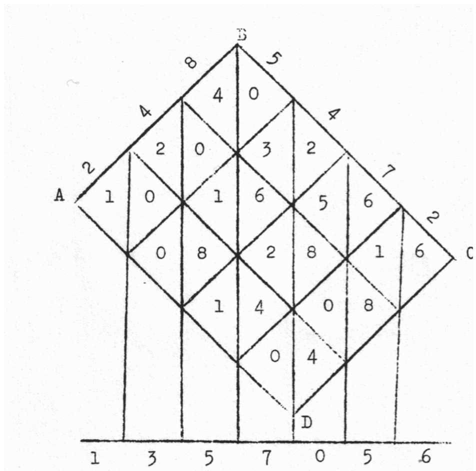


Figura 1: Algoritmo da multiplicação árabe.
Fonte: Velho, 1967, p. 11

Referências

Matos, J. M.; Novaes, B. W. D. & Gabriel, L. M. C. (2009). Recompondo a cultura da matemática escolar: a intervenção da Folha Informativa dos professores do 1.º Grupo (E. T. P.). *Atas do XX SIEM – Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 228–238). Viana do castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Matos, J. M., & Rodrigues, A. S. C. (2021). A folha informativa do ensino técnico: uma ferramenta de partilha de experiências. *REAMEC – Rede Amazônica De Educação Em Ciências E Matemática*, 9(3), e21091. `https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.13019`

Rodrigues, A.; Novaes, B. W. D. & Matos, J. M. (2016). A cultura escolar em conflito: ensino técnico e matemática moderna em Portugal, *Revista Diálogo Educacional*, v 16, n. 48. (pp. 381–402). Curitiba.

Velho, A. V. (1967). Matemática Recreativa. *Folha Informativa dos professores do 1.º Grupo (E. T. P.)*, n.º 7, 11.

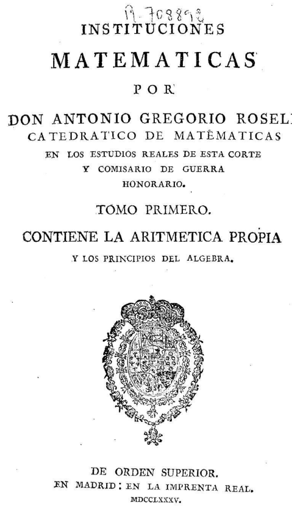
S/ Autor. (1967). Problemas de Almanaque. *Folha Informativa dos professores do 1.º Grupo (E. T. P.)*, n.º 8, 7–8.

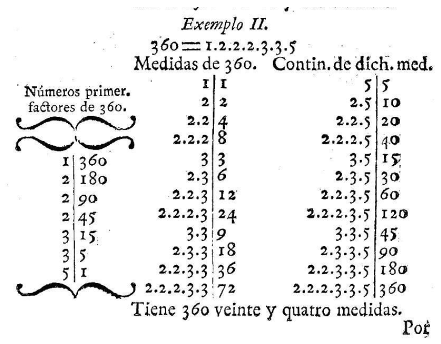
Sobre *Instituciones Matemáticas* (1785) de Antonio G. Rosell Viciano (ca. 1748–1829). La formación del autor y sus fuentes

Luis Español González
Universidad de La Rioja (Logroño, España)

Juncal Manterola Zabala
UPV/EHU (Donostia-San Sebastián, España)

Nuestro interés por Rosell y su obra matemática surgió durante los preparativos de la tesis doctoral [2], de la que los autores de estas páginas fuimos, por orden alfabético, codirector y autora (ver también [3]). Estudiamos con detalle *Instituciones Matemáticas* porque el autor quiso escribir un texto de «matemática pura» dirigido a «matemáticos de profesión». La obra quedó incompleta, de los dos tomos previstos solo publicó el primero sobre aritmética y álgebra, lo que hace que su importancia disminuya. No obstante, prestamos atención al espíritu reformador que Rosell transmitía al planificar su libro de texto y la huella de dicho propósito en el primer y único tomo publicado [1].


INSTITUCIONES
MATEMATICAS
POR
DON ANTONIO GREGORIO ROSELL
CATEDRATICO DE MATEMATICAS
EN LOS ESTUDIOS REALES DE ESTA CORTE
Y COMISARIO DE GUERRA
HONORARIO.
TOMO PRIMERO.
CONTIENE LA ARITMETICA PROPIA
Y LOS PRINCIPIOS DEL ALGEBRA.
DE ORDEN SUPERIOR.
EN MADRID: EN LA IMPRENTA REAL.
MDCCLXXXV.


Exemplo II.
360 = 1.2.2.2.3.3.5

Números primer. factores de 360.		Medidas de 360.		Contin. de dich. med.	
		1	1	5	5
		2	2	2.5	10
		2.2	4	2.2.5	20
		2.2.2	8	2.2.2.5	40
1	360	3	3	3.5	15
2	180	2.3	6	2.3.5	30
2	90	2.2.3	12	2.2.3.5	60
2	45	2.2.2.3	24	2.2.2.3.5	120
3	15	3.3	9	3.3.5	45
3	5	2.3.3	18	2.3.3.5	90
5	1	2.2.3.3	36	2.2.3.3.5	180
		2.2.2.3.3	72	2.2.2.3.3.5	360

Tiene 360 veinte y quatro medidas.
Por

Figura 1: De *Instituciones*: Portada y tabla de divisores de 360. Ejemplar de la Biblioteca Nacional de España.

