ISSN 0872–3672

SUMÁRIO

32.º Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática

(continua no verso)

SUMÁRIO (continuação)

SUMÁRIO (continuação)

33.º Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática

(continua no verso)

SUMÁRIO (continuação)

SUMÁRIO (continuação)

34.º Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática

(continua no verso)

SUMÁRIO (continuação)

32.º Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática

Auditório Municipal Professora Emília Monteiro
Marco de Canaveses
31 de Maio e 1 de Junho de 2019

Introdução

Luis Saraiva[1]
(Coordenador Nacional do SNHM, CIUHCT, DM da FCUL)

O matemático e astrónomo José Monteiro da Rocha (1734–1819) foi um dos principais intervenientes na Reforma Pombalina da Universidade Portuguesa de 1772 e um dos responsáveis, enquanto professor e académico, pela institucionalização da ciência moderna em Portugal no processo desencadeado por essa Reforma. O Seminário Nacional de História da Matemática decidiu realizar o seu encontro anual de 2019 em Marco de Canaveses, terra natal de Monteiro da Rocha, e assim homenageá-lo nos 200 anos do seu falecimento.

A primeira sessão do Encontro teve a figura de Monteiro da Rocha como denominador comum. Três das conferências debruçaram-se sobre as suas contribuições na Reforma Pombalina da Universidade e mostraram aspectos da sua obra matemática: essas conferências foram proferidas por António Leal Duarte, Fernando Figueiredo e Carlos Martins. Numa quarta conferência Jorge Alves deu uma visão de conjunto sobre o que seria Marco de Canaveses no tempo de Monteiro da Rocha. No Encontro ainda houve mais duas conferências que referiram Monteiro da Rocha: João Caramalho Domingues analisou uma das duas partes conhecidas de um manuscrito não publicado deste matemático. Esta parte, "Elementos de Álgebra", em conjunto com outras três, das quais só se conhece mais uma, forma o que Monteiro da Rocha designou por *Elementos de Mathematica*; António Canas e Teresa Sousa, na sua conferência sobre "Dantas Pereira e a Questão da Longitude" resumiram as propostas de Monteiro da Rocha sobre este assunto e expuseram as formuladas por Dantas Pereira na tentativa de resolução daquele importante problema.

O conferencista convidado deste Encontro foi Guy Boistel, investigador e professor no Centro François Viéte, da Universidade de Nantes, que apresentou uma comunicação – extensamente desenvolvida neste suplemento – sobre o começo da navegação astronómica científica no século XVIII em Inglaterra, França e Portugal.

Tivemos três comunicações relativas à História do Ensino da Matemática no século XX. Uma sobre Urbano Teles Ferreira, um professor de escola primária na ilha de S. Miguel, Açores; outra sobre as actividades de José Vicente Gonçalves na sua prática de autor de manuais para o ensino, em

[1] Agradecimentos institucionais são devidos à *Fundação para a Ciência e a Tecnologia* de Portugal no âmbito do projeto UIBD/00286/2020.

particular sobre o seu Compêndio de Aritmética para o 3.º Ciclo do curso dos Liceus (1939); e uma sobre a participação portuguesa nas Olimpíadas de Matemática no período 1989–2019. Estas conferências foram proferidas, respectivamente, por Helena Sousa Melo, Cecília Costa e a última por Joana Teles e Luís Bernardino.

Inês Bénard da Costa apresentou uma comunicação que contextualiza a tradição árabe de configuração do universo, expondo resultados de Ibn al-Shāṭir, em particular o seu modelo de movimento do planeta Mercúrio, e deu elementos sobre a polémica causada pela identificação na obra de Copérnico de alguns assuntos já desenvolvidos na astronomia árabe.

Na sua palestra sobre o *Tratado da Prática Darismética*, que celebra os 500 anos da sua publicação, Pedro Freitas salientou alguns aspectos deste livro, na sua variedade, o primeiro livro de matemática impresso em Portugal.

Maria Elisabete Ferreira falou sobre as versões da *Teoria das Proporções* que surgem em Portugal na 1.ª metade do século XVIII, comparando-as entre si e com obras de outros autores europeus seus contemporâneos.

Ana Patrícia Martins analisou a actividade de Daniel Augusto da Silva no que diz respeito à Astronomia, nas suas vertentes de ensino, actividade institucional e científica.

Por último Luís Saraiva deu uma visão de conjunto do trabalho de pesquisa de Francisco Gomes Teixeira em equações com derivadas parciais, desenvolvido entre 1875 e 1886, no início da sua carreira científica, mostrando igualmente a singularidade da sua produção no contexto matemático português da época.

Não podemos esquecer os apoios que tornaram possível este Encontro: a Sociedade Portuguesa de Matemática, que desde o começo tem apoiado as iniciativas do SNHM, a Câmara Municipal de Marco de Canaveses e a Associação dos Amigos de Marco de Canaveses, sendo da mais elementar justiça salientar o papel do Dr. António Ferreira, que esteve presente em todas as sessões, ajudou a resolver os poucos problemas que se puseram, e nos fez descobrir as belezas de Marco de Canaveses.

Concluimos esta breve apresentação fazendo votos para que esta publicação de actas desenvolvidas das comunicações feitas no 32.º Encontro do SNHM contribua para motivar para Encontros futuros do SNHM alguns daqueles que, não tendo assistido ao Encontro de Marco de Canaveses, acharam que eventualmente haveria algo nesta publicação que lhes poderia interessar.

Até ao 33.º Encontro do SNHM, que será em Leiria, a 29 e 30 de Maio de 2020!

Programa

31 de Maio

09.00 *Entrega de pastas*

09.30 Abertura do Encontro (Luis Saraiva, representante da Câmara de Marco de Canaveses, representante da SPM)

09.50 Fernando Figueiredo (CITEUC, Universidade de Coimbra) — José Monteiro da Rocha (1734–1819): notas biográficas de um matemático ao serviço do Estado.

10.40 António Leal Duarte (Dep. Matemática, Univ. Coimbra, Centro de Matemática da UC) — A reforma pombalina da Universidade de Coimbra de 1772; José Monteiro da Rocha (1734–1819) e a institucionalização da reforma.

11.10 *Café*

11.40 Jorge Alves (Faculdade de Letras da Universidade do Porto) — Canaveses: o tempo e as reconfigurações territoriais.

12.20 Carlos Moura Martins (Darq|CITEUC) — Incursões de José Monteiro da Rocha no campo da Hidráulica.

13.00 *Almoço*

15.00 Helena Sousa Melo e Maria do Carmo Martins (Dep. de Matemática e Estatística, da F. Ciências e Tecnologia, CEHu, Universidade dos Açores) — "*Apontamento de Aritmética, sistema-métrico e geometria*", um livro do micaelense Urbano Teles Ferreira.

15.30 Luis Saraiva (CIUHCT, CMAFCIO, Universidade de Lisboa) — O trabalho de Gomes Teixeira em equações com derivadas parciais.

16.00 Cecília Costa (UTAD, CIDTFF, CIDMA) — A "Greta Garbo" de J. Vicente Gonçalves: um compêndio de aritmética racional ímpar.

16.30 Joana Teles (Universidade de Coimbra) e Luís Bernardino (Agrupamento de Escolas Rio Arade) — Olimpíadas de Matemática – 30 anos de participações internacionais.

17.00 *Café*

17.30 *Passeio Social*

20.00 *Jantar do Encontro*

Programa

1 de Junho

09.30 Inês Bénard da Costa (FCUL) — O modelo de Mercúrio de Ibn al-Shāṭir em Copérnico.

10.00 Pedro Freitas e Jorge Nuno Silva (CIUHCT) — Os 500 anos do 'Tratado da Prática Darismética' de Gaspar Nicolas.

10.30 Maria Elisabete Barbosa Ferreira (Agrupamento de Escolas Dr. Mário Fonseca, Escola Básica e Secundária de Lousada Norte, Lustosa) — Teoria(s) de Proporções em Portugal na primeira metade do século XVIII.

11.00 *Café*

11.30 Guy Boistel (Centre François Viète, Université de Nantes) — The birth of a scientific astronomical navigation for seafarers in the Eighteenth-Century, in England, France and Portugal, from 1714 to 1804.

12.20 Ana Patrícia Martins (Escola Superior de Educação de Viseu / CIUHCT) — Daniel Augusto da Silva – sua ligação a questões de Astronomia.

13.00 *Almoço*

15.00 João Caramalho Domingues (CMAT – Univ. Minho) — Os *Elementos de Algebra* de Monteiro da Rocha.

15.30 António Costa Canas e Teresa Sousa (Escola Naval, CINAV) — Dantas Pereira e a questão da longitude.

16.20 Encerramento do Encontro

José Monteiro da Rocha (1734–1819): notas biográficas de um matemático ao serviço do Estado

Fernando B. Figueiredo
CITEUC, DMUC, Universidade de Coimbra

José Monteiro da Rocha foi um dos principais protagonistas de um processo de institucionalização da ciência moderna iniciada em Portugal pela Reforma da Universidade de Coimbra (1770–72), e que moldou o país dos finais do Antigo Regime aos alvores do Liberalismo. A sua vida e ação foram marcantes na Universidade de Coimbra e no processo de institucionalização da ciência moderna que a Reforma Pombalina da Universidade iniciou em Portugal. As Reformas Pombalinas, em geral, e as reformas da educação, em particular, tinham o propósito de recuperar o atraso de Portugal em relação aos países considerados mais avançados e cultos da Europa. A Reforma da Universidade de Coimbra foi pensada com a finalidade de ajustar Portugal às ideias 'iluminadas' da Europa, no sentido do conhecimento científico e do desenvolvimento. O objectivo estruturante da Reforma foi a formação de quadros técnicos para os vários sectores do funcionalismo público dando suporte aos interesses económico-políticos do país e das suas inúmeras colónias, em particular o Brasil.

José Monteiro da Rocha nasceu em Canavases, uma localidade perto de Marco de Canavezes, em 25 de Junho de 1734, no seio de uma família de agricultores. Pouco se sabe sobre os seus anos de infância e juventude. Sabe-se que ainda jovem foi para o Brasil, ingressando em 1752 na Companhia de Jesus que virá a abandonar em 1759 aquando da expulsão dos Jesuítas de Portugal e seus domínios. Foi educado no Colégio jesuíta de São Salvador da Baía, onde faz a sua formação inicial em matemática e astronomia. Em 1766 regressa a Portugal. Matricula-se em Cânones na Universidade de Coimbra, obtendo, em 1770, o grau de Bacharel.

Em 1771, por influência de Francisco de Lemos, Reformador Reitor da Universidade de Coimbra, é chamado a colaborar com a Junta de Providência Literária, organismo responsável pela redação dos Novos Estatutos da Universidade (1772), tendo sido um dos responsáveis pela conceção das novas faculdades científicas e pela ampla renovação de estudos no campo do ensino da matemática, da astronomia e das ciências naturais e experimentais, programa que marcará profundamente a vida da Universidade de Coimbra até 1911.

Aquando do começo das aulas Monteiro da Rocha é incorporado como professor da Faculdade de Matemática, cabendo-lhe a honra de ler a lição inaugural da nova Faculdade de Matemática. No período da Viradeira, que se seguiu à morte de D. José, era visto em Coimbra como um símbolo da Reforma Pombalina. De 1786 a 1804 ocupa o cargo de vice-reitor, desempenhando então um papel fundamental na institucionalização da Reforma.

A sua obra científica é vasta, compondo-se de traduções de livros de texto franceses, trabalhos de matemática aplicada e trabalhos de astronomia teórica e prática, perfazendo 23 trabalhos impressos, 12 manuscritos conhecidos e cerca de 20 referenciados.

No que diz respeito à astronomia, foi responsável pela criação do Observatório Astronómico de Coimbra, que dirigiu, e pelo estabelecimento do respetivo programa científico (a ele se deve o projecto (5-2-1791), construção, regulamentação e apetrechamento instrumental). O Observatório constituiu um dos principais centros de investigação do país, publicando periodicamente as Efemérides Astronómicas (1803–2000), obra reconhecida na Europa pelo seu carácter inovador. Enquanto Diretor do Observatório e professor das cadeiras de Física-Matemática (1772–1783) e de Astronomia (1783–1804), foi um dos principais responsáveis pela formação de uma geração de matemáticos e astrónomos em Portugal, no final do Antigo Regime.

Monteiro da Rocha teve ainda um papel fundamental nos primeiros tempos da Academia das Ciências de Lisboa (1779), quer na sua atividade científica, quer na definição da sua orgânica interna. O seu papel foi igualmente decisivo na preparação das bases para a construção da Carta Geográfica do Reino, cujos trabalhos geodésicos foram dirigidos, a partir de 1790, por um dos seus mais brilhantes discípulos: Francisco António Ciera. Foi também membro da Sociedade Real Marítima, Militar e Geográfica (1798) e vogal da Junta de Diretoria Geral de Estudos e Escolas do Reino (1794). Foi Conselheiro Real e preceptor do príncipe D. Pedro, futuro rei de Portugal e Imperador do Brasil.

Monteiro da Rocha viveu uma longa vida, plena e cheia de honrarias, morrendo aos 85 anos na sua quinta de São José de Ribamar, perto de Lisboa, a 11 de dezembro de 1819. No seu obituário (7 de janeiro de 1820), na Gazeta de Lisboa, são lhe tecidos grandes elogios, sendo descrito como uma das grandes personalidades do país, *'muito respeitável por seus vastos conhecimentos em várias Ciências, com especialidade nos diferentes ramos de Matemática, não o foi menos pela exacção, e esmero, com que desempenhou os importantes lugares que ocupara durante todo o tempo de sua vida pública.'*

Na verdade, como homem de ciência, professor, académico, administrador e legislador, Monteiro da Rocha é uma das principais figuras da história da cultura e ciência portuguesa, que elevou a instituição universitária ao mais alto nível, contribuindo, decisivamente, para a modernização e internacionalização de novos saberes e competências. A realização do 32.º Seminário Nacional da História da Matemática, na sua terra natal aquando bicentenário da sua morte, foi uma merecida homenagem que se lhe prestou.

Bibliografia

Araújo, Ana Cristina (Coord.), O Marquês de Pombal e a Universidade. Coimbra: Imprensa da Universidade, Coimbra, Imprensa da Universidade de Coimbra, 2000.

Araújo, Ana Cristina e Fonseca, Fernando Taveira da (Coords.), A Universidade Pombalina. Ciência, Território e Coleções Científicas, Coimbra, Imprensa da Universidade de Coimbra, 2017.

Figueiredo, Fernando B., "José Monteiro da Rocha e a actividade científica da 'Faculdade de Mathematica' e do 'Real Observatório da Universidade de Coimbra': 1772–1820", Tese de Doutoramento, FCTUC, Coimbra, 2011.

Freire, Francisco de Castro, Memoria Historica da Faculdade de Mathematica nos cem annos decorridos desde a Reforma da Universidade em 1772 até o presente, Coimbra, Imprensa da Universidade, 1872.

Teixeira, António José, "Sciencias moraes e sociaes. Apontamentos para a biographia de José Monteiro da Rocha", O Instituto: jornal scientifico e litterario, v. 37 (1889–1890), pp. 65–98.

Teixeira, Francisco Gomes, "Doutor Monteiro da Rocha", Revista da Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra 4 (1934), pp. 192–202.

A reforma pombalina da Universidade de Coimbra de 1772; José Monteiro da Rocha (1734–1819) e a institucionalização da reforma

António Leal Duarte
Dep. Matemática e Centro de Matemática da Universidade de Coimbra

A Reforma Pombalina da Universidade de Coimbra de 1772 transformou o ensino nesta instituição, de alguma forma moldando o Portugal dos finais do Antigo Regime aos alvores do Liberalismo. Para o ensino das ciências foram criados o Laboratório Químico, o Gabinete de Física Experimental, o Museu de História Natural, o Jardim Botânico e o Observatório Astronómico. José Monteiro da Rocha foi uma figura-chave em todo este processo, quer na redacção dos respectivos estatutos, quer como professor e Decano (1778) da Faculdade de Matemática, quer como Vice-Reitor (1785) quer ainda como Director do Observatório Astronómico (1795).

Como cientista, académico, administrador e legislador, Monteiro da Rocha contribuiu, de forma decisiva, para a modernização e internacionalização de novos saberes e competências. Nesta comunicação pretendemos dar a conhecer alguns dos aspectos da Reforma pombalina e do papel que na institucionalização dessa reforma desempenhou esta tão importante figura da cultura e ciência portuguesa que foi Monteiro da Rocha.

Canaveses – O tempo e as reconfigurações territoriais

Jorge Fernandes Alves
FLUP/CITCEM

No âmbito da evocação dos 200 anos sobre a morte de José Monteiro da Rocha (1734–1819), o notável cientista natural de Canaveses, a comunicação procurou enunciar as linhas gerais da sua terra de naturalidade em termos económicos e sociais, bem como a evolução administrativa posterior envolvendo esse território. Fotografia, cartografia e anotações textuais de autores já clássicos permitiram delinear um percurso histórico de forma a envolver os participantes no Seminário na realidade local já longínqua.

Uma imagem aérea do local na atualidade permite-nos visualizar a dimensão do alagamento que a barragem do Torrão, alteando o rio Tâmega numa larga distância, provocou na freguesia de Sobretâmega, paróquia de naturalidade do homenageado, que integrava a então vila de Canaveses, termo e concelho de um mosaico de outros pequenos concelhos e coutos que só a exposição cartográfica nos permite verdadeiramente compreender. Para isso fez-se o mapeamento das reorganizações territoriais, correndo o período desde 1794 até 1853, data da criação oficial do concelho de Marco de Canaveses, que, fruto de anteriores e sucessivas reuniões territoriais (Benviver, Soalhães), viria a incorporar esses e outros concelhos, com ajustamentos de freguesias ainda posteriores a essa data, num processo de alargamento, concentração e racionalização inerente às sucessivas reformas administrativas oitocentistas.

A vila de Canaveses, de há duzentos anos, conglomerava as freguesias marginais do rio Tâmega, que tinham a ligá-las um elemento que se tornara um ícone da região — a velha ponte medieval de Canaveses, de que se podem ainda visualizar algumas imagens, "toda coroada de ameias", ligada ao nome mítico da Rainha de Castela, Mafalda, filha do rei português Sancho I, que a teria mandado construir, tal como fez com um "hospital para nove passageiros & peregrinos", atribuindo-se-lhe ainda a responsabilidade pela construção da Igreja de Santa Maria de Sobretâmega, tudo isto segundo as anotações de António Carvalho da Costa, datadas de 1706–1712, na sua *Corografia Portuguesa*. As termas de Canaveses eram, desde os tempos antigos, uma referência próxima da velha ponte e talvez justificassem ali a sua localização, aliada ao aldeamento romano próximo, hoje com grande projeção arqueológica (Tongóbriga). As águas termais proporcionaram, particularmente já nos inícios no século XX, a organização de um complexo termal e de lazer muito apreciado e frequentado, com largos anúncios na imprensa, sobre o qual se passou um breve, mas apreciável, documentário existente na Cinemateca Portuguesa. A ponte seria recuperada, posteriormente, na década de 1940, seguindo as políticas patrimoniais do Estado Novo,

Numa terra profundamente ligada à agricultura, em que predominavam os solares dos terra-tenentes em contraste com as cabanas dos caseiros, a conflitualidade social em Marco de Canaveses teve episódios conhecidos ao longo das guerras liberais e, no seu ocaso, não faltaram as quadrilhas de ex-milicianos que, uma vez terminada a guerra, continuavam armadas e prontos para novos desafios. Enquanto estes não chegavam, entretinham-se na prática de assaltos às casas ricas, num raio alargado. Terá sido muito pelo clima de insegurança provocada por esse tipo de banditismo e perante os pedidos de segurança pública levantados nos vários níveis administrativos, que se verificou a necessidade de dotar estes pequenos territórios de estruturas mais capazes, permitindo às forças policiais do administrador de concelho um espaço mais amplo para exercer os seus poderes, que estavam sempre limitados aos limites do concelho, perante quadrilhas que deambulavam pelo território e escapavam às autoridades locais, saltando de concelho em concelho. Ali pontificava desde o final da guerra da Patuleia o grupo de José do Telhado, responsável por múltiplos assaltos e ações de violência. É essa situação que leva o deputado Rodrigo Nogueira Soares a levantar a questão da segurança e da consequente capacidade administrativa local na Câmara dos Deputados, o que faz, por diversas vezes, desde 21 de janeiro de 1852. Pouco depois, em 14 de fevereiro, voltava à carga, pedindo medidas administrativas ao Governo, afirmando, nomeadamente:

> Aproveito esta ocasião, Sr. Presidente, pura chamar a atenção da Câmara sobre a necessidade de reduzir consideravelmente a nossa circunscrição, tanto administrativa, como judiciária. Há Julgados e Concelhos aonde não há pessoas capazes, para exercerem os diversos cargos que se necessitam; e é necessário verificar-se, se o Governo tem em sua mão todos os dados administrativos, para se obter uma diminuição considerável no número dos Concelhos e Julgados; porque eu creio que uma das razões porque a nossa máquina judicial se não move bem, é porque não há gente capaz para todos os cargos: o que se poderá obter alongando-se mais a área dos Concelhos e dos Julgados, porque então haverá mais por onde escolher. (*Diário da Câmara dos Deputados*, 14.02.1852. p. 136).

Neste relançamento da lógica da reorganização administrativa se enquadra o decreto de 31 de março de 1852, que criava o concelho de Marco de Canaveses, baseando-se numa representação recebida, discutida e formalmente proposta na Junta Distrital do Porto, como estipulava o Código Administrativo de 1842, então vigente, ao conferir a essa entidade a atribuição, entre outras, de "informar anualmente o Governo sobre os melhoramentos na Divisão do Território" (artigo 218.º–I). Criado o concelho, o administrador inicial, Adriano José de Carvalho e Melo lançaria luta desenfreada contra o grupo de José do Telhado, aprisionando vários elementos, pondo em fuga o cabecilha, que seria preso mais tarde por Adriano José no porão de uma barca que se preparava para largar para o Brasil.

Ultrapassadas estas questões da formação administrativa, o concelho seguiu as rotinas habituais dos concelhos devotados à agricultura de subsistência, em que a emigração para o Brasil, primeiro, e depois para países europeus, foi sempre a válvula de escape das tensões que poderiam resultar das profundas desigualdades sociais, mais fortes em tempos de crise agrícola ou de alterações políticas. Desse movimento de partidas de emigrantes um nome viria a sobressair, o da jovem Maria do Carmo Miranda, que partiu, em 1910, com tenra idade, para se tornar uma estrela maior no Rio de Janeiro e em Hollywood com o nome de Carmen Miranda, hoje com museu no Marco de Canaveses. Concelho periférico no distrito, hoje envolvido pelas bacias de dois rios — Douro e Tâmega, contidos em amplas barragens, o Marco de Canaveses apresenta paisagens peculiares, em que avulta o património edificado, a ligação à natureza, a produção agrícola entre a tradição e algumas marcas de significativa inovação, o trabalho da pedra com base na exploração do granito, os desportos náuticos e de montanha. Coberta parcialmente pelas águas do Tâmega, agora atravessadas por uma nova ponte, a freguesia de Sobretâmega, a terra natal de José Monteiro da Rocha, é hoje um espaço integrado em novas formas de paisagem e vislumbra novos horizontes.

Bibliografia

Alves, Jorge Fernandes e outros – *Marco de Canaveses – Perspetivas.* Marco de Canaveses: Câmara Municipal, 2009.

Alves, Jorge Fernandes e outros – *Marco de Canaveses. O Poder Local.* Marco de Canaveses: Câmara Municipal, 2017.

Costa, António Carvalho da – *Corografia Portuguesa*. Lisboa: Oficina Valentim da Costa, 1706–1712.

Diário da Câmara dos Deputados. In `debates.parlamento.pt`.

Incursões de José Monteiro da Rocha no campo da Hidráulica

Carlos Moura Martins
Darq|FCTUC, CITEUC

José Monteiro da Rocha (1734–1819) foi uma das figuras mais consistentes e coerentes do movimento reformador do Pombalismo, projecto político que pretendia reforçar e racionalizar o aparelho do Estado e, desta forma, promover o desenvolvimento e a modernização do país[1]. Colaborou activamente na concepção da reforma da Universidade de Coimbra, sendo um dos principais mentores dos novos Estatutos na parte das ciências matemáticas e naturais. A sua acção, ao longo de mais três décadas, foi decisiva na implementação desta reforma, em particular na parceria com os reitores D. Francisco de Lemos (1735–1822) e D. Francisco Rafael de Castro (1750–1816). Através da sua actividade pedagógica, científica e administrativa procurou assegurar a institucionalização do ideário científico moderno e garantir à Universidade um papel central no ambicionado projecto renovador[2]. Dirigiu os seus estudos no sentido da resolução de problemas concretos, conferindo à sua investigação no campo da astronomia e da matemática um profundo sentido utilitário, como definiu Gomes Teixeira[3]. Empenhado num modelo pedagógico que associasse ensino e investigação e que envolvesse a comunidade de estudantes e professores, foi com a criação do Observatório Astronómico da Universidade de Coimbra e com a publicação das suas prestigiadas *Efemérides Astronómicas* que deu corpo a esta ideia maior do seu pensamento. A sua escolha para mestre do príncipe D. Pedro, em 1804, foi o culminar de um ímpar percurso científico e académico[4].

Enquanto director da faculdade de Matemática e vice-reitor da Universidade, José Monteiro da Rocha empenhou-se na actualização dos planos de

[1] Sobre o conceito de Pombalismo, ver Serrão, José Vicente, "Sistema político e funcionamento institucional no Pombalismo", in Fernando Marques da Costa; Francisco Contente Domingues; e Nuno Gonçalo Monteiro (org.), *Do Antigo Regime ao Liberalismo, 1750–1850*, Lisboa, Vega, 1989: 11–21.

[2] Sobre a reforma pombalina da Universidade, ver Ana Cristina Araújo (coord.), *O Marquês de Pombal e a Universidade*, Coimbra, Imprensa da Universidade de Coimbra, 2000; Ana Cristina Araújo e Fernando Taveira da Fonseca (coords.), *A Universidade Pombalina. Ciência, Território e Coleções Científicas*, Coimbra, Imprensa da Universidade de Coimbra, 2017.

[3] Ver Teixeira, Francisco Gomes, *História das Matemáticas em Portugal*, Lisboa, Academia das Ciências de Lisboa, 1934: 239–249.

[4] Sobre o percurso e a obra de José Monteiro da Rocha, ver Figueiredo, 2011.

estudos, procurando acompanhar a progressiva especialização das ciências físico-matemáticas, processo que se acentuou na passagem do século XVIII para o século XIX. É neste espírito reformador e modernizador que se enquadra a criação das cadeiras de Hidráulica e de Astronomia Prática, em 1801[5]. Para a concretização desta reforma contribuiu o momento de bom relacionamento da Universidade com o governo, salientando-se o papel do ministro D. Rodrigo de Sousa Coutinho (1755–1812) no apoio ao desenvolvimento das ciências exactas e à promoção do campo técnico-científico[6]. José Monteiro da Rocha esteve particularmente envolvido nesta reforma curricular do 3.º e 4.º anos da faculdade de Matemática, pois abrangia as duas disciplinas que leccionou – Foronomia (1772–1783) e Astronomia (1783–1804). Redigiu os decretos de fundação das novas disciplinas e propôs os nomes dos novos professores, dois brilhantes alunos doutorados em Matemática em 1795 e já com significativa experiência lectiva: Manuel Pedro de Melo (1765–1833), para a cadeira da Hidráulica, e Tristão Álvares da Costa Silveira (1768–1811), para a cadeira de Astronomia[7].

A reestruturação do 4.º ano compreendeu a organização da cadeira de Astronomia em duas disciplinas, a Teórica e a Prática, e enquadra-se na entrada em funcionamento do Observatório Astronómico da Universidade[8]. A reforma curricular do 3.º ano abarcou a organização, igualmente em duas disciplinas, da cadeira de Foronomia, área científica que tratava das leis de equilíbrio e movimento dos corpos, sólidos e fluidos. Na nova orgânica curricular, a antiga cadeira de Foronomia passa a tratar sobretudo a estática e mecânica dos sólidos, óptica e acústica. A nova cadeira, sob a designação de Hidráulica, trata, por um lado, o campo analítico e teórico da hidrostática, hidrodinâmica e resistência de fluidos e, por outro lado, o campo técnico da aplicação prática dos princípios da hidráulica, com o estudo em detalhe dos sistemas construtivos de obras e máquinas hidráulicas através de demonstrações com modelos e estampas. Esta componente prática tinha como intenção formar quadros técnicos com conhecimentos especializados neste importante ramo das obras públicas em franco desenvolvimento em

[5]Ver “Carta Régia, que regula as obrigações das Cadeiras da Faculdade de Matemática na Universidade”, 1 de Abril de 1801, *Jornal de Coimbra*, 1817, 11, 1: 312–313.

[6]Ver carta de Monteiro da Rocha para D. Francisco de Lemos, de 31 de Maio de 1801, in Rocha, 1889, 36: 663. Sobre D. Rodrigo de Sousa Coutinho e a hidráulica, ver Martins, 2014: 592–598.

[7]Sobre este envolvimento de Monteiro da Rocha, ver as suas cartas de 18 e 25 de Janeiro de 1801, in Rocha, 1889, 36: 590–593; 16 de Agosto de 1801, in Rocha, 1890, 37: 54.

[8]Sobre as reformas pós-pombalinas dos planos de estudos da Universidade de Coimbra, ver Martins, 2017: 287–291; sobre esta reforma, ver também Figueiredo, 2011: 334–337.

toda a Europa e que, em Portugal, estava a ter um investimento estratégico por parte do Estado[9]. Enquanto objectivo novo, corresponde à formação do que hoje são os engenheiros civis por contraponto à formação militar dos engenheiros na Academia de Fortificação, Artilharia e Desenho, cuja cadeira de Hidráulica era leccionada desde 1799 por um professor formado na Universidade de Coimbra, Vicente António da Silva Correia (ca. 1765–1848). Referem-se como exemplos de obras hidráulicas: diques e molhes para o melhoramento dos portos marítimos e cais e docas para a actividade naval; encanamento de rios e canais e eclusas para o desenvolvimento da navegação fluvial; canais de rega e drenagem de pântanos para aumento da área agrícola e benefício da saúde pública; assim como açudes e aquedutos para abastecimento de água às populações e para mover máquinas para o fomento industrial (moagens, serrações, têxteis, papel, metalurgia, etc.).

Para a implementação da nova cadeira de Hidráulica foi decidido, por acordo entre a Universidade e o governo, que Manuel Pedro de Melo realizasse previamente uma viagem pela Europa, de forma a ter um contacto directo com os diferentes modelos de obras hidráulicas. A expedição do bolseiro foi objecto de instruções específicas pensadas por José Monteiro da Rocha, onde se cruzam assuntos exclusivos do campo da Hidráulica com matérias de teor pedagógico e científico (maioritariamente de astronomia) do interesse da Universidade de Coimbra[10]. Quanto ao ramo da Hidráulica, as instruções manifestam a preocupação com as causas e os efeitos deste tipo de obras, em função do regime dos rios (em particular dos torrenciais) e das circunstâncias locais de cada caso, assim como com os aspectos técnicos e económicos relacionados com o investimento e a conservação dos trabalhos. Monteiro da Rocha refere a importância da visita a obras malsucedidas, dando os exemplos da barra do rio Loire e do encanamento do rio Elba (junto aos campos de Magdeburgo) e estabelecendo uma relação directa com os casos da barra de Aveiro e do rio Mondego, respectivamente. Sugere ainda que o bolseiro examine estes e outros exemplos, "advertindo, que n'isto, assim como em medicina, tudo se cura nos livros, e tudo morre na practica"[11]. O cepticismo de Monteiro da Rocha, provavelmente, teria como precedente os pareceres, para os quais foi chamado pelo governo, sobre as

[9]Sobre o programa de obras públicas empreendido em Portugal no final do século XVIII, ver Martins, 2014.

[10]Ver de José Monteiro da Rocha, "Apontamentos sobre a viagem litteraria do doutor Manuel Pedro de Mello", 20 de Dezembro de 1801, in Rocha, 1890, 37: 268–271; ver, ainda, provavelmente da autoria de José Monteiro da Rocha, as "Instruçoens para huma viagem hydraulica", s. d., in Figueiredo, 2011, Anexos: 38–40.

[11]Sobre as principais expedições científicas deste período, ver Martins, 2017: 291–297.

obras de abertura da barra de Aveiro (pedido em 1781) e do encanamento do rio Mondego (pedido em 1800), estando a decorrer a execução do relatório sobre o Mondego pela Faculdade de Matemática[12].