Rosell fue Bachiller en Filosofía (1768) y Maestro en Artes (1769) por la Universidad de Valencia. Carlos III había expulsado de sus dominios a los jesuitas en 1767, poniendo fin al Colegio Imperial de esta orden religiosa en Madrid. En su lugar, fue creado en 1772 un centro público y laico llamado Reales Estudios de San Isidro. Rosell ganó por oposición una de las dos cátedras de matemáticas que se convocaron para este nuevo centro y la regentó hasta que fue cesado en 1794 a causa de una enfermedad con síntomas de demencia que empezó a manifestarse en 1783. Se había formado en Valencia estudiando *Elementa matheseos universae* (1713–1715) de Ch. Wolff y utilizó esta obra como manual para sus enseñanzas en los primeros años de catedrático en los Reales Estudios. El mismo año en que se inauguró este centro empezó a publicarse la obra *Elementos de Matemáticas* (1772–83), 11 volúmenes que B. Bails compuso con amplio apoyo oficial. En 1776 apareció un extracto en 3 volúmenes titulado *Principios de Matemáticas* para facilitar su uso como manual para estudiantes, que pasó a ser el texto de los Reales Estudios. Pero Rosell tenía un enfoque diferente para enseñar matemáticas puras formando matemáticos de profesión y no ingenieros. Su libro de texto salió de la imprenta en 1785 con casi cuatrocientas páginas de naturaleza doctrinal precedidas por unas cuarenta ideológicas en las que expone su visión de las matemáticas y de su enseñanza,

El contenido doctrinal responde al título «De los principios de la Aritmética Universal», y está dividido en: «Parte primera: De la Aritmética numérica» (pp. 5–188) y «Parte segunda: De los principios del Álgebra» (pp. 189–392). A lo largo del desarrollo doctrinal, Rosell no menciona a los autores que tomó como fuente de inspiración para su trabajo, nuestra investigación en curso debe encontrarlos comparando *Instituciones* con los textos que su autor tuvo a mano con seguridad o con probabilidad. Decimos esto con una sola excepción, la teoría de límites que forma parte del álgebra de cantidades variables; allí (nota al pie de p. 286) Rosell se proclama seguidor de d'Alembert al afirmar que «los infinitesimales acarrean inexactitud y contradicciones que promovieron disputas entre los partidarios de Newton y los de Leibniz, con las que ha terminado d'Alembert mediante los límites, alternativa a las fluxiones y los infinitesimales».

Es en las páginas iniciales de contenido ideológico donde Rosell relaciona o contrapone su trabajo con el de otros autores. En el «Prólogo» (pp. I–XXIV) rechaza las obras que plantean la matemática pura como mero trámite para explicar la mixta o aplicada. Se distancia de la aritmética y el álgebra tal como fue expuesta por E. Bézout, el inspirador en estas materias de Bails, a quien no menciona. Respecto al título «Aritmética Universal», lo identifica con la obra homónima de Newton (1707) en cuanto considera la aritmética numérica como parte del álgebra, comprendiendo ambas bajo el nombre de aritmética universal «según lo hizo el Caballero Newton».

Sostiene Rosell que pasó el tiempo de los *Elementos* tal como fueron formulados por Euclides, ahora la matemática se ha de basar toda ella en el lenguaje algebraico, empezando por la aritmética y el álgebra. Por eso critica el «Curso completo» (1774) del Abate Sauri que usa distintos lenguajes en cada parte de la matemática. En un enfoque filosófico del papel que juegan en la matemática la lógica, la dialéctica análisis-síntesis y el lenguaje algebraico, Rosell no se opone a la *Logique* (1780) de B. de Condillac pero matiza algunas de sus propuestas. Por otra parte, expresa reconocimiento «al Abate Bossut, y al Brigadier Don Carlos Lemaur», por procurar en sus obras una exactitud similar a la que él pretende.

A fin de exponer una matemática pura que forme matemáticos profesionales versados en la exactitud conceptual, en la «Instrucción proemial» (pp. XXV–XLII) Rosell vuelve la mirada a los *Elementos* de Euclides que antes ha rechazado por su lenguaje geométrico ya desfasado, y lo hace en busca de modelo para una teoría bien elaborada con estructura lógica deductiva: axiomas, definiciones, teoremas. . . ; pero que él no empieza por la geometría sino con unos axiomas tipo las nociones comunes de Euclides que dan paso a las razones de cantidades o de números, con las que elabora la aritmética numérica y el inicio del álgebra hasta llegar a la teoría de las proporciones. Este es el aspecto más destacado de su enfoque, desarrollado con aciertos y errores, pero dejando la gran incógnita de cómo habría sido su continuación en el segundo volumen inédito. Lo sabremos si algún día aparece el manuscrito que tenía elaborado, según afirmaron algunos contemporáneos.