A disciplina da Hidráulica é aqui invocada, no âmbito das comemorações do duplo centenário da morte de José Monteiro da Rocha, pela relevância que o eminente professor e matemático conferiu a esta área essencial para o desenvolvimento do território.

Bibliografia

Figueiredo, Fernando B., *José Monteiro da Rocha e a actividade científica da 'Faculdade de Mathematica' e do 'Real Observatório da Universidade de Coimbra': 1772–1820*, Coimbra, tese de doutoramento, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, 2011.

Freire, Francisco de Castro, *Memoria Historica da Faculdade de Mathematica nos cem annos decorridos desde a Reforma da Universidade em 1772 até o presente*, Coimbra, Imprensa da Universidade, 1872.

Martins, Carlos Moura, *O Programa de Obras Públicas para o Território de Portugal Continental, 1789–1809. Intenção Política e Razão Técnica — o Porto do Douro e a Cidade do Porto*, Coimbra, doutoramento em Teoria e História da Arquitectura, Universidade de Coimbra, 2014, 2 vols. `http://hdl.handle.net/10316/25713`

Martins, Carlos Moura, "A aplicação da ciência à política do território na transição do século XVIII para o século XIX", in Ana Cristina Araújo e Fernando Taveira da Fonseca (coords.), *A Universidade Pombalina. Ciência, Território e Coleções Científicas*, Coimbra, Imprensa da Universidade de Coimbra, 2017, pp. 245–312. `https://doi.org/10.14195/978-989-26-1366-6_7`

Rocha, José Monteiro da, "Cartas do Dr. José Monteiro da Rocha a D. Francisco de Lemos de Faria Pereira Coutinho", 1799–1816, *O Instituto*, Coimbra, Imprensa da Universidade, 1889-1890, vols. 36–37.

Sobre esta expedição científica, ver "Viagem do sr. Manuel Pedro de Mello a differentes paizes da Europa", in Freire, 1872: 81–82.

[12] Sobre estes pareceres, ver Figueiredo, 2011: 190–196. Sobre o relatório da Faculdade de Matemática, ver Martins, 2014: 331–335.

"Apontamento de Aritmética, sistema-métrico e geometria", um livro do micaelense Urbano Teles Ferreira

Helena Sousa Melo, *Maria do Carmo Martins*
Faculdade de Ciências e Tecnologia – DME,
Centro de Estudos Humanísticos (CEHu-UAc)
Universidade dos Açores

Na história da insularidade açoriana foram publicados alguns livros específicos sobre conteúdos matemáticos básicos. Refira-se, a título exemplificativo, a obra do Padre Jerónimo Emiliano de Andrade intitulada *"Noções primárias das figuras da geometria, e medição de superfícies, volumes de sólidos, por meio do desenho linear"*, datada de 1846. Neste resumo apresentamos um pouco da vida e da obra de Urbano Teles Ferreira, um professor de escola primária que exerceu as suas funções na ilha de S. Miguel – Açores. Uma análise ao seu livro "Apontamento de Aritmética, sistema-métrico e geometria: noções muitíssimo sumárias" revela um pouco de como o ensino da Matemática era ministrado no início do século XX nas ilhas açorianas.

O professor Urbano Teles Ferreira nasceu a 17 de agosto de 1897, era natural de Vila Franca do Campo, S. Miguel – Açores e filho de António Joaquim Ferreira e de Laura Correia Teles Ferreira. Diplomou-se, pela Escola de Ensino Normal de Angra do Heroísmo, Terceira – Açores, em 25 de julho de 1918, com uma média de 19 valores.

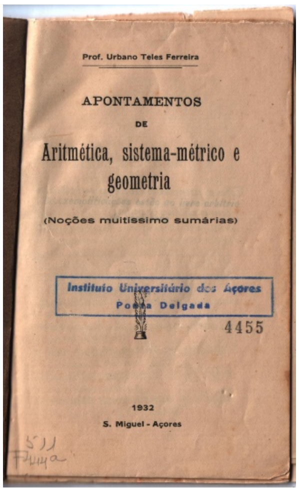
Após a sua formação, e a partir do ano de 1919, lecionou sempre em Escolas Primárias Masculinas em S. Miguel, nos Concelhos de Ponta Delgada (CPD), Lagoa (CL) e Ribeira Grande (CRG). Desempenhou, durante um período de três meses, o cargo de Professor Interino na Escola do Pico da Pedra, no CRG. No ano seguinte, 1920, entre os meses de janeiro e junho, manteve o mesmo cargo na Escola de S. José, no CPD. Nesse mesmo ano de 1920, e até julho de 1923 foi Professor Temporário na freguesia da Ribeirinha, CRG. De agosto a dezembro de 1923 foi Professor Temporário na freguesia de Santa Cruz, CL. Entre janeiro de 1924 e setembro de 1931 continuou na Escola de Santa Cruz, mas como Professor Definitivo, cargo que manteve até 1948. Entre outubro de 1931 e setembro de 1941, foi professor na Escola do Rosário, no mesmo CL e entre outubro de 1941 e fevereiro de 1948, na Escola de S. José, no CPD.

Muito dinâmico no desempenho das suas funções de professor, é de se destacar que, em 1924, a Câmara Municipal de Lagoa concedeu-lhe, bem como ao seu colega João Ferreira da Silva, um donativo específico para a compra de livros e utensílios escolares destinado aos alunos menos favorecidos das escolas primárias onde lecionavam.

No dia 28 de janeiro de 1948, e tomando posse a 9 de fevereiro, foi nomeado *Adjunto Interino do Director Escolar da Direcção de Distrito Escolar de Ponta Delgada*, iniciando as suas funções a 10 de fevereiro desse mesmo ano.

O professor Urbano Ferreira faleceu em 22 de maio de 1949.

Durante a sua vida temos conhecimento que escreveu o já mencionado "Apontamentos de aritmética, sistema-métrico e geometria: noções muitíssimo sumárias", publicado em S. Miguel, no ano de 1932, como complemento de informação das aulas que ministrava e que poderia ser utilizado por outros professores, dado as características da obra que sintetizava alguns conceitos básicos, uma vez que os manuais escolares, no arquipélago dos Açores, só foram adotados oficialmente a partir de 1940.



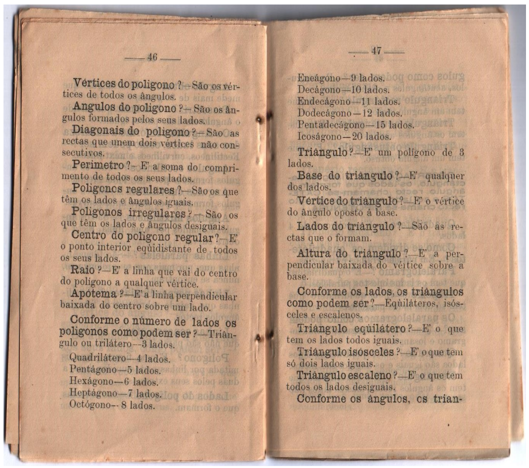
O livro, com a dimensão de 11 cm por 17 cm na vertical, contém um total de 56 páginas, frente e verso. Cada página possui, aproximadamente, 27 linhas de texto com dois tamanhos de letra. Por sua vez, cada linha possui 30 caracteres grandes ou 36 caracteres pequenos.

O livro está dividido em três partes, num total de 345 questões com resposta, como a maioria dos livros de ensino utilizados na época, já observado no livro do Padre Jerónimo de Andrade, nove observações, duas notas, três exemplos, nove fórmulas, nas últimas páginas do livro, e sem figuras ou imagens.

A primeira parte, dedicada à Aritmética, encontra-se entre a página 5 e 23, contendo 127 questões. As primeiras páginas tratam das características dos números inteiros, fracionários e mistos, bem como a numeração romana. Na página 13 inicia-se o estudo da operação da adição, na página 14 a subtração, na página 15 a multiplicação e na página 17 a divisão. Desde a página 19 até à página 21 apresenta-se as frações com as quatro operações e nas páginas 22 e 23, os números complexos e incomplexos com as quatro operações, e no final há uma observação a informar que "todas as operações com complexos serão exemplificadas pelo professor no quadro negro". Pela descrição desses números referimos que 1 hora e 40 minutos é considerado um número complexo, enquanto 100 minutos é um incomplexo, por ter apenas um numeral e uma unidade de medida.

A segunda parte, que versa sobre Sistemas Métricos, inicia-se na página 25 e termina na página 42, contendo 117 questões. A partir da página 26 temos as medidas lineares ou de comprimento, da página 30, as medidas de superfície, na página 33, as medidas agrárias, na página 34, as medidas de volume, nas páginas 35 e 36, as medidas para lenha, nas páginas 37 e 38, as medidas de capacidade, e desde a página 39, as medidas de peso.

Na terceira e última parte, entre as páginas 43 e 56, havendo 103 questões, por aborda-se os conceitos básicos da Geometria. Nas páginas 51 e 52 temos a exploração dos instrumentos geométricos, tais como: fio-de-prumo; nível; régua; esquadros; compasso; etc., e na página 53, procede-se à avaliação prática da superfície dos polígonos com a apresentação das fórmulas das áreas dos polígonos e do círculo, bem como o perímetro da circunferência.



— 46 —

Vértices do poligono? — São os vértices de todos os ângulos.

Angulos do poligono? — São os ângulos formados pelos seus lados.

Diagonais do poligono? — São as rectas que unem dois vértices não consecutivos.

Perimetro? — E' a soma do comprimento de todos os seus lados.

Poligonos regulares? — São os que têm os lados e ângulos iguais.

Poligonos irregulares? — São os que têm os lados e ângulos desiguais.

Centro do poligono regular? — E' o ponto interior eqùidistante de todos os seus lados.

Raio? — E' a linha que vai do centro do polígono a qualquer vértice.

Apótema? — E' a linha perpendicular baixada do centro sobre um lado.

Conforme o número de lados os poligonos como podem ser? — Triângulo ou trilátero — 3 lados.

Quadrilátero — 4 lados.
Pentágono — 5 lados.
Hexágono — 6 lados.
Heptágono — 7 lados.
Octógono — 8 lados.

— 47 —

Eneágono — 9 lados.
Decágono — 10 lados.
Endecágono — 11 lados.
Dodecágono — 12 lados.
Pentadecágono — 15 lados.
Icoságono — 20 lados.

Triângulo? — E' um polígono de 3 lados.

Base do triângulo? — E' qualquer dos lados.

Vértice do triângulo? — E' o vértice do ângulo oposto á base.

Lados do triângulo? — São as rectas que o formam.

Altura do triângulo? — E' a perpendicular baixada do vértice sobre a base.

Conforme os lados, os triângulos como podem ser? — Eqùiláteros, isósceles e escalenos.

Triângulo eqùilátero? — E' o que tem os lados todos iguais.

Triângulo isósceles? — E' o que tem só dois lados iguais.

Triângulo escaleno? — E' o que tem todos os lados desiguais.

Conforme os ângulos, os trian-

Referências Bibliográficas

- Ferreira, U. T. (1932), *Apontamentos de Aritmética, sistema-métrico e geometria*, São Miguel – Açores.
- Registo Biográfico – Ministério da Instrução Pública – Direção Geral do Ensino Primário – Arquivo da Direção Escolar sediado na EBI Canto da Maia (Ponta Delgada – São Miguel – Açores).
- Pavão, R. A. (2008), *Memórias do Ensino Primário no Concelho de Ponta Delgada*, Câmara Municipal de Ponta Delgada, Gráfica Açoriana, Lda.

O trabalho de Gomes Teixeira em equações com derivadas parciais

Luis Saraiva
CIUHCT, DM da FCUL

Nos últimos 28 anos do século XVIII importantes modificações aconteceram na estrutura científica portuguesa, que então pareciam poder abrir uma nova era da ciência, e em particular da matemática em Portugal: por um lado dá-se a *Reforma Pombalina da Universidade* em 1772, com a criação da primeira *Faculdade de Matemática* em Portugal, com cursos actualizados e correspondentes ao que então se ensinava na Europa culta; e por outro há a criação em 1779 da *Academia das Ciências de Lisboa*, a mais influente instituição científica portuguesa ao longo do século XIX, responsável pela publicação das suas *Memórias* que incluíam matemática e física desde 1797, a única publicação científica do género em Portugal durante a primeira metade do século XIX.

Contudo, quando se chega ao último quartel do século XIX, a situação da matemática em Portugal não era a melhor Para isso muito contribuiu o fechamento científico em que o país se encontrava, muito em especial a *Academia das Ciências* tinha uma quase total ausência de conexões internacionais. Em particular as suas *Memórias* quase que excluíam a participação de estrangeiros e os artigos estavam na sua esmagadora maioria escritos em português: dos 340 artigos publicados nas Memórias entre 1797 e 1914 (as três primeiras séries) apenas 16 não estavam escritos em português, e ao longo de mais de 100 anos apenas 8 estrangeiros — 3 dos quais matemáticos — escreveram nelas artigos.

O isolamento internacional teve custos pesados: para além da ausência de estímulos directos de cientistas de outros países, a produção nacional era ignorada: o caso de Daniel da Silva, que viu resultados seus que tinham sido publicados nas *Memórias* da *Academia* em 1851 serem parcialmente redescobertos (de forma independente) 26 anos depois por Gaston Darboux foi paradigmático.

Este facto veio reforçar a opinião que sem um jornal internacional publicado em Portugal não só o isolamento se manteria mas casos como o de Daniel da Silva se repetiriam. Francisco Gomes Teixeira (1851–1933), o matemático português mais influente do século XIX, criou em 1877 o primeiro jornal matemático português, o *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas.* Este jornal, de cunho claramente internacional, viu não só estrangeiros de renome incluírem nele artigos seus, como uma parte significativa dos matemáticos portugueses que escrevem no *Jornal* fizeram-no em francês, na época a linguagem científica mais utilizada pela comunidade internacional de matemáticos. Foi enorme esta mudança se nos lembramos que até então os matemáticos portugueses escreviam os seus artigos em português. É pelo impulso dado por Gomes Teixeira a este jornal que as publicações de matemática nos últimos 25 anos do século XIX mais do que quadriplicam em relação às publicadas no 3.º quartel do século XIX.

Gomes Teixeira fez o Curso de Matemática na *Faculdade de Matemática* da *Universidade de Coimbra* e aí se doutorou em 1875, com a tese "*Integração das equações às derivadas parciais de 2.ª ordem*", uma curta tese de 55 páginas dividida em 5 capítulos. Nela expõe trabalhos de Euler, Laplace, Monge, Ampere, Boole e Imschenetsky, completando-os com alguns resultados seus. As teses de doutoramento então tinham características diferentes das que têm hoje, e por isso era admissível que a maior parte da tese fosse uma exposição de resultados já conhecidos. Duas referências principais: o francês A. M. Ampère (1775–1836) e o russo V. G. Imschenetsky (1832–1892), que vê as suas duas principais obras traduzidas para francês no período 1869–1872, e foi aqui que Gomes Teixeira o descobriu. Ele é de facto uma influência em Gomes Teixeira, pois não só é ele quem chama a importância para os trabalhos de Ampère (não referidos pelos matemáticos de então), como também indica direções de pesquisa que Gomes Teixeira vai seguir.

A seguir à tese, e até 1886, Gomes Teixeira mantém a sua investigação na área das equações com derivadas parciais, publicando 7 artigos, 5 em revistas francesas, um no *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique* e outro no seu *Jornal.* Nos primeiros cinco artigos que publica após a tese, Gomes Teixeira desenvolve alguns dos aspectos analisados na sua tese. Só nos dois últimos "*Sur le développement des fonctions satisfaisant a une équation différentielle*" (1885) e "*Deuxième note sur le développement des fonctions satisfaisant a une équation différentielle*" (1886), ambos publicados nos *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure de Paris*, se nota uma aproximação diferente. Neles se pretende mostrar que um dado tipo de equação diferencial limita os possíveis valores dos coeficientes das séries que exprimem as soluções daquela equação diferencial.

Se formos ver a investigação publicada por matemáticos portugueses em equações diferenciais, utilizando a compilação feita por Rodolfo Guimarães na sua importante obra "*Les Mathématiques en Portugal*" (1909), vemos que na classe H "*Equations différentielles et aux différences partielles; équations fonctionelles; équations aux différences finies; suites récurrentes*" se encontram mencionados 15 items, incluindo 9 trabalhos de Gomes Teixeira (não inclui um artigo de 1882 e por outro lado inclui outros dois em temas afins). Para além de Gomes Teixeira há 5 autores portugueses mencionados, com um artigo cada, todos escritos em português e publicados em revistas portuguesas (mas não no *Jornal* de Teixeira, que era a única revista internacional de matemática publicada em Portugal) mais um autor anónimo do que parece ser um manual (escrito em português) da Universidade de Coimbra. Pelo contrário, Gomes Teixeira, tem 7 das 9 publicações em revistas internacionais francesas (4), belga (1), sueca (1) e italiana (1), enquanto a que tem em português está no seu *Jornal.*

Vemos pois que a produção científica de Gomes Teixeira, mesmo nesta fase inicial da sua carreira, nada tem a ver com a dos matemáticos portugueses seus contemporâneos. Ou seja, o esforço que Gomes Teixeira fez para que os portugueses publicassem em revistas de carácter internacional e em língua aceite na comunidade internacional não teve aqui o eco desejado.

Bibliografia

Luis Saraiva – Rodolfo Guimarães e "Les Mathématiques en Portugal", Actas do 1.º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática, DMUC, Coimbra, 1993, pp. 37–57.

Luis Saraiva – A Decisive Journal in Portuguese Mathematics: Gomes Teixeira's *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* (1877–1905), « L'émergence de la presse mathématique en Europe au 19ème siècle. Formes éditoriales et études de cas », Christian Gerini & Norbert Verdier (Eds.), Collège Publication, Oxford, 2014, pp. 67–95.

Luis Saraiva – O trabalho de Francisco Gomes Teixeira (1851–1933) em equações com derivadas parciais, Anais do XIII Seminário Nacional de História da Matemática, SBHMat, Fortaleza, Ceará, Brasil, 2019, pp. 53–79.

A "Greta Garbo" de J. Vicente Gonçalves: um compêndio de aritmética racional ímpar

Cecília Costa
UTAD, CIDTFF, CIDMA

O *Compêndio de Aritmética para o 3.º ciclo (7.ª classe) do Curso dos Liceus* publicado em 1939 pela Livraria Cruz, em Braga, foi o último dos cinco manuais que J. Vicente Gonçalves (1896–1985) escreveu para o ensino liceal. Apesar da sua qualidade e de ser o único com aprovação oficial este livro não vendeu, tendo sido considerado pelo editor um fracasso comercial. A correspondência comercial entre Vicente Gonçalves e Fernando Vilaça (editor) encontrada nos arquivos da Livraria Cruz e datada entre 31/12/1938 e 14/10/1954, entre outros aspetos permitiu conhecer as diligências tomadas por Vicente Gonçalves no processo de edição dos seus manuais e foi o ponto de partida para o estudo aqui apresentado.

A designação de "Greta Garbo" para este compêndio usada por Vicente Gonçalves, em 1944, na troca de correspondência com o editor mostra o humor fleumático e refinado do Matemático e, de algum modo, traduz o estatuto de "diva" que atribuía ao seu manual. Dez anos mais tarde, em carta de 14/10/1954, o editor (menos versado em cinema, pois nesse mesmo ano Greta Garbo recebeu um Óscar) retoma a metáfora agora para confirmar o desfecho que há muito anunciara: "Com a crise do cinema mudo a "Greta Garbo" está completamente posta à margem. Temos muitos exemplares e com a mudança de programas será muito difícil vermo-nos livres dela.".

Nesta comunicação, pretendemos responder às seguintes questões: (i) Que diligências eram tomadas pelo autor na divulgação do(s) seu(s) manual(ais) que contribuíam para a sua venda? (ii) Que características tinha este compêndio que o leva a ser considerado de grande qualidade? (iii) Que razões se podem aventar para este compêndio ter sido considerado um fracasso comercial (isto é, não vendeu de acordo com as expectativas)?

O contrato de edição deste manual foi oral e acordado em torno de um almoço com, pelo menos, a presença de Fernando Vilaça e Braga da Cruz, provavelmente em Vila Nova de Famalicão. Na altura a percentagem das vendas era distribuída do seguinte modo: 60% para o autor, 40% para o editor. Vicente Gonçalves dedicava-se com empenho e gosto à escrita dos manuais, bem como à sua divulgação e venda. Supomos que tenha abandonado esta atividade devido a vicissitudes legais (alterações de programa e surgimento do *livro único*), mas também pelo facto de o seu editor ter considerado o último manual um fracasso comercial. É ele quem decide o preço dos manuais, o número de ofertas, a forma e altura de divulgação, o número de exemplares que devem ser cartonados e os locais para onde devem ser enviados. É, também, quem entrega os manuais para apreciação e aprovação pela Junta Nacional de Educação.

O Compêndio de Aritmética de Gonçalves é constituído por seis capítulos, a saber: Números inteiros. Sua representação; Teoria das operações fundamentais; Potenciação. Sistemas de numeração. Radiciação; Divisibilidade; Números primos; e Números fracionários. A sua análise permite constatar o rigor e precisão que este Matemático imprimia aos seus escritos, a linguagem cuidada e a forma como encaminha o leitor por entre as definições, os teoremas, as demonstrações e os exemplos. No final de cada capítulo existem exercícios com soluções.

Verifica-se ainda a existência de notas históricas no corpo do texto e em nota de rodapé, notas de rodapé de carácter pedagógico e referências bibliográficas (as duas últimas não habituais em manuais deste tipo). É de sublinhar que os comentários históricos são menos comuns, alguns deles remetendo para aritméticas antigas, como ilustra o exemplo abaixo, que sugerem serem fruto das facetas de Vicente Gonçalves de bibliófilo e historiador da matemática:

> "(2) *Cita-se a* Aritmética *de Stevin (1585) como primeira obra em que a matéria é tratada de maneira completa e rigorosa. Não conhecemos a obra de Stevin, mas na* Prática Darismética *do nosso Rodrigo Mendes (ed. de 1570) já se tratam todos os casos das operações com quebrados"* (p. 199, itálico do original).

Apenas o manual de Vicente Gonçalves teve aprovação oficial, o que constituía uma forte razão para vender, no entanto tal não aconteceu. O próprio autor não compreendia as razões disso como refere em carta à Livraria Cruz de 1940:

> *"Não compreendo o que se está passando com a A. R.. Estando o livro adoptado em Braga, Bragança, Guarda, Coimbra, Castelo Branco, Santarém e um liceu de Lisboa — isto pelo menos — Como é que só saíram 100 exemplares? (...) e o meu livro é o mais completo de todos."*

Um argumento apresentado por Fernando Vilaça é o facto de o manual de Ferreira Neves ter saído primeiro e a preço mais baixo. Ferreira Neves, nos anos 30, era professor efetivo de Matemática no Liceu de Aveiro e autor de mais de uma dezena de manuais para o ensino liceal, com várias edições. O seu manual *Elementos de Aritmética Racional para o VII ano dos Liceus* apresentava uma linguagem simples, seca, telegráfica e entrecortada (não há uma linha condutora ao longo do texto), o tipo de escrita que convida à memorização. É um texto claramente diferente do de Vicente Gonçalves.

Não temos como comprovar o argumento, plausível, de Fernando Vilaça, mas acrescentamos a essa justificação o facto do manual de Vicente Gonçalves ser um livro com características muito particulares e diferentes dos manuais da época. Trata-se de um manual de grande qualidade, que convida à compreensão e aprofundamento dos temas, no entanto com um grau de dificuldade (demasiado) elevado para o nível de ensino a que se destinava.

O *Compêndio de Aritmética para o 3.º ciclo (7.ª classe) do Curso dos Liceus*, tal como Greta Garbo, perdura no tempo, quer pela qualidade ímpar, quer pelo mistério que encerra.

Referências

Costa, C. (2001). *José Vicente Gonçalves: Matemático... porque Professor!*, (Colecção Memórias n.º 37). Funchal: Centro de Estudos de História do Atlântico, Secretaria Regional do Turismo e Cultura.

Gonçalves, J. Vicente (1939). *Compêndio de Aritmética para o 3.º ciclo (7.ª classe) do Curso dos Liceus.* Braga: Livraria Cruz.

Pasta com correspondência comercial de J. Vicente Gonçalves para a Livraria Cruz (Braga) e cópia da correspondência emitida por esta Livraria para o autor, datada de 31/12/1938 a 14/10/1954.

Olimpíadas de Matemática — 30 anos de participações internacionais (o percurso até à primeira medalha de ouro em 2011)

Joana Teles
Universidade de Coimbra

Luís Bernardino
Agrupamento de Escolas Rio Arade

O projeto Olimpíadas de Matemática, em Portugal, surgiu, em 1980, levando à primeira edição das então chamadas Mini-Olimpíadas de Matemática, competição de caráter regional, organizada por alguns assistentes do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra no âmbito das atividades da Delegação Centro da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM).

O sucesso desta iniciativa fê-la crescer de regional a nacional, o que levou à mudança do próprio nome da prova, em 1983, as IV Mini-Olimpíadas coincidiram com as I Olimpíadas Nacionais de Matemática, que mais tarde passaram a ser Olimpíadas Portuguesas de Matemática (OPM) para poderem ser mais facilmente reconhecidas a nível internacional. O sucesso desta competição pode também ser medido pelo número de participantes que passou dos 1 377, nas I Mini-Olimpíadas de Matemática, para 32 000, em 2010, tendo ultrapassado os 50 000, na edição de 2019.

Portugal participou, pela primeira vez, nas Olimpíadas Internacionais de Matemática (IMO) em 1989 (na trigésima edição desta importante competição matemática). Nesta competição os alunos têm de resolver seis problemas em dois dias, divididos da seguinte forma, P_1, P_2 e P_3, no primeiro dia e P_4, P_5 e P_6, no segundo dia, tendo em cada dia quatro horas e meia de prova. Os problemas são propostos de modo a estarem divididos em graus de dificuldade da seguinte maneira: P_1 e P_4, problemas fáceis, P_2 e P_5, com um grau de dificuldade intermédia e P_3 e P_6, com um grau de dificuldade superior. Os prémios atribuídos nas IMO procuram seguir as seguintes razões: $\frac{1}{12}$ dos finalistas, recebem uma medalha de ouro, $\frac{1}{6}$ recebem uma medalha de prata e $\frac{1}{4}$ recebem uma medalha de bronze, sendo atribuída uma menção honrosa a quem consiga obter a pontuação máxima num dos seis problemas.

Na primeira participação (e nos anos seguintes) os alunos vencedores das OPM constituíam a equipa representante na IMO. Estes alunos reuniam-se durante alguns dias, a cerca de um mês da competição, numa universidade portuguesa, para aí participarem em atividades de preparação planeadas por docentes do ensino superior. Na primeira participação, a equipa portuguesa obteve quatro menções honrosas, o que, como é referido no relatório dessa participação, foi bastante meritório. Depois desta primeira participação Portugal obteve duas medalhas de bronze (em 1992 e 1993), e algumas menções honrosas, no entanto, era notório que os resultados da equipa de ano para ano iam descendo.

Em 2001, nas IMO, nenhum aluno português obteve qualquer prémio. A reflexão sobre estes desempenhos levou a que os responsáveis pela seleção, preparação e acompanhamento dos alunos, que integram a equipa portuguesa participante nas IMO, considerassem que a preparação dos alunos deveria ser feita ao longo do ano e, se possível, abrangendo até mais do que um ano letivo. Foi também decidido, pela coordenação das Olimpíadas, que vencer as OPM num determinado ano não asseguraria a participação nas IMO desse ano e a seleção seria feita entre um conjunto alargado de alunos vencedores das OPM desse ano e de anos anteriores. O Projeto Delfos (PD) aparece em 2001 e, nesse mesmo ano, neste projeto participam alunos do ensino não superior, do 8.º ao 12.º ano, com excecional aptidão e gosto pela Matemática. A SPM encarregou o PD de fazer a preparação e a seleção das equipas internacionais portuguesas. Em termos de funcionamento, o PD fomenta estágios mensais bem como uma "rede social" na qual são divulgados problemas e propostas de resolução. Nos encontros mensais são trabalhados conteúdos relacionados com geometria, teoria de números, combinatória, desigualdades e equações funcionais, temas comuns em provas de Olimpíadas. Perto das competições são realizados estágios mais prolongados, só com a equipa selecionada.

Atualmente, o trabalho desenvolvido no âmbito do PD assegura uma preparação que possibilita a resolução dos problemas P_1 e P_4 e, de facto, em 2009, pela primeira vez, todos os elementos da equipa portuguesa obtiveram a pontuação máxima no P_1, o que, desde logo, garantiu a atribuição a todos de uma Menção Honrosa. O referido problema resolvia-se com mais facilidade usando classes de congruência, um tema básico de Teoria de Números que é abordado nas sessões do PD.

Ao nível das pontuações, desde 2001, a classificação de Portugal tem subido consistentemente, encontrando-se já ao nível da média dos países da OCDE. Um ponto de destaque nesta melhoria foi a obtenção da primeira medalha de ouro em 2011.

No que concerne a temas, a geometria é um tema fundamental na preparação para as IMO, de facto entre 1989 e 2011 só quatro anos tiveram apenas um problema de geometria, em todos os outros houve sempre dois (em seis) problemas de geometria. O desempenho português neste tema foi consistentemente melhorando, comparativamente aos outros, exceção feita ao ano de 2011, no qual os zero pontos obtidos pela equipa portuguesa em geometria são facilmente explicados por o único problema de geometria da prova ser o P_6, o problema mais difícil. Paradoxalmente, nas OPM, geometria é o tema onde os finalistas têm mais dificuldade, sendo o problema 2 de 2007, com 0,77 de média em 10 pontos possíveis, aquele em que o desempenho foi mais fraco e no qual apenas quatro dos trinta finalistas não obtiveram zero pontos.

Ao nível do ensino básico, algo de semelhante parece acontecer, uma vez que os repetidos relatórios feitos, relativos à Prova Final de Matemática do terceiro ciclo, referem que os desempenhos menos positivos são registados, no tema Geometria, o que parece ser contrariado pelos relatórios do PISA, nos quais é referido que, de 2003 para 2012, Geometria foi o tema com a melhor evolução, sendo o único que já está ao nível da média da OCDE.

Tais resultados levam-nos a inferir que com um trabalho adequado, os nossos alunos podem estar ao nível dos melhores, em termos de Geometria.

Referências bibliográficas

E. Sá, A. Kovačec, A. Branquinho, A. Salgueiro e J. Neves. (2008) "Projecto Delfos, Escola de Matemática para Jovens". *Rua Larga 22* (Revista da Reitoria da Universidade de Coimbra), pp. 23–24.

Hans-Dietrich Gronau, Hanns-Heinrich Langmann, Dierk Schleicher Editors. (2010) *50th IMO — 50 Years of International Mathematical Olympiad.* Springer.

J. Teles. (2007) "As XXV Olimpíadas Portuguesas de Matemática". *Gazeta de Matemática 153*, pp. 53–57.

J. Teles. (2010) "Ano de Ouro para as Olimpíadas". *Gazeta de Matemática 165*, pp. 55–56.

L. Bernardino. (2013) "Miniolimpíadas de Matemática (1980–1984): um projeto de incentivo ao estudo da Matemática — uma primeira abordagem". *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática 69*, Suplemento, pp. 69–71.

O modelo de Mercúrio de Ibn al-Shāṭir em Copérnico

Inês Bénard da Costa
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

O objectivo desta apresentação foi introduzir uma polémica historiográfica que se tem mantido, desde 1957, até hoje. Em discussão, está o trabalho de Nicolau Copérnico (1473–1543) e a possibilidade de ter sido, ou não, influenciado pelo de um conjunto de astrónomos árabes, entre os quais Ibn al-Shāṭir (1300–1360), Naṣīr al-Dīn al-Tūṣi (1201–1274) e Mu'ayyad al-Dīn al-'Urḍī (1150–1260).