Referencias

[1] L. Español y J. Manterola, "Antonio Gregorio Rosell Viciano (ca. 1748–1829): *Instituciones Matemáticas* (1785)", *Cuadernos dieciochistas*, Vol. 22 (2021), pp. 133–169.

[2] J. Manterola, "Las matemáticas en los estudios de náutica en España en el siglo XVIII: estudio comparativo de los libros de texto empleados en la formación de pilotos y guardiamarinas", Tesis de Doctorado, Universidad de La Rioja, España, 2016.

[3] J. Manterola e I. Ibáñez, "Noticia de algunos textos para la enseñanza de la náutica en España en el siglo XVIII", *Ciencia y técnica entre la paz y*

la guerra: 1714, 1814, 1914, SEHCYT, Vol. 1, 2016, Ed. F. A. González Redondo, pp. 155–162.

Latitude por Duas Alturas do Sol — Proposta de Cornelis Douwes

Ana Queirós
Escola Naval

A partir de finais do século XV, os pilotos passaram a determinar a latitude pela passagem meridiana do Sol. O processo utilizado, com cálculos bastante simples, tinha o inconveniente da necessidade de observação do astro no instante em que atingia a sua altura máxima. Caso não fosse possível, era necessário esperar pelo dia seguinte. Daí que diversos autores tenham sugerido soluções para determinar a latitude pela altura do Sol a qualquer hora do dia, tendo sido Pedro Nunes um dos primeiros a avançar com uma solução. Em 1740, o holandês Cornelis Douwes apresentou uma solução, divulgada pela tradução para inglês feita por Richard Harrison, em 1759. Segue-se a descrição do mesmo.

Para a resolução do seu método, Douwes criou as suas próprias tabelas de logaritmos (ver figura 1), para facilitar a obtenção dos valores necessários. Este método é iterativo, pelo que, para se efetuarem os cálculos, é necessário conhecer um valor estimado da latitude e, no final, o valor obtido deve ser comparado com o valor estimado e é avaliada a sua diferença (é aceite uma diferença de até dez minutos).

No método de Douwes, as incógnitas consideradas são as duas alturas observadas (h_1 e h_2) obtidas através de instrumentos próprios para o efeito (por exemplo, o sextante), o tempo para o meio dia das duas observações (t_1 e t_2) contabilizado aquando das observações, a declinação (D) cujo valor é retirado das tábuas de declinação e a latitude (L) que é o objetivo final do método.

Tendo em conta as incógnitas apresentadas, utilizam-se três equações base que resolvem, respetivamente, o triângulo de posição da primeira (1) e da segunda (2) observação e a diferença de ângulos no polo (3), ou seja, a diferença de tempo entre as observações:

$$\sin h_1 = \sin L \sin D + \cos L \cos D \cos t_1 \tag{1}$$

$$\sin h_2 = \sin L \sin D + \cos L \cos D \cos t_2 \tag{2}$$

$$\cos t_1 - \cos t_2 = 2 \sin \frac{t_1 + t_2}{2} \sin \frac{t_2 - t_1}{2} \tag{3}$$

Numa primeira etapa, subtrai-se as equações (1) e (2),

$$\sin h_1 - \sin h_2 = \cos L \cos D(\cos t_1 - \cos t_2) \tag{4}$$

substitui-se a diferença de ângulos no polo (3),

$$\sin h_1 - \sin h_2 = \cos L \cos D \left(2 \sin \frac{t_1 + t_2}{2} \sin \frac{t_2 - t_1}{2} \right) \tag{5}$$

e resolve-se em ordem a $2 \sin \frac{t_1+t_2}{2}$,

$$2 \sin \frac{t_1 + t_2}{2} = (\sin h_1 - \sin h_2) \sec L \sec D \csc \left(\frac{t_2 - t_1}{2} \right) \tag{6}$$

onde importa referir que $\frac{t_1+t_2}{2}$ representa a hora média e $\frac{t_2-t_1}{2}$ representa metade do intervalo de tempo, que são parâmetros que fazem parte da tabela de Douwes (ver figura 1).

Utiliza-se a equação (6) para obtenção dos valores de t_1 e t_2, da seguinte forma:

1. Entrar com o valor de metade do intervalo de tempo na tabela de Douwes, que devolve o valor do logaritmo da cossecante;
2. Somar os valores dos logaritmos das secantes de L e de D (tabelas de logaritmos);
3. Somar o logaritmo da diferença dos senos das alturas (tabelas de funções trigonométricas);
4. Procurar o valor obtido na coluna da "hora média" da tabela de Douwes, que corresponde ao valor do logaritmo do seno de duas vezes esse argumento — retirar o valor da hora média em horas, minutos e segundos;
5. Somar e subtrair à hora média o valor de metade do intervalo de tempo — obtém-se os valores de t_1 e t_2, respetivamente.