O tema é bastante complexo. Para se entenderem os argumentos principais, de ambos os lados, é necessário analisarem-se tanto as condições socioculturais das tradições em questão, como as próprias teorias astronómicas. Tendo em conta a escassez de tempo, o que se propôs para a sessão do SNHM foi introduzir-se a polémica, partindo da comparação dos modelos de Ibn al-Shāṭir e Copérnico para o movimento de Mercúrio. Optou-se por este modelo pelo facto de incluir dois mecanismos matemáticos — o par-de-Tūṣi e o Lema de 'Urḍī —, aplicados por ambos os astrónomos e acerca dos quais se tem discutido muito. Ou seja, começando com uma apresentação ao debate historiográfico e aos astrónomos envolvidos, pretendia-se continuar com uma descrição bastante superficial dos modelos astronómicos. No entanto, uma vez que seria impossível compreender o que quer que fosse sem se conhecer um pouco de astronomia antiga, propôs-se ainda uma primeira parte, dedicada quer a alguns dos princípios de filosofia natural aristotélica, quer ao modelo de Mercúrio ptolemaico.

A tradição clássica era, em grande parte, o cenário em que a astronomia de Ibn al-Shāṭir e, mais tarde, a de Copérnico se inseriam. Segundo esta tradição, a filosofia natural e a astronomia distinguiam-se de acordo com os objectivos de cada uma. Enquanto os filósofos procuravam entender o modo através do qual o universo se organizava, os astrónomos pretendiam desenvolver modelos matemáticos que descrevessem os movimentos celestes da forma mais precisa possível. Aristóteles defendeu, no *De caelo*, entre vários princípios filosóficos, que, num mundo supralunar, geocêntrico e constituído por éter, todos os movimentos seriam circulares uniformes. No Almagesto, Ptolomeu propôs um conjunto de modelos e teorias astronómicas que descreviam os movimentos celestes e aos quais não se exigia que fossem verdadeiros, mas que obtivessem resultados o mais precisos possível. Construiu um conjunto de modelos formados por círculos com movimentos e direcções próprios. Para Mercúrio — que se julgava completar uma trajectória oval, com dois pontos de distância mínima à Terra (perigeus) e um de distância máxima (apogeu) — propôs-se um modelo com três círculos: o planeta deslocava-se em torno do primeiro — o epiciclo —, cujo centro se movia sobre o segundo — o deferente — cujo centro, por sua vez, circulava sobre um círculo pequeno, centrado num ponto excêntrico à Terra. Todos estes círculos deslocavam-se com movimentos circulares uniformes, à excepção do deferente, que se movia circularmente em torno do seu centro, mas uniformemente em torno de um outro ponto — o ponto equante.

O ponto equante nos modelos ptolemaicos foi criticado apenas quando alguns astrónomos começaram a procurar modelos astronómicos consistentes com os princípios de filosofia natural. Num universo onde só existiriam movimentos circulares uniformes, não poderia ser admitido um centro para o movimento uniforme distinto do centro para o movimento circular. Eram estas as objecções principais de um conjunto de astrónomos árabes e, mais tarde, de Copérnico. Ibn al-Shāṭir, o mūwaqqīt (timekeeper) na mesquita de Umayyad em Damasco, foi o primeiro astrónomo a conseguir reproduzir os resultados ptolemaicos num modelo filosoficamente coerente. Conseguiu-o com a ajuda de dois mecanismos matemáticos desenvolvidos por Mu'ayyad al-Dīn al-'Urḍī e Naṣīr al-Dīn al-Tūṣi — astrónomos associados ao observatório de Marāgha, no Irão. O primeiro, o lema de 'Urḍī, estabelece que, se dois segmentos de recta iguais formarem ângulos internos ou alternados iguais com uma dada recta, então a segunda recta, que unir as outras extremidades dos dois segmentos, será necessariamente paralela à primeira. Já o par-de-Tūṣi trata-se de um mecanismo cujo objectivo é criar um movimento rectilíneo através de dois circulares uniformes.

Finalmente, observando o modelo coperniciano para Mercúrio, percebe-se que, apesar de heliocêntrico, é equivalente ao de Ibn al-Shāṭir. Tirando-se o Sol do centro do universo e colocando lá a Terra, através de uma simples troca de vectores, obtém-se o modelo do astrónomo damasceno. Os dois variam apenas em alguns parâmetros numéricos.

Terá Copérnico sido influenciado pelas terias árabes? Se, por um lado, a equivalência entre os modelos para os movimentos longitudinais dos planetas sugere que sim; algumas diferenças e a falta de vestígios de transmissão textual defendem que não. Considerando que ambos os astrónomos partiram das mesmas críticas ao Almagesto, pode ter sido o caso que tenham chegado às mesmas conclusões de forma independente.

Bibliografia

Kennedy, E., & Roberts, V. (1959). The Planetary Theory of Ibn al-Shāṭir. *Isis*, 50(3), 227–235.

Swerdlow, N. and Neugebauer, O. (1984). *Mathematical astronomy in Copernicus's 'De revolutionibus'*. New York, NY [u.a.]: Springer.

Saliba, G. (1994). *A history of Arabic astronomy.* New York: New York University Press.

Os 500 anos do 'Tratado da Prática Darismética' de Gaspar Nicolas

Pedro Freitas, *Jorge Nuno Silva*
CIUHCT, Universidade de Lisboa

Comemora-se em 2019 o quingentésimo aniversário da edição do primeiro livro de matemática impresso em Portugal, "Tratado de Prática Darismética" de Gaspar Nicolas. Estando em preparação uma edição comentada dessa obra, damos conta, nesta comunicação, de alguns aspetos da sua natureza, nomeadamente da variedade do seu conteúdo, inspirado em Luca Pacioli, que vai da aritmética comercial à teoria das ligas, passando pela geometria e pelas recreações.

Gaspar Nicolas viveu num período de grande atividade editorial, no que diz respeito a livros de aritmética comercial. Depois do seu livro, também Rui Mendes publicou "Prática Darismética" em 1540 e Bento Fernandes "Tratado da Arte de Arismética" em 1555. O livro de Gaspar Nicolas conheceu mais 9 edições, impressas entre os séculos XVI e XVIII (1530, 1541, 1551, 1573, 1594, 1607, 1613, 1679 e 1716). Hoje em dia, a primeira edição encontra-se digitalizada na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, tendo esta mesma edição sido reeditada em 1963, em fac-simile.

O livro tem grande influência de livros italianos, nomeadamente do "Liber abaci" de Fibonacci, de 1202, e da "Summa de arithmetica, geometria. Proportioni et proportionalita de Luca Pacioli", de 1494. O autor, Gaspar Nicolas, seria talvez natural de Guimarães, talvez de origem judaica, e talvez tenha participado na realização de tábuas náuticas. Está organizado por secções, com os seguintes conteúdos:

- Tabuadas e regras para as quatro operações. Inclui multiplicação por gelosia. A divisão é pelo método da galera (tem escrita diferente para divisores com um algarismo).

- Regras de três, com vários problemas de proporcionalidade direta e inversa.

- Regra relativa a impostos: quarto e vintena.

- Regras de operações com frações, "quebrados".

- Método da dupla falsa posição, com vários problemas, "oposição".

- Progressões (somas de termos).

- Problemas de "baratos" (trocas).

- Números: grande secção com problemas variados de cariz recreativo, do tipo "adivinhar um número", com métodos de resolução, por vezes sem explicação.

- Perguntas: tipicamente problemas recreativos, alguns dos quais se inspiram diretamente em clássicos como Pacioli, Fibonacci ou mesmo Alcuíno.

- Tirar raízes: métodos para obter raízes, exatas e aproximadas, de inteiros e racionais.

- Geometria: vários problemas em contexto circular, que fazem uso do valor aproximado de pi 22/7, ou em retângulos, onde usa muito o teorema de Pitágoras.

- Liga de prata, problemas de várias ligas metálicas.

Apresentamos a seguir dois exemplos de problemas.

1. A idade do filho

Uma mulher tinha um filho diante de si morto e dizia "meu filho se tivesses vivido mais um terço e um quarto do que viveste, com um ano que eu te daria viverias 100 anos."

Ora eu demando quantos anos tinha o mancebo quando morreu. E se o saber quiseres, porque faz menção de 100 e ela diz que lhe dará um ano da sua vida tira um de 100 e ficam 99. Ora porque ela faz menção de terço e de quarto busca um número que posto sobre ele o terço e o quarto façam 99, e para o saberes fazer multiplica as figuras uma pela outra, 3 vezes 4 são 12 e diz o terço de 12 são 4 e o quarto de 12 são 3, junta essas partes, 4, 3 e 12 e farás 19, ora dirás se 19 fossem 12 que seriam 99. Multiplica 12 vezes 99 e são 1188, estes parte por 19 e vem 62 10/19 e tantos anos havia o bom mancebo quando morreu. Se o quiseres provar toma a multiplicação 1188 e tira o terço que são 396 e o quarto que são 297 e soma-os com 1188 e farás 1881 e estes parte por 19 que foi o teu partidor e vir-te-ão 99, juntamente com um ano que lhe a mãe dava fazem 100.

O mais antigo problema deste género, onde o tempo de vida de Diofanto é dado por um enigma, é o Epigrama 126 da Antologia Grega.

2. Um rato

Um rato está em cima de uma torre que tem 58 braças e em baixo de todo está um gato. Ora o rato anda cada dia um terço e de noite torna atrás um quarto e o gato não anda nenhuma coisa.

Ora eu demando em quanto dias será o rato em baixo. E se o saber quiseres muito fácil é de fazer porque diz que de dia anda um terço e de noite anda um quarto, tira de um terço um quarto fica um doze avos, onde tens sabido que cada dia anda um doze avos de braça, assim que em 12 dias anda uma braça, ora porque a torre tem 58 braças farás por regra de três dizendo assim se um fosse 12 que seriam 58. Multiplica 12 vezes 58 e são 696, parte por um e vem aquilo mesmo, 696 e em tantos dias foi o rato para baixo.

A resolução esquece que o rato, quando atinge o chão, não tornará a subir. A resposta correta é 693. Os problemas mais antigos deste género surgem em Fibonacci, que comete erro semelhante nas resoluções.

Está previsto um encontro, com o título "Gaspar Nicolas e a aritmética — 500 anos do Tratado da Prática Darismética", a decorrer no Caleidoscópio – ULisboa, a 22 de novembro de 2019 para celebrar os 500 anos do Tratado com um conjunto de conferências, que se pretendem constituir reflexão importante sobre a obra de Gaspar Nicolas e o seu contexto.

A comissão organizadora é constituída por Henrique Leitão (CIUHCT-ULisboa) Jorge Nuno Silva (CIUHCT-ULisboa) Pedro Freitas (CIUHCT-ULisboa) e Tiago Hirth (ULisboa)

Bibliografia

Adelino Marques de Almeida, *Aritmética como descrição do real.* 2 vols. INCM–Imprensa Nacional Casa da Moeda, 2005.

Gaspar Nicolas, *Tratado da Prática Darismética*, Germão Galharde Francês, 1519.

Teresa de Jesus Clain, *A Matemática e o comércio em Portugal através das obras de três aritméticos do século XVI: Gaspar Nicolas, Ruy Mendes e Bento Fernandes.* Tese de Doutoramento em Matemática, Universidade de Aveiro, 2015.

Teoria(s) de proporções em Portugal na primeira metade do século XVIII

Maria Elisabete Barbosa Ferreira
Agrupamento de Escolas Dr. Mário Fonseca,
Escola Básica e Secundária de Lousada Norte, Lustosa

A teoria de proporções tem sido aplicada em diversas áreas ao longo dos tempos. Com a descoberta das grandezas incomensuráveis, na Antiguidade Grega, foi reconhecida a necessidade de uma teoria de proporções aplicável não só a grandezas comensuráveis como também a grandezas incomensuráveis. A teoria *clássica* de proporções foi frequentemente criticada pela sua alegada obscuridade e dificuldade, principalmente a partir do Renascimento Europeu. Foram muitos os autores que se dedicaram a esta investigação ao longo dos tempos, tendo sido apresentadas algumas alternativas. Segue-se uma pequena abordagem às versões da teoria de proporções em textos portugueses na primeira metade do século XVIII, e proceder-se-á à comparação das mesmas, quer entre si, quer com obras de autores europeus contemporâneos.

1 A "origem" da(s) Teoria(s) de Proporções

No tratado *Elementos*, Euclides apresenta duas teorias de proporções separadas: no Livro V aplicável a grandezas em geral, e no Livro VII aplicável apenas a números. A Definição 5[1], do Livro V, explica a proporcionalidade para grandezas em geral e, por ter como base a propriedade dos equimúltiplos, tem sido alvo ao longo dos tempos de várias críticas, sendo apelidada de "obscura" por vários autores. A definição análoga para números, a Definição 20[2], do Livro VII, é considerada mais simples e assenta na noção de "ser o mesmo múltiplo, ou a mesma parte ou as mesmas partes".

[1] V, Def. 5: Diz-se que grandezas estão na mesma razão, uma primeira para uma segunda e uma terceira para uma quarta, quando quaisquer mesmos múltiplos da primeira e da terceira simultaneamente excedem, são simultaneamente iguais, ou são simultaneamente menores do que quaisquer mesmos múltiplos da segunda e da quarta, tomados na ordem correspondente.

[2] VII, Def. 20: Números estão em proporção [ou dizem-se proporcionais] quando o primeiro é o mesmo múltiplo, ou a mesma parte, ou as mesmas partes, do segundo que o terceiro é do quarto.

2 A(s) Teoria(s) de Proporções na Europa do Século XVII

Nesta secção será feita uma breve referência às teoria(s) de proporções na Europa na segunda metade do século XVII, visto ser esta a época em que se desenvolveram as teorias que serviram de referência aos autores portugueses.

2.1 Giovanni Alfonso Borelli

Borelli considerou a teoria de proporções presente nos *Elementos* como difícil e incompreensível, designadamente no que concerne à utilização da propriedade dos equimúltiplos. Na sua obra *Euclides Restitutus* (1658), Borelli reformulou as definições de Euclides, bem como proposições e axiomas, na tentativa de colmatar as lacunas que identificou nos *Elementos*. A sua preocupação era encontrar uma definição mais fácil que pudesse ser aplicada a todo o tipo de grandezas, comensuráveis e incomensuráveis, dado que defendia que qualquer definição é o princípio da ciência, devendo por isso ser o mais geral possível. Na obra supracitada, Borelli apresenta um processo para encontrar a "igualdade entre razões" por aproximação.

2.2 André Tacquet

A partir da obra de Euclides, Tacquet escreveu em 1654 *Elementa geometriae planae ac solidae*, onde, entre outros aspetos, reformulou as definições clássicas de razão e proporção presentes nos *Elementos*. No seu trabalho Tacquet substitui os termos parte/partes por parte alíquota/parte aliquanta, termos que não surgem nos *Elementos*. Para explicar a igualdade/semelhança de razões para grandezas incomensuráveis, Tacquet expõe que é possível encontrar infinitas razões irracionais, maiores ou menores formadas por termos diversos. Tal como Borelli, Tacquet considera que a Definição 5 do Livro V está na base da dificuldade da(s) teoria(s) de proporções e apresenta uma outra propriedade/indício principal e infalível para a igualdade de razões: "as razões AB para CF e GM para NQ são iguais, quando tomadas quaisquer partes alíquotas semelhantes dos consequentes, estas estão contidas o mesmo número de vezes nos seus antecedentes".

3 Teoria(s) de Proporções em Textos Portugueses na primeira metade do século XVIII

3.1 Manoel de Campos

A obra de Manoel de Campos, *Elementos de Geometria Plana, e Sólida* de 1735, é uma tradução adaptada da obra de Tacquet, *Elementa Geometriae*. Apesar de existirem algumas alterações na estrutura e na utilização de determinados conceitos, em termos de conteúdo este trabalho é, de uma forma geral, idêntico ao de Tacquet, estabelecendo as mesmas críticas relativamente à Definição 5. Manoel de Campos defendia que era necessário encontrar uma propriedade que permitisse explicar de forma clara a igualdade de razões para grandezas de qualquer tipo. Para o português a Definição 5, por ser baseada nos *Equimúltiplos*, não é evidente nem clara, necessitando mais de ser demonstrada do que alguns resultados que dependem da mesma. Muitos dos resultados do Livro V têm como base esta definição, o que os torna difíceis de entender. Para ultrapassar esta obscuridade, Manoel de Campos sugere a substituição do *Princípio dos Equimúltiplos* pelo *Princípio dos Modernos das Equi-alíquotas*. De acordo com este princípio, a definição de razões semelhantes é: "dadas as razões de A para B e C para D, se se tomarem partes alíquotas semelhantes dos antecedentes, A e C, e estas couberem o mesmo número de vezes nos respetivos consequentes, B e D, então, as razões são semelhantes".