Obtidos os valores de t_1 e t_2, volta-se às equações (1) e (2) e seleciona-se a equação que utiliza o valor de t correspondente à observação da maior altura — para efeitos explicativos, assume-se que a maior altura foi observada em t_2, ou seja, $h_2 > h_1$. Então, do lado direito da equação (2), adiciona-se e subtrai-se $\cos L \cos D$ e resolve-se em ordem a $\cos(L - D)$:

$$\sin h_2 = \sin L \sin D + \cos L \cos D - \cos L \cos D + \cos L \cos D \cos t_2 \tag{7}$$

$$\Leftrightarrow \sin h_2 = \cos(L - D) - \cos L \cos D(1 - \cos t_2) \tag{8}$$

$$\Leftrightarrow \cos(L - D) = \sin h_2 + \cos L \cos D(1 - \cos t_2) \tag{9}$$

Douwes criou também o chamado $LogRising(x)$, que é equivalente ao $senoverso(x)$ e que corresponde a $1 - \cos(x)$. Inclusive, nas suas tabelas de logaritmos, criou uma coluna para o *Rising* (ver figura 1). Na equação (9), o valor de L do lado esquerdo da equação é o valor que se pretende obter, enquanto que o valor de L do lado direito da equação corresponde ao valor da latitude estimada. Recorrendo novamente às tabelas de logaritmos e à particularidade dos logaritmos transformarem multiplicações em somas, resolve-se facilmente a última equação, obtendo-se o valor da latitude. Tratando-se de um processo iterativo, avalia-se a proximidade entre os valores da latitude estimada e da latitude obtida e aceita-se o resultado, ou repete-se o processo, utilizando como latitude estimada o valor obtido na primeira iteração.

The New LOGARITHMIC SOLAR TABLES. 21

H	M	S	½ Elapfed Time.	Middle Time:	Rifing.	H	M	S	½ Elapfed Time.	Middle Time.	Rifing
1	36	20	0.38927	4.91176	3.93975	1	48	20	0.34172	4.95931	4.04003
1	36	30	0.38856	4.91247	3.94123	1	48	30	0.34110	4.95993	4.04134
1	36	40	0.38786	4.91317	3.94271	1	48	40	0.34048	4.96055	4.04265
1	37	00	0.38646	4.91457	3.94466	1	49	00	0.33925	4.96178	4.04526
1	37	20	0.38506	4.91597	3.95859	1	49	20	0.33803	4.96300	4.04786
1	37	30	0.38436	4.91667	3.95005	1	49	30	0.33742	4.96361	4.04916

Figura 1: Excerto da Tabela de Douwes, traduzida por Richard Harrison [1].

Este método, o primeiro que se conhece no qual se usaram logarítmos para o cálculo das equações, tem um interesse particular porque se tornou a base para os inúmeros métodos que se seguiram durante o século XVIII e ao longo do XIX, até ao aparecimento do Método de Marcq Saint-Hilaire, no final desse século.

Referências

[1] Richard Harrison, *A New Sett of Logarithmic Solar Tables, Calculated and Constructed for Determining the Latitude at Sea*, London, 1759.

Mathematical rigour, mathematical creativity, and the transgression of limits

Eberhard Knobloch
Berlin University of Technology
Berlin-Brandenburg Academy of Sciences and Humanities

Dignity and highest certainty are the characteristics of mathematics guaranteed by rigorous demonstrations. The Ancients or – to be more precise – Archimedes were and remained the touchstone for the legitimacy of mathematical methods, objects, proofs up to the times of Euler. In order to demonstrate the equality of two quantities the double *reductio ad absurdum* was usual and necessary. But his demonstrations were criticized because of their obscurity.

The talk consists of four parts.

1. The first part deals with Archimedes's letter to Eratosthenes, better known as *Perì tôn mechanikôn theoremáton éphodos* (Approach regarding the mechanical theorems). Therein Archimedes transgressed limits of legitimacy when he looked for the solution of problems. He used an analogy when he found the surface of the sphere. He violated methodological prescriptions. He used non-mathematical objects, that is indivisibles being non-quantities by definition. He violated the axiom named after him.

2. Later authors tried to replace his indirect demonstrations by affirmative demonstrations. In 1615 Johannes Kepler explained Archimedean theorems in his *New solid geometry of wine barrels* using geometrical transformations and analogies thus being able to surpass the results of the Greek author. In such a way he calculated the volume of a mathematical apple. Was he entitled to do that?

3. In 1641 Paul Guldin published his four books *On the centre of gravity.* He spoke of Kepler's new method of demonstrating. The essential reproach was that Kepler had not always looked after the purity and exactness of geometry, that he had assigned much to analogies and conjectures, and that he had obscurely presented all of his results. Guldin himself claimed to give clear and perspicuous demonstrations instead of the too obscure Archimedean demonstrations using his two principles, that is a rotation and the centre of gravity.

4. When in 1676 Gottfried Wilhelm Leibniz amply used infinitely small and infinite quantities in his *Arithmetical quadrature of the circle, the ellipse and the hyperbola*, he admitted that this might appear obscure, but he emphasized that they provide abbreviations of speaking, thinking, discovering, and demonstrating and that his method differs from the Archimedean style only by the expressions. He defined infinitely small quantities as quantities that are smaller than *any given* quantity, infinitely great quantities as such that are greater than *any given* quantity. Curves are polygons with infinitely many, infinitely small sides (principle of linearization).

In 1755, in his *Elements of the differential calculus*, Leonhard Euler tried to justify the use of these quantities in another way defining infinitely small quantities as quantities that are smaller than *any assignable* quantity. Such quantities must be equal to zero. Hence he was convinced that the highest geometrical rigour was observed like in the books of the Ancients.

Bibliography

E. Knobloch, "Leibniz's rigorous foundation of infinitesimal geometry by means of Riemannian sums", *Synthese*, vol. 133 (2002), pp. 59–73.

E. Knobloch, "From Archimedes to Kepler: Analogies and the dignity of mathematics", *Sciences et techniques en perspective*, IIe série, vol. 18 (2016), pp. 20–34.

E. Knobloch, "On the relation between point, indivisible, and infinitely small in western mathematics", *Mathematics of Takebe Katahiro and history of mathematics in East Asia*, Eds. T. Ogawa, M. Morimoto. Tokyo 2018, 39–58 (Advanced studies in pure mathematics vol. 79)

E. Knobloch, "The Hellenistic mathematician Archimedes and his renaissance admirer Kepler", *Hellenistic Alexandria: Celebrating 24 centuries*, Papers presented at the conference held on December 13–15 2017 at Acropolis Museum, Athens. Oxford 2018, Eds. C. S. Zerefos, M. Vardinoyannis, pp. 242–247

Hamilton-Jacobi Theory and Canonical Transformations 1837–1907

*Craig Fraser**
Institute for the History and Philosophy of Science and Technology,
University of Toronto

The idea of a canonical transformation emerged in 1837 almost from nowhere in Carl Jacobi's researches, and became the subject of episodic investigation for the next fifty years. Significant figures at the middle of the century were Adolphe Desboves and William Donkin, while the delayed posthumous publication in 1866 of Jacobi's full dynamical corpus was a critical event. François Tisserand's doctoral dissertation of 1868 was devoted primarily to lunar and planetary theory, but placed Hamilton-Jacobi mathematical methods at the forefront of the investigation. Poincaré's lectures on celestial mechanics in the 1890s succeeded in making canonical transformations a fundamental part of dynamical theory. Poincaré offered a mathematical vision of the theory that differed fundamentally from Jacobi's and would become highly influential in subsequent research. Two prominent researchers around 1900 were Carl Charlier and Edmund Whittaker, and their books included chapters devoted explicitly to transformation theory.

The development of Hamilton-Jacobi theory from its inception up to 1910 was closely tied to celestial mechanics or what in the nineteenth century was sometimes called physical astronomy. The two most important figures in this history — Jacobi and Poincaré — were mathematicians first and foremost who also made fundamental contributions to planetary dynamics and the theory of perturbations.

Jacobi invented the idea of the canonical transformation, a mathematical advance not anticipated in earlier work of Hamilton or others. Jacobi's strength was his unparalleled grasp of algorithmic mathematics and his ability to find operational, formal solutions and methods. E. T. Bell (1986, 327) in his book *Men of Mathematics* fittingly titled his chapter on Jacobi, "The great algorist." In Jacobi's approach to the calculus of variations the formal, algorithmic aspect was paramount, although it is true that some of his innovations, for example the conjugate point, had geometric implications. While the subject of canonical transformations developed out of a part of dynamical analysis with strong roots in the calculus of variations, Jacobi's study

*Research and writing of the present paper was carried out by the author in collaboration with Michiyo Nakane of Seijo University, Tokyo.

of transformations was analytical and did not draw on notions involving continuous variational processes.

By contrast, variational processes were critical to Poincaré's approach and imparted a "topological" element to the theory. A key contribution consisted of his treatment in 1899 of Jacobi's transformation theorem, where a variational law provided a powerful structural tool in the derivation of this result. The contributions of Poincaré in this respect are highlighted by Gaston Darboux in his 1916 éloge:

> ... Jacobi had established a theory which appeared to be one of the most complete in dynamics. For fifty years we lived on the theorems of the illustrious German mathematician, applying them and studying them from all angles, but without adding anything essential. It was Poincaré who first shattered these rigid frames in which the theory seemed to be encased and contrived for it vistas and new windows on the external world. He introduced or used, in the study of dynamical problems, different notions: the first, which had been given before and which, moreover, is applicable not solely to mechanics, is that of variational equations, namely, linear differential equations that determine solutions of a problem infinitely near to a given solution; the second, that of integral invariants, which belong entirely to him and play a capital part in these researches.[1]

From its origins up until the early years of the twentieth century Hamilton-Jacobi theory was primarily of interest to mathematical analysts and researchers in celestial mechanics, the latter being active throughout this period. After 1910 the methods of Hamilton-Jacobi theory were adopted by atomic physicists in Germany. Prominent in this group were Arnold Sommerfeld and Max Born. Sommerfeld (1923, 555–556) wrote: "Up to a few years ago it was possible to consider that the methods of mechanics of Hamilton and Jacobi could be dispensed with for physics and to regard it as serving only the requirements of the calculus of astronomic perturbations and the interests of mathematics." As a result of the rapid development of quantum theory the situation had changed dramatically. Sommerfeld continued: " ... it seems [today] almost as if Hamilton's method was expressly created for treating the most important problems of physical mechanics." In subsequent history, canonical transformations became an integral part of the canon of mathematical physics, a fact that is reflected in various textbooks

[1]English translation in Bell (1986, 544–545)

in mechanics at the middle of the century. The subject of canonical transformations was also investigated by mathematicians, a notable contribution being Constantin Carathéodory's 1935 *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichingen erster Ordnung* (Chapter 6).