3.2 Manoel de Azevedo Fortes

Entre outros trabalhos, Azevedo Fortes publicou, em 1724, o manuscrito *Geometria Especulativa. Trigonometria Esférica (modo de riscar e dar aguadas nas plantas militares)* e, em 1744, *Lógica Racional, Geométrica e Analítica*, sendo este considerado o primeiro tratado sobre lógica escrito em português na íntegra.

3.2.1 Geometria Especulativa

A ordem que surge neste manuscrito é a mesma dos *Elementos*, contudo, apenas surgem as proposições/teoremas que considera pertinentes e necessárias na sua área. Comparando o manuscrito e a obra *Cours de Mathématique* de Jacques Ozanam, edição de 1693, verifica-se que o primeiro é uma tradução da obra do francês. A Definição 5, do Livro V, dada por Azevedo Fortes, é mais genérica e concisa do que as similares de Tacquet e de Manoel de

Campos, tendo contudo a mesma essência: “razões *iguais* ou *semelhantes*, são aquelas em que os antecedentes contêm, ou são igualmente contidos nos seus consequentes”. Tal como Ozanam, Azevedo Fortes não expõe críticas aos *Elementos*, ao contrário de Manoel de Campos. Azevedo Fortes refere que para determinar a razão entre duas grandezas deve-se dividir o antecedente pelo consequente e recorre ao método das Equi-alíquotas para provar a igualdade de razões.

3.2.2 Lógica Racional, Geométrica e Analítica

Esta obra encontra-se dividida em três partes: *Lógica Racional* (Parte I), *Lógica Geométrica* (Parte II) e *Lógica Analítica* (Parte III). A Parte I aborda a lógica filosófica; a Parte II trata da Geometria Euclidiana, enquanto a Parte III é dedicada à Álgebra. A temática das razões e das proporções é abordada nas Partes II e III. A principal fonte destas Partes é Bernard Lamy: enquanto a *Lógica Analítica* foi elaborada a partir de *Élémens des Mathématiques*, edição de 1692, não se verificando uma correspondência tão “exata” como entre o manuscrito e a obra de Ozanam, constata-se que a *Lógica Geométrica* é uma tradução incompleta da obra *Les Élémens de Géométrie*, edição de 1731.

Lógica Geométrica Nesta Parte Azevedo Fortes estabelece que, para comparar duas grandezas A e B, se deve recorrer à divisão das mesmas: A por B ou B por A, e adota a notação atual: $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ ou $\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$. A associação da razão entre duas grandezas a uma operação aritmética representa uma diferença em relação ao manuscrito e também às obras referidas anteriormente, uma vez que é feita de forma explícita. Surge a definição de proporção como sendo uma igualdade de razões e é utilizada a notação atual para designar a proporção entre as grandezas. Para além desta notação, existe também a utilizada no manuscrito, a saber, A.B :: C.D. No manuscrito não aparece a definição de proporção. Contudo, é referido que grandezas que têm entre si a mesma razão são grandezas proporcionais. Apesar de utilizar exemplos numéricos na explicação deste conceito, facto que é significativo e revelador da “aritmetização”, Azevedo Fortes não mencionou operações aritméticas no seu manuscrito.

Lógica Analítica No Capítulo I do Livro III Azevedo Fortes apresenta uma crítica à natureza de uma razão, referindo que definir razão entre duas grandezas apenas como “o modo de uma conter ou estar contida na outra“, não é suficiente. Através de exemplos menciona que a razão é uma grandeza, ou quantidade, não absoluta, mas relativa, e por ser deste género é possível efetuar com ela as operações que se realizam com as grandezas absolutas. Refere também que uma proporção é o que resulta da comparação de duas razões. No Capítulo IV é mencionado que a igualdade de duas razões se verifica através da divisão das grandezas que as constituem: se os quocientes forem iguais, as razões serão iguais. O Livro V contém traduções das obras *Élémens des Mathématiques* e *Élémens de Géométrie*. Neste Livro a palavra fração é associada a *quebrado* e este termo é utilizado em todo o Livro. A fração é associada à divisão de dois números, o que torna possível assumir para as razões todas as operações aritméticas que se efetuam com os números, estando-se perante mais uma aritmetização das razões. Azevedo Fortes aborda a temática da incomensurabilidade de grandezas apenas na *Lógica* Analítica, referindo que a dificuldade na "matéria dos incomensuráveis" consiste em definir a igualdade de razões *surdas*, sendo que a comparação entre razões de *número a número* é muito diferente da comparação entre razões surdas. É possível comparar razões de número a número reduzindo-as ao mesmo consequente (equivalente a reduzir duas frações ao mesmo denominador), procedimento que não pode ser aplicado às razões surdas, uma vez que se fosse possível, as razões não seriam surdas.

3.3 Algumas considerações sobre as obras referidas

Associar as grandezas comensuráveis a números racionais possibilita a aplicação das operações numéricas a estas grandezas, o que torna esta aritmetização vantajosa. Para proceder da mesma forma para as grandezas incomensuráveis, é necessário aferir da possibilidade de realizar as operações aritméticas entre os números irracionais (entidades que não eram consideradas números). A instituição de uma Aritmética para os irracionais em conjunto com a definida para os racionais, viabiliza a realização de todas as operações para qualquer tipo de grandeza.

Efetuando uma comparação entre os autores supramencionados verifica-se a existência de duas conceções. A primeira envolve Tacquet, Manoel de Campos, Ozanam e Azevedo Fortes (no manuscrito). Nas suas obras estes autores seguem a ordem dos *Elementos*, acrescentando alguns corolários e lemas que permitem a demonstração de algumas proposições de forma diferente de Euclides. A segunda conceção reúne Lamy e Azevedo Fortes (na Lógica). Estes não seguem a mesma ordem do tratado de Euclides e apresentam uma abordagem diferente: constroem uma teoria válida para todo o tipo de grandezas, com recurso a processos algébricos.

A evolução da Álgebra é acompanhada de uma transformação progressiva dos conceitos de razão e proporção. O desenvolvimento da Aritmética, decorrente da evolução do conceito de número, permitiu efetuar todas as operações, servindo de modelo à Álgebra, algo que não era possível com a "Aritmética Euclidiana". A associação da Álgebra à Geometria reveste a Matemática de um caráter unitário, facto que exigiu a definição das operações sobre as linhas geométricas. Em teoria, estabelecer as operações da Aritmética no âmbito da Geometria possibilitaria a simplificação desta última e permitiria a associação da Geometria à Aritmética e à Álgebra. Para tornar possível esta associação, é necessário tornar válidas para as grandezas em geral, as operações que se realizam para as grandezas que se podem exprimir por números, ou seja, identificar a que operação geométrica corresponde uma operação aritmética/algébrica.

Estabelecer uma teoria de proporções suscetível de ser aplicada a todo o tipo de grandezas, que englobasse todos os *objetos matemáticos*, e que contemplasse as operações algébricas definidas no âmbito da Geometria, esteve na origem do trabalho de muitos estudiosos nos anos seguintes aos que foram objeto deste estudo.

Referências

Ferreira, Maria Elisabete Barbosa, *Teoria(s) de Proporções em Portugal, na Primeira Metade do Século XVIII*, Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho (Escola de Ciências), 2013.

The birth of a scientific astronomical navigation for seafarers in the second half of the Eighteenth-Century, in England, France and Portugal

Guy Boistel
Centre François Viète, Université de Nantes

The development of post-Newtonian celestial mechanics during the 18th century offer astronomers the possibility of bringing new astronomical tools to help seafarers for the determination of longitudes at sea. If the impulse is given by the Longitude Act of Queen Anne Stuart promulgated in 1714, the main theoretical developments are made by French members of the Académie royale des sciences; they are the result of the works made by the astronomers Abbé Lacaille and Jérôme Lalande, both close friends of the mathematician Alexis Clairaut. Their work are the main source of inspiration for José Monteiro da Rocha, who will develop his own original astronomical and mathematical methods, first during a crucial trip across the Atlantic ocean, then at the University of Coimbra.

As it is well known, Spain and the States of Holland promulgated important rewards for finding longitude at sea from the late sixteenth century onwards. One of the most famous was that offered by the Dutch navy in the 1630s, for which Galileo Galilei proposed a curious floating telescope for observing eclipses of Jupiter's satellites and his jovilabe, an apparatus able to predict the eclipses of these satellites. In the same period, a dispute known as '*the great longitude quarrel'* began in France between Le Cardinal de Richelieu and the French savant Jean-Baptiste Morin. He set down thirteen propositions outlining astronomical and computational methods for finding longitude from the Moon, including lunar distances, lunar heights, meridian transits and horary angles. Morin also described the 'clearing' of observations for refraction and parallax. The principles were known and understood; the instruments had to be improved. Nonetheless, Morin's contributions were well known to eighteenth-century astronomers, including Abbé Nicolas-Louis de Lacaille and Canon Alexandre-Gui Pingré, who were aware of his propositions and used them as the bases of their own methods.

At the end of the seventeenth century, two increasingly dominant maritime states, France and Britain, established royal observatories, each with the remit of helping to solve the problem of determining longitude at sea. In Britain, as in France, the Astronomer Royal was instructed '*to apply himself with the most exact Care and Diligence to the rectifying the Tables of the Motions of the Heavens, and the places of the fixed Stars, so as to find out the so much desired Longitude of Places for perfecting the Art of Navigation'.* The map of France was significantly modified by the astronomers Jean Picard and Philippe de La Hire by determining terrestrial longitudes from observations of the eclipses of the two first satellites of Jupiter, as proposed by Galileo.

Like Britain, France initiated rewards and academic prizes for solving the longitude problem and improving navigation at sea. Two years after the passage of the British *Longitude Act*, the French Regent Philippe d'Orléans first suggested possible rewards, although the promise was not fulfilled. In 1722, however, the Académie royale des sciences elected to use a bequest from Count Rouillé de Meslay to fund a biannual prize for navigation. Although this was arguably to have only minor impact on nautical astronomical research in France, the proposed and actual prizes meant that the French government needed experts to examine projects claiming rewards. These experts are among the most famous astronomers and mathematicians involved in the development of the astronomical navigation in France; Bouguer, Lalande, Clairaut for example.

The traditional historiography sets that the problem of finding the longitude at sea is solved with the John Harrison's marine chronometer H4 awarded in 1765. But it is not so simple. Marine timekeepers are unique and rare instruments, very expensive and the captains of the merchant fleet can not afford these instruments. Until the mid-nineteenth century, astronomy is the clue for the determination of the longitudes at sea: the Lunar distances method.

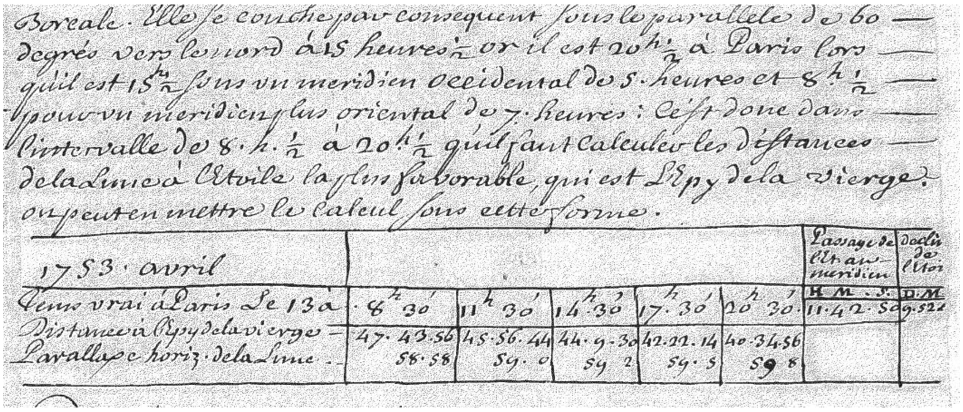
The first observations of lunar distance at sea: Abbé Lacaille and Jean-Baptiste d'Après de Mannevillette, 1749–51

After the passage of the Longitude Act in 1714, it seemed clear to astronomers that the Moon was the only natural clock that could be used regularly at sea. In 'A proposal of a method for finding the Longitude at sea within a degree' in the *Philosophical Transactions* for 1731, Edmond Halley offered a method based on observations of occultations of a star by the Moon for correcting lunar tables and calculating the ecliptic longitude of the Moon to within two arcminutes. Halley's paper showed how the observation of a single angular distance between the Moon and a fixed star could help the seafarer determine longitude.

In 1742, Nicolas-Louis de Lacaille, 'adjoint astronome' of the Académie des sciences, took charge of the computation and publication of the *Ephémérides des mouvements célestes*. These were computed for a period of ten years and gave the astronomical data needed to compute calendars. Lacaille was aware of the new requests for a renewal of the methods of nautical astronomy and of Halley's 1731 paper. In 1742, while working on the fourth volume of the *Ephémérides* for 1745–55, Lacaille thought of adding some considerations on new ways of finding longitude at sea from lunar distances. The opportunity arose, when Lacaille met Jean-Baptiste d'Après de Mannevillette, an officer of the French West Indies Company. In June 1749, having made improvements to the octant, Mannevillette was the first naval officer to apply the lunar distance method at sea, near Cape Verde. Well trained in mathematics, Mannevillette later said that he was able to determine longitude with an accuracy of between five and fifteen 'lieues marines' or marine leagues (25 to 45 km); in other words, to an accuracy greater than that required by the 1714 Longitude Act. His results were published later, in 1775, in the *Neptune François* (a collection of sea charts).

Mannevillette's voyage to the Cape of Good Hope (1750–54) with Nicolas-Louis de Lacaille helped rekindle practical interest in the lunar-distance method. Both used the method to determine the longitude of Santiago in the Cape Verde Islands with considerable accuracy in November 1750. Several determinations of differences of longitude were also made by lunar distance (from Antares) in Rio de Janeiro in January 1751. Given his skill in determining stellar positions, improving tables of atmospheric refraction and correcting tables for solar motions, not to mention his familiarity with Clairaut's work on lunar theory, it is no surprise that Lacaille was able to deploy and correct the tables required for carrying out the lunar-distance method at sea. After completing his work on lunar parallax, geodesy and stellar cataloguing in Cape Town, Lacaille developed his thoughts on the lunar-distance method on the voyage back to France. In 1754, he sent a memorial on his new method to the Académie. Noting that most seafarers lacked the scientific training to carry out the lunar method, he argued that it should be adapted and put 'within the reach of ordinary seafarers'.

Lacaille also proposed computing the lunar distance from the Sun and other key stars every three hours in a 'nautical almanac' (figure 1), the model Maskelyne would apply ten years later.



Boreale. Elle se couche par consequent sous le parallele de 60 degrés vers le nord à 15 heures ½ or il est 20h ½ à Paris lors qu'il est 15h ½ sous un meridien occidental de 5. heures et 8h ½ pour un meridien plus oriental de 7. heures: C'est donc dans l'intervalle de 8.h.½ à 20h ½ qu'il faut calculer les distances de la Lune à l'Etoile la plus favorable, qui est L'Epy de la Vierge. on peut en mettre le calcul sous cette forme.

1753. avril						Passage de l'Et. au meridien	Declin. de l'Etoi.
						H. M. S.	D. M.
Tems vrai à Paris le 13 à	8h 30'	11h 30'	14h 30'	17h 30'	20h 30'	11.42.50	9.52
Distance à l'Epy de la vierge	47.43.56	45.56.44	44.9.30	42.22.14	40.34.56		
Parallaxe horiz. de la Lune	58.58	59.0	59.2	59.5	59.8		

Figure 1: Pre-computed distances between the Moon and Spica, calculated at 3-hour intervals for 13 April 1753, Lacaille to Jean-Dominique Maraldi, said Maraldi II, 20 January 1754 (French Archives Nationales, MAR, 2 JJ 69 (Delisle papers), 19b, p. 1, 1753–54).

Nevertheless, there was no consensus within the Académie. Lacaille's main rival, the astronomer Pierre-Charles Lemonnier, was attempting to publish the first nautical almanac entirely devoted to the lunar altitude method (as well as that of horary angles, a kind of iterative computation of longitude — so-called "the method of false position" that José Monteiro da Rocha discussed in his 1765-66 manuscript — see below). With this publication in progress and with Lacaille at sea near Isle de France, Lemonnier was able to stop Lacaille's project.