References

Bell, E. T. 1986. *Men of Mathematics*. Touchstone Press. New York et al. Reprint of the original 1937 edition.

Carathéodory, Constantin. 1935. *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung*. B. G. Teubner. Leipzig and Berlin.

Darboux, Gaston. 1916. "Éloge historique de Henri Poincaré". In Poincaré (1916), pp. vii–lxxi.

Jacobi, Carl Gustav. 1866a. *Vorlesungen über Dynamik von C. G. J. Jacobi nebst Fünf Hinterlassenen Abhandlungen Desselben*. Verlag Georg Reimer. Berlin.

Poincaré, Henri. 1899. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Volume 3. Paris : Gauthier-Villars.

——— 1916. *Œuvres de Poincaré*. Volume 2. Edited by Gaston Darboux in collaboration with N. E. Nörlund and Ernest Lebon. Gauthier Villars et Cie. Paris.

Sommerfeld, Arnold. 1923. *Atomic Structure and Spectral Lines*. Methuen & Co. Ltd. London. English translation of the 1922 third edition of the author's *Atombau und Spektrallinien*.

A visita do Imperador do Brasil, Pedro II, à Universidade de Coimbra e os Observatórios Astronómico e Meteorológico e Magnético à época (1872)

Fernando B. Figueiredo
DMUC, CITEUC, Universidade de Coimbra

A Reforma Pombalina da Universidade de Coimbra (1772), levada a cabo por D. José (1714–1777) e o seu todo-poderoso ministro Marquês de Pombal (1699–1782), inicia todo um processo de institucionalização das ciências em Portugal em moldes modernos, e muito em particular das ciências matemáticas e físico-matemáticas. São criadas, como sabemos, as novas Faculdades de Matemática e Filosofia Natural e vários estabelecimentos científicos, como é o caso do Observatório Astronómico e do Gabinete de Física. A Reforma marca desde logo, pelo menos estatutariamente, um tipo novo de instituição em que o ensino e a investigação deveriam ser dois compromissos fortes. Na verdade, esta ideia, de que a universidade, como centro de saber, tem que aliar o ensino e a investigação, reconhecemo-la hoje como um legado do filósofo e político alemão Friedrich Wilhelm von Humbolt (1767–1835) na criação da Universidade de Berlim, em 1810. Porém já Pombal e os seus reformadores se haviam antecedido cerca de 40 anos nesta visão bastante moderna e hoje marca identitária das nossas actuais universidades.

No campo da astronomia, o Observatório Astronómico iria constituir-se como um dos principais centros de investigação do país. Embora ligado à Universidade como uma instituição de ensino, foi concebido como um observatório nacional para calcular efemérides astronómicas e ajudar em questões cartográficas e de navegação. O seu programa científico colocou-o em sintonia com os demais observatórios nacionais estrangeiros, publicando periodicamente as Efemérides Astronómicas (1803), obra reconhecida na Europa pelo seu carácter inovador. A astrometria e a mecânica celeste foram o seu principal programa científico até às primeiras décadas do século XX, tendo sido um dos principais pólos da formação da nova geração de astrónomos no Portugal de Oitocentos.

Embora algumas observações meteorológicas fossem feitas no Observatório Astronómico, e sobretudo no Gabinete de Física, a verdade é que não existia em meados do século XIX um observatório meteorológico digno desse nome na Universidade. Porém, em Lisboa, ligado à Escola Politécnica, instituição criada na capital em 1837, funcionava desde 1853 o Observatório

Meteorológico D. Luis, com observações regulares de meteorologia e geomagnetismo. A Universidade de Coimbra, como única universidade do país, não podia ficar de fora destas novas áreas científicas em crescente desenvolvimento. A partir de 1860 a Faculdade de Filosofia intenta um conjunto de acções junto do governo para criar um estabelecimento científico que implementasse o desejado programa sistemático de observações meteorológicas e que colocasse a Universidade na vanguarda da investigação nas chamadas ciências da *physique du globe*. O Observatório Meteorológico e Magnético na Universidade de Coimbra seria então criado em 1864.

Em 1872, 1.º centenário da Reforma Pombalina, D. Pedro II (1825–1891), Imperador do Brasil, visita a Universidade e os seus vários estabelecimentos científicos. Pedro II era um particular entusiasta das ciências naturais, descrevendo-se como tendo "*nascido para se dedicar à cultura e à ciência*". Tivesse o acaso lhe reservado outro destino que não o de imperador, gostaria de ter sido professor, assim o escreveu várias vezes. Era membro de várias e prestigiadas academias e associações científicas mundiais, como a inglesa Royal Society, a Academia das Ciências da Rússia, a Academia Real para as Ciências e as Artes da Bélgica. Em 1875 seria eleito membro da Académie des Sciences francesa.

Uma visita à Universidade de Coimbra, a única em Portugal e com forte tradição no acolhimento e ensino das elites brasileiras que atravessaram o Atlântico para aí se licenciarem, seria um dos pontos de interesse da sua primeira viagem a Portugal nos anos 1871 e 1872. No dia 5 de Março, Pedro II faz uma longa e cuidada visita ao Observatório Meteorológico e Magnético da Universidade de Coimbra (OMMUC). Esta era uma das mais recentes instituições científicas portuguesas e a curiosidade do Imperador era grande, querendo saber tudo sobre a organização do observatório, o tipo e utilização dos instrumentos, a sua prática e programa científico. Jacinto de Sousa (1818–80), director do OMMUC, foi o anfitrião que ofereceu ao Imperador explicações e descrições detalhadas, tal como é relatado no livro a *Viagem dos imperadores do Brasil em Portugal* (1872).

A descrição da visita ao OMMUC é uma clara tentativa dos autores, um deles, Augusto Mendes Simões de Castro (1845–1932), sobrinho de Joaquim Augusto Simões de Carvalho (1822–1902), professor de Química da Faculdade de Filosofia e autor da *Memoria histórica da Faculdade de Philosophia* (1872), em promover a imagem de uma Universidade moderna e sintonizada com o que de mais avançado se fazia na Europa científica da altura. Talvez por isso mesmo o retrato que fazem da visita do Imperador ao Observatório Astronómico seja de uma visita fugaz, e que lhe terá despertado pouco interesse. Esta era uma instituição já bem firmada no panorama científico nacional e internacional e não precisava igual destaque. O que era preciso, e assim é feito, era destacar uma nova joia da coroa universitária, o novo Observatório Meteorológico e Magnético de Coimbra.

O relato da visita do Imperador à Universidade, juntamente com um conjunto de memórias descritivas de ambos os Observatórios, permite-nos não só compreender a evolução e organização destas instituições, mas também traçar um quadro da situação das ciências físico-matemáticas e de novas áreas do saber que se abriam ao ensino e investigação na Universidade. São na verdade instrumentos privilegiados para uma arqueologia das práticas científicas e para abordar questões mais gerais acerca das ciências da Terra e do espaço e das dinâmicas político-institucionais da segunda metade do século XIX português.

Bibliografia

Araújo, Ana Cristina (Coord.), O Marquês de Pombal e a Universidade. Coimbra: Imprensa da Universidade, Coimbra, Imprensa da Universidade de Coimbra, 2000

Carvalho, Joaquim Augusto Simões de; Memoria histórica da Faculdade de Philosophia [...]. Coimbra: Imprensa da Universidade, 1872.

Corte Real, José Alberto Homem da Cunha, Rocha, Antonio da Silva Rocha, Castro, Augusto Mendes Simões de. Viagem dos imperadores do Brasil em Portugal. Coimbra, Imprensa da Universidade, 1872

Freire, Francisco de Castro; Memoria Histórica da Faculdade de Mathematica [...]. Coimbra: Imprensa da Universidade, 1872

Schwarcz, Lilia Moritz,; As Barbas do Imperador. D. Pedro II, um monarca nos trópicos. Lisboa: Assírio & Alvim, 2003

Cálculos de navegação astronómica com o cronogoniómetro

António Costa Canas
Escola Naval—CINAV & CHist-UL

Em finais do século XVIII, passou a ser possível determinar com rigor a longitude no mar. Para determinar a hora num meridiano de referência podia usar-se o método das distâncias lunares, ou então um cronómetro. Bastava depois comparar essa hora com a do meridiano do observador, para se obter a longitude. Esta última hora era geralmente calculada usando um processo conhecido por "Time sight" (ou ângulo horário, em português). Os procedimentos de cálculo eram algo complexos para a época, pois consistiam na resolução de um triângulo esférico:

$$\cos P = \frac{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} \delta * \operatorname{sen} \varphi}{\cos \delta * \cos \varphi}$$

Onde P é o ângulo horário, que permite conhecer a hora; φ é a latitude; e δ é a declinação do astro. A resolução destas fórmulas fazia-se recorrendo a logaritmos, mas esta fórmula inicial ainda apresentava alguma complexidade. Para a simplificar, subtraíam-se de 1, ambos os termos:

$$1 - \cos P = \frac{\cos \varphi * \cos \delta + \operatorname{sen} \varphi * \operatorname{sen} \delta - \operatorname{sen} a}{\cos \varphi * \cos \delta}$$

$$1 - \cos P = \frac{\cos(\varphi - \delta) - \operatorname{sen} a}{\cos \varphi * \cos \delta}$$

$$1 - \cos P = (\cos(\varphi - \delta) - \operatorname{sen} a) * \sec \varphi * \sec \delta$$

"$1 - \cos P$" corresponde a uma função trigonométrica, o seno verso, para a qual também existiam tabelas de logaritmos, a qual facilita algumas simplificações das fórmulas de trigonometria esférica.