Lacaille's graphical method

After his return to France in 1755, Lacaille read a memorial to the Académie in 1759, which set out his plan for a pre-calculated table of lunar distances and added a graphical method to avoid the long and difficult calculations normally required by the lunar-distance method. His ideas were later promoted by Jérôme Lalande, who was elected in 1759 director of the *Connaissance des temps* (hereafter *CDT*). Lalande had some original views on the *CDT* and its contents, notably adding new scientific matter that can often now be found only in the *CDT*. The volume for 1761, for instance, included

Lacaille's procedures and methods for lunar distances. In 1755, he also published the *Ephémérides des mouvements célestes*, astronomical tables for ten years (1755–65), in which he gave further consideration to lunar distances and his longitude method.

For his voyage to St Helena in 1761, Nevil Maskelyne took the *CDT* for 1761 and Lacaille's ephemeris. Like Lacaille, he felt it best to have three observers measuring the two altitudes and the angular distance simultaneously, thus avoiding the need to calculate by interpolation the small but significant horary motion of the Moon, which would be a source of error. Maskelyne was unable to use the graphical method because of an error Lacaille made in the example calculations; the error came from Lalande in the *CDT*s for 1761 and 1762, which had mistakenly swapped the figures for Regulus and Aldebaran in the examples for 8 July 1761.

Lacaille was also the first astronomer to study the propagation of errors, drawing on Roger Cotes' *Harmonia Mensurarum* (edited by Robert Smith, 1722). Lacaille believed an accuracy of about of four minutes of an arc was possible; Maskelyne and Borda gave one minute (of an arc) for the angular distance, and preferred to develop the lunar distance method without simplified methods to avoid spherical trigonometry calculations.

French and Portuguese attempts to publish nautical almanacs

The development of lunar methods for determining longitude at sea was directly connected to the establishment of nautical almanacs, not only in France, but also in Portugal. In France, the process began in the early 1750s with a dispute over the contents of the *Connaissance des temps*. The Abbé André-François Brancas de Villeneuve proposed modifying the *CDT* to transform it into a nautical almanac, and published *Éphemérides cosmographiques* between 1750 and 1755. Brancas added that such a nautical almanac should be published two or three years in advance. At the same time, Lacaille and Lemonnier were working on proposals for new nautical ephemerides to help seafarers. Nor were the attempts by Brancas de Villeneuve, Lacaille, Lemonnier and Pingré to publish nautical almanacs for finding longitude alone in France. In several ports, small nautical almanacs existed, called (with local variations) *Étrennes maritimes et curieuses, Étrennes nautiques*, *Étrennes nantaises*, and similar. These gave the times of rising and setting and the declinations of the Sun and Moon, the information needed to determine local time (time at the ship) from the altitude of either body.

Likewise, in 1758 the Portuguese Jesuit Eusebio da Veiga published the *Planetario Lusitano,* a type of nautical almanac, a year before the dispersal of the Jesuit order. This latter event was to disrupt maritime scientific education for several years in France, and even more so in Portugal, since maritime education in both countries was mainly conducted by Jesuits. During the 1750s, therefore, there was significant activity around the problem of improving existing ephemerides in France and Portugal, and of encouraging astronomers in the belief that they should produce the necessary tools for longitude at sea.

The Jesuit José Monteiro da Rocha wrote about lunar distances methods and his trials at sea during a journey between Brasil and Portugal about 1765–66. His readings and inspiration were essentially French: Lacaille, Lalande (longitudes and *Connaissance des temps*) and Maskelyne's *British Mariner's Guide* (see the bibliography). He shared Maskelyne and Borda's considerations on the mean error which could be obtained on the lunar distance and studied the dissemination of the errors as Lacaille did. Monteiro da Rocha showed his work was also original and applied later on when he becomes director of the observatory of the University of Coïmbra.

Lalande, Jeaurat, Maskelyne and lunar distances in the *Connaissance des temps*

Elected as the new director of the *Connaissance des temps* in 1759, Lalande worked over the next decade or so to develop lunar-distance methods for finding longitude at sea, despite considerable resistance from the Académie. In 1772, Lalande added lunar-distance tables to the *CDT for the year 1774*. Lalande and his pupils (Edme-Sébastien Jeaurat, followed by Pierre Méchain) used the work of Maskelyne's computers to complete French ephemerides between 1772 and 1785, as well as lunar-distance tables reduced to the Greenwich meridian, before beginning to compute the same tables, reduced to the Paris meridian, after 1790, with the help of the first ever full-time lunar-distance computer, Louis-Robert Cornelier-Lémery.

Lunar tables for longitude: Mayer versus Clairaut in the years 1760–80

In this context, it is important to remember that in 1765 a reward was given posthumously to Tobias Mayer for his lunar tables sharing the Longitude Prize with the famous watchmaker John Harrison. To achieve an accuracy of half a degree of longitude, as specified by the Longitude Act, the tables had to be able to give the ecliptic longitude of the Moon to within one arcminute.

Less well known than the award to Mayer's widow is a letter (in English) of 11 April 1765 from Alexis Clairaut to John Bevis, claiming an equal part of the reward. Clairaut was not generally known as a mathematician involved in the development of nautical astronomy, yet his letter claimed that his lunar tables were superior to Mayer's. Despite repeated efforts, Newton had failed to formulate a complete theory of the Moon's motions, leaving to later mathematicians and astronomers the task of solving by approximation the three-body problem, i. e. the Keplerian problem of the motions of two celestial bodies, but also taking into account the perturbations caused by a third body. In fact, this problem has no analytical and exact solution and can be solved only by successive approximations, the theory of perturbations. The Moon's ecliptic longitude is obtained by the addition of terms which appear as smaller and smaller corrections to the elliptical Keplerian orbit. From 1743 onwards, Clairaut, Euler and d'Alembert developed such a theory in an atmosphere of intellectual competition and rivalry over the motions of both the Moon and comets. A number of French astronomers helped Clairaut with his calculations (Delisle, Bailly, Jeaurat and Pingré). Clairaut's and Mayer's lunar tables were also tested in 1764 based on their predictions of an annular eclipse of the Moon due to occur on 1 April; Mayer's tables suggested that the eclipse would not be seen in Paris, Clairaut's that it would. Clairaut won this test, since the annular eclipse was indeed observed in Paris. The astronomers Cassini III, Bailly and Pingré subsequently recommended that the Académie compute the lunar elements published by Lalande in *CDT* on the basis of Clairaut's tables, considered as 'pure' theoretical tables. The rejection of Mayer's lunar tables by some French astronomers, Lacaille and Lalande aside, can also be understood in the light of Mayer's failure to answer Lacaille's challenge of explaining the fundamentals of his theory of lunar motion. Until the beginning of the years 1780s, Clairaut's lunar tables came out well: the discrepancies of the errors (O − C) were similar to those of Mayer's tables. Both sets of tables proved to be accurate, with a mean error about one minute of an arc for the ecliptic longitude of the Moon. At the beginning of the 1780s, however, Jeaurat and Lémery pointed out that the discrepancies in Clairaut's lunar tables were increasing because, unlike his rivals, Clairaut had not included the secular acceleration of the Moon's motion. Subsequently, Lémery mainly used Euler's tables, computed from his second theory of the lunar motions, until the beginning of the nineteenth century, when they were superseded by the tables of Bouvard, Bürckhardt, Damoiseau and Plana, all based on Laplace's celestial mechanics.

Conclusion

The development of theories and practices for finding longitude at sea by lunar methods followed different courses in Britain and France in the middle of the eighteenth century.

From the 1750s in France, there were attempts to develop and to adapt ephemerides and nautical almanacs for the special needs of the seafarers. From this point of view, Lacaille played an important and significant role. He developed the lunar distances method and gave a model for a nautical almanac giving pre-computed angular distances between the Moon and a bright star every three hours. His works were a source of inspiration for Maskelyne in Britain and for the little known Portuguese Jesuit astronomer and future minister of the marquis de Pombal, José Monteiro da Rocha. Lalande promoted Lacaille's graphical method in the *Connaissance des temps*. Not fully explained, neither by Lacaille nor by Lalande, this method tried and discussed by Maskelyne during his trial voyages at sea, has been abandoned. But the need to develop simplified methods for the 'common of seafarers' claimed by Lacaille was maintained after him by Jérôme Lalande and Abbott Alexis Rochon at the end of the eighteenth century.

The bibliography provides new ways to explore the history of longitudes at sea, taking into account the issues related to the scientific education of seafarers, the development of naval observatories and naval schools, and the massive dissemination of marine chronometers to the captains of the merchant fleet.

Bibliography

A study is to be published by Fernando B. Figueiredo (University of Coimbra) and Guy Boistel (University of Nantes), about the manuscript written by José Monteiro da Rocha in 1765–1766 and recently discovered in the Portuguese National Archives In Lisbon [Ms. 511, Colecção Pombalina, BNP, Lisboa] : '*José Monteiro da Rocha (1734–1819) and the international debate in the 1760's on the astronomical methods to find the longitude at sea: its proposals and criticisms of the method of lunar distances of Lacaille*'.

Boistel, Guy, 2016, 'From Lacaille to Lalande: French work on Lunar distances, Nautical Ephemerides and Lunar Tables, 1742–85' in R. Dunn & R. Higgitt (eds.), *Navigational Enterprises in Europe and its Empires, 1730–1850* (Basingstoke: Palgrave-McMillan), 47–64.

Boistel, Guy, 2010, 'Training seafarers in astronomy: methods, naval schools and naval observatories in Eighteenth- and Nineteenth-Century France', in D. Aubin, C. Bigg and O. H. Sibum (eds.), *The Heavens on Earth. Observatories and astronomy in Nineteenth Century Science and Culture*, Duke University Press, 148–173.

Boistel, Guy, 2006, 'De quelle précision a-t-on réellement besoin en mer ? Quelques aspects de la diffusion des méthodes de determination astronomique et chronométrique des longitudes en mer en France, de Lacaille à Mouchez, 1750–1880', *Histoire & Mesure*, XXI/2, 121–156, https://journals.openedition.org/histoiremesure/1748.

Boistel, Guy, 2001/2003, *L'astronomie nautique au XVIII*[e] *siècle en France : tables de la Lune et longitudes en mer*, Thesis (Ph.D.), Centre François Viète, University of Nantes, https://halshs.archives-ouvertes.fr/tel-01340554/document.

Figueiredo, Fernando, 2014, 'José Monteiro da Rocha (1734–1819)', *The Biographical Encyclopedia of Astronomers*, Hockey Th., Trimble V., Williams, Th. R., Bracher, K., Jarrell, R., Marchéll, J. D., Palmeri, J., Green, D. (Eds.) 2nd ed. 2014, http://www.springerreference.com/docs/html/chapterdbid/332266.html.

For historical focus on the ephemeris the *Connaissance des temps*, see the web pages (in french and english), articles written by Guy Boistel:

IMCCE/Observatoire de Paris: https://cdt.imcce.fr/

Project “Procès-verbaux du Bureau des longitudes”, page “Focus”: http://bdl.ahp-numerique.fr/

Daniel Augusto da Silva — sua ligação a questões de Astronomia

Ana Patrícia Martins
Escola Superior de Educação de Viseu / CIUHCT

Daniel Augusto da Silva (1814–1878) obteve instrução académica diversificada, em Ciências Físico-Matemáticas, Ciências Militares e Filosofia Natural. No que respeita a ensinamentos de Astronomia, o terceiro ano do *Curso Mathematico* da Academia Real de Marinha (ARM), que frequentou em 1831, compreendia o ensino da *Arte de Navegação teórica e prática.* No mesmo ano, assistiu ao *Curso de Lições Práticas* do Observatório Real da Marinha (ORM), criado para complementar a formação em Astronomia e Navegação de quem se destinasse à Marinha, não só alunos da ARM como também da Academia dos Guardas Marinhas (AGGMM). Como compêndio, seguia-se, à semelhança de outros assuntos matemáticos, o *Curso de Mathematicas* de Bézout. Fundado em 1798, o ORM nem sempre conseguiu cumprir as suas funções. Instalado em local inapropriado, sobre a *Sala do Risco*, no Arsenal de Marinha, logo em 1809, e na sequência da transferência da Companhia dos Guardas Marinhas para o Brasil, ficou privado dos seus melhores instrumentos, em situação de abandono total. Até à extinção, em 1874, foi mudando de instalações e alguns melhoramentos foram conseguidos, mas as críticas ao seu funcionamento mantiveram-se. De qualquer modo, o ensino da Astronomia, enquanto disciplina científica, apenas teve lugar na Escola Politécnica (EP), criada em 1837, destacando-se o papel de Filipe Folque (1800–1874), lente de Astronomia e Geodesia até 1856. *Elementos de Astronomia para uso dos alunos da Escola Politécnica* (1840), da sua autoria, foi um dos primeiros compêndios portugueses de Astronomia, amplamente usado, pelo menos, até finais da década de 1860.

A instrução em Astronomia que Daniel da Silva recebeu no *Curso Mathematico* da Universidade de Coimbra, em 1838, foi obtida na cadeira de *Astronomia (prática e teórica)*, do quarto ano. No seu ensino, seguia-se, desde 1821, o muito difundido compêndio *Traité élémentaire d'astronomie physique*, de Jean-Baptiste Biot; o ensino prático não seria muito diferente daquele proporcionado aos alunos da ARM.

Logo aquando da criação da Escola Naval (EN), em 1845, Daniel da Silva foi nomeado lente substituto das 1.ª e 2.ª cadeiras (Elementos de Mecânica, Astronomia esférica e náutica; Princípios de óptica, Construção e uso dos instrumentos de reflexão, Prática das observações astronómicas e dos cálculos mais úteis na navegação e Factura de uma derrota completa), onde ensinou assuntos de Astronomia. Consideramos elucidativos dessa instrução, os compêndios *Astronomia spherica e náutica* (1839), de Mateus Valente do Couto (1770–1848), lente aposentado da AGGMM (instituição antecessora da EN), e *Elementos de Astronomia* (1840), de Folque, ainda que destinados a servir na EP. De facto, a instrução quer dos alunos da AGGMM, quer posteriormente da EN, até 1860, passava pela frequência inicial de um curso preparatório na EP, sendo que até 1845 incluía a frequência da cadeira de *Navegação*, a par da instrução prática obtida no ORM.

Daniel da Silva foi um dos 85 sócios fundadores do Grémio Literário, uma "corporação literária" criada em 1846, à qual estiveram desde sempre ligadas importantes personalidades dos mais diversos campos da sociedade portuguesa. Em 1849, o Grémio organizou *cursos públicos*, professados por membros da instituição — a educação e a instrução haviam-se tornado questões centrais, desde inícios do século XIX, uma herança do Iluminismo e da Revolução Francesa. Muito embora treze desses cursos sejam publicitados na imprensa (ex. *A Época*), alguns com transcrição das lições professadas, não é certo que todos se tenham realizado. De entre aqueles para os quais não se apuraram informações, está o que Daniel da Silva professaria, *Astronomia popular*.

A ligação de Daniel da Silva a assuntos de Astronomia destaca-se no que respeita ao Observatório Astronómico de Lisboa (OAL), instituição que começou a ser edificada em 1861, mas que apenas em 1878 recebeu os primeiros estatutos. Pertenceu à comissão que primeiramente estudou a edificação do OAL, em finais de 1850, numa época em que Lisboa assumia grande importância no panorama científico internacional, pela sua localização privilegiada para observação da estrela de Argelander e determinação da sua paralaxe. Em 1874, enquanto sócio da Academia das Ciências de Lisboa (ACL), integrou uma comissão para avaliar projetos de organização do OAL. Temendo pelo afastamento desta questão da agenda do Parlamento, moveu-se nos *corredores do poder*, procurando apoio político. Desses contornos nos dá conta em artigos publicados, anonimamente, na imprensa — "A astronomia e a política em Portugal" e "A astronomia vencida pela política".

Por fim, referimo-nos à comissão de sócios da ACL que integrou, também em 1878, para nomeação dos três lugares de astrónomos de 1.ª classe do OAL. Enquanto relator da secção de Ciências Matemáticas, destacou o interesse da secção pelo assunto e fundamentou a seriação proposta — Frederico Augusto Oom (1830–1890), para o lugar de Director, Campos Rodrigues (1836–1919) e Francisco Gomes Teixeira (1851–1933). Um conjunto de cartas do espólio de Gomes Teixeira testemunham o desejo de Daniel da

Silva em que o outro aceitasse esse cargo, e as diligências superiores tomadas nesse sentido. A mais valia de Gomes Teixeira para o OAL não seria uma realidade — passados quatro meses da sua nomeação, Gomes Teixeira renunciou ao cargo, prosseguindo a carreira de magistério.