No final do século XIX, João de Brito Capelo, oficial de Marinha, inventou um instrumento, cronogoniómetro, com o qual se podia resolver o triângulo esférico e portanto calcular o ângulo horário. Curiosamente, as primeiras informações sobre o cronogoniómetro foram divulgadas nos *Anais do Clube Militar Naval*, graças a uma polémica entre outros dois oficiais de Marinha, Vitorino Gomes da Costa e Benjamim de Paiva Curado, que discutiram a validade dos processos gráficos e mecânicos para resolução de problemas matemáticos:

> Ha proximamente dois annos que tenho seguido minuciosamente o assumpto dos artigos publicados nos *Annaes do club*, e vi que sendo ali tratados com desenvolvimento differentes assumptos de navegação, havia a usencia de qualquer trabalho que tivesse por thema a solução graphica dos problemas nauticos. Ora sendo o estudo dos processos graphicos a questão do dia em navegação, sendo hoje raro o numero de qualquer revista maritima estrangeira que deixe de apresentar um trabalho d'aquelles, affirmando-se mesmo que no futuro a navegação graphica ha de fazer desapparecer o emprego das tábuas de logarithmos. . .[3]

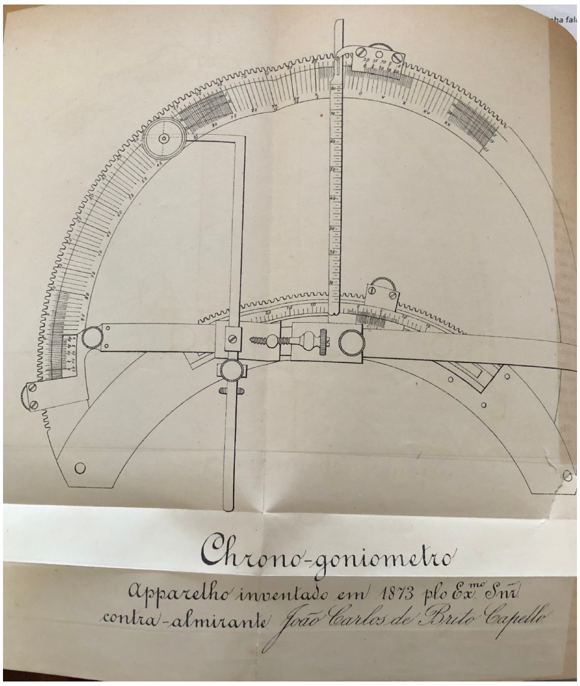


Figura 1: Representação do cronogoniómetro.

A polémica iniciou-se com a discussão sobre o valor do planisfério azimutal, um esquema gráfico, também proposto por João Capelo para resolver o triângulo esférico de posição. Nos artigos finais, a discussão centra-se em torno do cronogoniómetro, sendo afirmado que este resolvia de forma mecânica, aquilo que se resolvia graficamente com o planisfério:

> Foi então que vi que aquelle apparelho se fundava na mesma

> theoria do planispherio azimuthal, e reconheci a simplicidade do seu uso...[6]

Como se pode verificar na figura, o instrumento era composto por uma base com diversas escalas e por um conjunto de peças móveis. Estas peças eram deslocadas de modo a introduzir os valores das diferentes variáveis que entravam no cálculo do ângulo horário, sendo depois lido o resultado desse cálculo numa dessas escalas. O processo era relativamente fácil de executar, pois a bibliografia sobre o instrumento contém uma série de passos a executar para realizar o cálculo. Não foi possível encontrar uma explicação para o nome escolhido para o instrumento, mas provavelmente tem a ver com o resultado que se pretendia alcançar com o mesmo: ângulo horário (pois *gonio* está relacionado com ângulos e *crono* com tempo, ou horário). Do mesmo modo, o planisfério azimutal, foi concebido especificamente para calcular o azimute dum astro, que servia para calcular o desvio da agulha magnética. Apesar de cada um deles ter sido concebido para calcular um dado elemento do triângulo de posição, ambos serviam para calcular outros elementos, como se referiu anteriormente.

Referências

[1] Benjamim de Paiva Curado, "Processo para resolver graficamente o triângulo esférico determinativo da posição de um astro", *Anais do Clube Militar Naval*, 1893, pp. 5–9.

[2] Benjamim de Paiva Curado, "Construção e uso de um gráfico que substitui os planisférios", *Anais do Clube Militar Naval*, 1893, pp. 71–77.

[3] Benjamim de Paiva Curado, "Os problemas dos planisférios", *Anais do Clube Militar Naval*, 1893, pp. 189–193.

[4] Vitorino Gomes da Costa, "Algumas reflexões sobre o método para resolver graficamente o triângulo esférico determinativo da posição de um astro", *Anais do Clube Militar Naval*, 1893, pp. 115–122.

[5] Vitorino Gomes da Costa, "Os problemas dos planisférios", *Anais do Clube Militar Naval*, 1893, pp. 321–328.

[6] Vitorino Gomes da Costa, "Cronogoniómetro", *Anais do Clube Militar Naval*, 1894, pp. 339–344 e 419–430.