Se bem que não se conheça a Daniel da Silva investigação em assuntos de Astronomia, podemos afirmar que contactava de perto com a elite científica nacional, mostrando estar a par das necessidades para que Portugal acompanhasse o progresso da Astronomia no estrangeiro. Teve um papel relevante na organização do OAL, a mais relevante instituição científica nacional do género, no século XIX, quer no seio da ACL, quer movendo influências pessoais nos corredores do poder, ou denunciando influências políticas que se opunham ao desenvolvimento desse estabelecimento.

Bibliografia

Arquivo da Universidade de Coimbra, *Espólio de Francisco Gomes Teixeira. Correspondência recebida*, cartas n.^{os} 1444, 1446, 1445, 1447, 1450, 1449.

Carolino, Luís Miguel. 2012. "Measuring the Heavens to Rule the Territory: Filipe Folque and the Teaching of Astronomy at the Lisbon Polytechnic School and the Modernization of the State Apparatus in Nineteenth Century Portugal". *Science & Education*, 21, 109–133.

Figueiredo, Fernando. 2014. "A criação do Observatório Astronómico da Universidade de Coimbra (1799) e o estabelecimento do seu programa científico" in: Rollo, M. F. et al. (coord.), *Espaços e actores da ciência em Portugal (XVIII–XX)* (Casal de Cambra: Caleidoscopio), pp. 11–32.

Folque, Filipe. 1840. *Elementos d'Astronomia coordenados para uso dos alumnos da Escola Polytechnica.* Lisboa: Na lithog. da Escola Polytechnica.

Martins, Ana Patrícia M. F.. 2012. *Daniel Augusto da Silva e o Cálculo actuarial.* Tese de doutoramento em História e Filosofia das Ciências, FCUL.

Raposo, Pedro M. P.. 2010. *Polity, precision and the stellar heavens: the Royal Astronomical Observatory of Lisbon (1857–1910).* Thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy in History, University of Oxford.

[Silva, Daniel Augusto da]. 1876. "A astronomia e a politica em Portugal". *Jornal do Commercio*, 17 de Março de 1876.

[Silva, Daniel Augusto da]. 1877. "A astronomia vencida pela politica". *Jornal do Commercio*, 7017, 31 de Março de 1877.

Valente do Couto, Mateus. 1839. *Astronomia spherica e nautica.* Lisboa: Typ. da Academia Real das Sciencias.

Os *Elementos de Algebra* de José Monteiro da Rocha

João Caramalho Domingues
Centro de Matemática da Universidade do Minho

Em 1825 Mateus Valente do Couto, por encargo da Academia das Ciências de Lisboa, examinou os manuscritos matemáticos deixados por José Monteiro da Rocha (1734–1819). Entre estes encontrou quatro tomos que identificou como constituindo uns *Elementos de Mathematica*: o primeiro tomo [Monteiro da Rocha, s/d (a)] contém uns Prolegómenos e uns Elementos de Aritmética; o segundo, cuja localização actual se desconhece, continha geometria elementar e trigonometria; o terceiro [Monteiro da Rocha, s/d (b)] constitui os *Elementos de Algebra*; o quarto, que está também desaparecido, tinha por título *Licçoẽs sobre varios pontos interessantes de Mathematica*, mas Valente do Couto identificou-o como sendo sobre cálculo diferencial e integral.

Nenhum destes manuscritos tinha uma data explícita. Valente do Couto concluiu que a «obra parece escripta ha mais de 55 annos», isto é, antes de 1770, por Monteiro da Rocha dizer nos prolegómenos que faltam professores de matemática nas cidades mais populosas de Portugal e «servimos de rizo aos estrangeiros». Mas é possível ser mais preciso: na «Introdução» da Aritmética, Monteiro da Rocha sugere aos comerciantes a «Arithmetica de Antonio Pereira, impressa em 1713» e a «de Jozê Monteiro de Oliveira, impressa em 1754»; assim, é claro que 1754 é um limite inferior; e, como a Aritmética de António Pereira foi reimpressa em 1760, mesmo contando com algum atraso até Monteiro da Rocha, ainda na Baía, saber dessa reimpressão, é improvável que começasse a escrever os seus *Elementos de Mathematica* muito depois de 1760.

Algumas passagens dos Prolegómenos permitem-nos tirar algumas conclusões sobre o projecto de Monteiro da Rocha. Em primeiro lugar, ao contrário do que o relatório de Valente do Couto sugere, a «obra», se tivesse sido completada, não se resumiria a estes quatro tomos: estes corresponderiam à matemática pura, mas Monteiro da Rocha planeava também tratar da matemática aplicada: «Statica, Mechanica, Hydrostatica, Hydraulica, Aerometria, Pyrotecnia, Optica, Dioptrica, Catoptrica, Perspectiva, Astronomia, Gnomonica, Geographia, as duas Architecturas [civil e militar]» [Monteiro da Rocha, s/d (a), fl. 7].

Em segundo lugar, Monteiro da Rocha dá a entender que pretendia escrever aquilo a que chama um Curso de Matemática, um tipo de obra muito completo de que havia muito poucos exemplos — os únicos que menciona positivamente são os de Dechales e de Christian Wolff [1732–1741] — e por onde recomenda que comecem o seu estudo aqueles que querem ser matemáticos de profissão. As outras pessoas, em particular aqueles que estudavam a filosofia (que incluía as ciências naturais) deveriam começar por algum compêndio (isto é, uma obra mais resumida); destes já recomenda alguns, entre os quais, em português, o de Inácio Monteiro [1754–56].

É interessante notar que nesta divisão entre cursos e compêndios há semelhanças com a opinião de Inácio Monteiro: este menciona vários cursos, mas o primeiro que aconselharia a um matemático de profissão é precisamente [Wolff, 1732–1741]; quanto à sua obra, dirige-a aos que «dezejaõ ser Philosophos sem estudar Mathematica; e desta só pertendem saber os principios necessarios para a Physica» [Monteiro, 1754–56, I, 10]. É interessante ainda notar que Wolff tinha também um compêndio [1742], um dos que Inácio Monteiro aconselha em primeiro lugar e que é provavelmente um dos principais modelos para a sua obra. Assim, podemos estabelecer um certo tipo de paralelismo entre o *Compendio* de Inácio Monteiro e os *Elementos de Mathematica* de Monteiro da Rocha: o primeiro segue o modelo de [Wolff, 1742]; os segundos provavelmente seguiriam o modelo de [Wolff, 1732–1741].

Esta diferença de modelos tem consequências no lugar dado à álgebra. Em [Wolff, 1742] a álgebra aparece no final do segundo volume, depois de todas as matemáticas aplicadas. Talvez Inácio Monteiro se tenha sentido autorizado por este exemplo a fazer o mesmo no seu *Compendio*; mas diz explicitamente que tratou todas as matérias sem dependência da álgebra porque não quis com ela perturbar o estudo dos que apenas querem seguir filosofia [1754–56, I, 7]. Em [Wolff, 1732–1741], pelo contrário, a Análise (álgebra e cálculo infinitesimal) aparece logo a seguir à Aritmética, Geometria e Trigonometria Plana; de forma que os múltiplos capítulos de matemática aplicada utilizam análise. Fica perfeitamente claro que Monteiro da Rocha pretendia fazer o mesmo que Wolff em [1732–1741]; não só por os *Elementos de Algebra* aparecerem em terceiro lugar (logo a seguir à Aritmética e à Geometria e Trigonometria), mas também por dizer que «estudando por autor moderno, he necessario saber bem a Algebra, para entrar no estudo de qualquer tratado, porque todos se encontrão semeados de calculos analyticos» [s/d (a), fl. 12v] e por argumentar a favor da «grande superioridade que tem o calculo analytico sobre o methodo synthetico» [s/d (b), fl. 217].

Os *Elementos de Algebra* estão divididos em oito capítulos. O 1.º intitula-se «Principios Fundamentais da Logistica Litteral»; o 2.º, «Logistica das quantidades de hum so termo», e como o título indica trata das operações com monómios; o 3.º, «Logistica das quantidades litterais de muitos termos», trata de operações com polinómios, e aqui surge também uma pequena discussão sobre convergência de séries (no sentido do séc. XVIII), a propósito da divisão de a por $x+b$; o 4.º, «Das Potencias Litterais das quantidades de muitos termos», inclui naturalmente as potências do binómio, mas também métodos de extracção e aproximação de raízes; o 5.º, um dos mais extensos, é uma «Theoria das Equaçoens»; o 6.º, «Resolução das Equaçoens»; o 7.º, o mais longo, trata da «Aplicação da Algebra aos Problemas de Arithmetica» (100 problemas abstractos e 10 questões concretas); no 8.º e último, «Aplicação da Algebra aos Problemas de Geometria e Trigonometria», poderíamos esperar alguma geometria analítica, mas não a vemos.

O manuscrito que conhecemos termina prometendo uma segunda parte, «que trata da Algebra dos infinitos, e se aplica âs linhas curvas de diversas naturezas, como se verâ no seu lugar». Presumivelmente seria nessa parte que apareceria a geometria analítica; a «Algebra dos infinitos» já Monteiro da Rocha tinha dito explicitamente aplicar «o calculo sobre quantidades infinitamente pequenas» [s/d (b), fl. 4] — trata-se do cálculo infinitesimal.

Referências

Mateus Valente do Couto, 1825. «Relatorio do parecer da Commissaõ nomeada para examinar os manuscriptos do S.r J. Monteiro da Rocha», em Processo Académico de José Monteiro da Rocha, Biblioteca da Academia das Ciências de Lisboa.

Inácio Monteiro, 1754–56. *Compendio dos Elementos de Mathematica*, 2 vols., Coimbra: Real Collegio das Artes da Companhia de Jesu.

José Monteiro da Rocha, s/d (a). *Elementos de Mathematica*, Biblioteca da Academia das Ciências de Lisboa, Ms. Azul 371.

José Monteiro da Rocha, s/d (b). *Elementos de Algebra*, Biblioteca da Academia das Ciências de Lisboa, Ms. Azul 397.

Christian Wolff, 1732–1741. *Elementa Matheseos Universae*, «nova edição», 5 vols., Genebra: Bousquet.

Christian Wolff, 1742. *Compendium Elementorum Matheseos Universae*, 2 vols., Lausana e Genebra: Bousquet.

Dantas Pereira e a questão da longitude

António Costa Canas
Escola Naval—CINAV & CHist-UL

Teresa Sousa
Escola Naval—CINAV
Centro de Matemática e Aplicações (CMA), FCT-UNL

A determinação rigorosa da longitude no mar só foi possível a partir da segunda metade do século XVIII, usando-se para tal o método das distâncias lunares, ou usando relógios bastante rigorosos (cronómetros), cuja construção só foi possível a partir daquela altura. Independentemente do método usado, os cálculos a realizar eram sempre bastante complexos, pois envolviam fórmulas de trigonometria esférica, envolvendo multiplicações e divisões de números com vários algarismos significativos, as quais tinham que ser resolvidas manualmente. Para minimizar este inconveniente recorria-se ao uso de logaritmos, procurava-se simplificar as fórmulas, para diminuir o número de operações a realizar e preparavam-se tabelas auxiliares de cálculo.

Em Portugal o problema também mereceu particular atenção por parte de diversos homens de ciência. Um dos primeiros a estudar a questão e a propor soluções para o problema foi Monteiro da Rocha, de quem se assinala este ano (2019) o segundo centenário da morte. Dantas Pereira, oficial de Marinha, foi outra personalidade que estudou igualmente o assunto e que menciona e elogia os contributos de Monteiro da Rocha. Os principais estudos que Dantas Pereira dedicou à questão da longitude no mar são apresentados nas referências no final.

Num dos textos que Dantas Pereira dedicou ao assunto[2] explicou o método proposto pelo francês M. de Bordá, o qual teve grande difusão na época, uma vez que nele eram feitas diversas simplificações. Em termos práticos, a determinação da longitude consistia no cálculo da hora local para a posição do observador num determinado instante, sendo necessário saber qual a hora local num meridiano de referência naquele mesmo instante. Para conhecer esta última poderia usar-se um cronómetro, que "conservava" a hora desse meridiano de referência, ou então usar o método das distâncias lunares. A proposta de M. de Bordá recorre a este último processo, existindo uma publicação, *Nautical Almanac*[1], que continha tabelas com valores das

[1]Os valores do *Nautical Almanac* eram calculados para o meridiano de Greenwich, existindo uma publicação francesa, *Connaissance des Temps*, com valores para o meridiano de Paris e também uma portuguesa, *Efemérides Náuticas*, com valores para o meridiano

distâncias entre a Lua e o Sol ou algumas estrelas, calculadas para diversas horas, de todos os dias de um determinado ano. Dantas Pereira explica os passos matemáticos que permitiram simplificar as fórmulas e apresenta um exemplo completo de cálculo.

Em termos práticos, o primeiro passo consistia na obtenção de várias distâncias angulares entre um determinado astro[2] e a Lua, o mesmo número de alturas do mesmo astro e também de alturas da Lua. A observação de diversos valores de cada um dos parâmetros servia para minimizar eventuais erros de observação, sendo usado o valor médio de cada um dos parâmetros. Seguidamente, aplicavam-se algumas correções à distância angular observada (aparente), de modo a calcular a distância angular verdadeira[3]. Com este valor, e recorrendo às tabalas de efemérides, determinava-se a hora em que a mesma distância angular seria observada no meridiano de referência.

O passo seguinte servia para determinar a hora local do observador, sendo este passo igual quer se usasse o método das distâncias lunares, quer se utilizasse o cronómetro. Para tal, tornava-se necessário resolver um triângulo esférico, cujos vértices eram: um dos polos celestes, a posição do astro e a vertical do observador. O objetivo era calcular o ângulo no polo, ou seja, o ângulo entre o meridiano do observador (que ia do polo até à vertical do observador) e o meridiano do astro (linha que partia do mesmo polo e passava pelo astro). Este âgulo no polo variava em função do tempo local, logo o conhecimento do ângulo permitia determinar a hora local. Para realizar os cálculos o observador conhecia os valores dos três lados do triângulo. Um desses lados correspondia à distância polar do astro, ou seja, o complemento da declinação do astro, que se encontrava tabelada; outro lado era o complemento da latitude, devendo o observador ter um conhecimento mais ou menos correto do valor desta coordenada; finalmente o outro lado correspondia à distância do astro até ao zénite do observador, que não é mais que o complemento da altura, sendo esta aquela que tinha sido obtida no primeiro passo. Para uma melhor compreensão das suas explicações, Dantas Pereira complementa os textos com algumas imagens. Na figura 1 encontra-se uma dessas imagens, sobre a qual se traçou o triângulo anteriormente explicado.

Conhecida a hora local do observador e tendo sido anteriormente calcu-

de Lisboa. O estudo de Dantas Pereira que estamos a analisar aparece nas *Efemérides Náuticas* relativas ao ano de 1798.

[2]Este astro poderia ser o Sol, ou alguma estrela, cuja distância à Lua se encontrasse tabelada nalguma das tabelas de efemérides mencionadas na nota anterior.

[3]A altura observada da Lua servia para determinar os valores das correções a aplicar de modo a converter a distância aparente em distância verdadeira.

lada a hora local do meridiano de referência, no momento da observação, determinava-se a diferença de longitude entre ambos os locais.

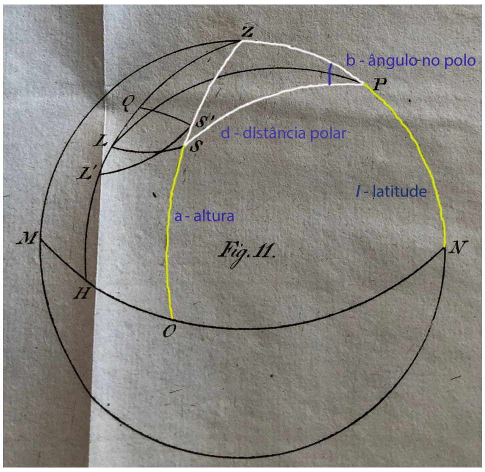


Figura 1: Representação do triângulo de posição.

Referências

[1] José Maria Dantas Pereira, "Memoria Relativa ao Calculo dos Eclipses das Estrellas, Sol, e mais Planetas pela Lua", *Ephemerides Nauticas, ou Diario Astronomico para o anno 1798, Calculado para o meridiano de Lisboa*, Lisboa, Oficina da Academia Real das Sciencias, 1796, pp. 137–147.

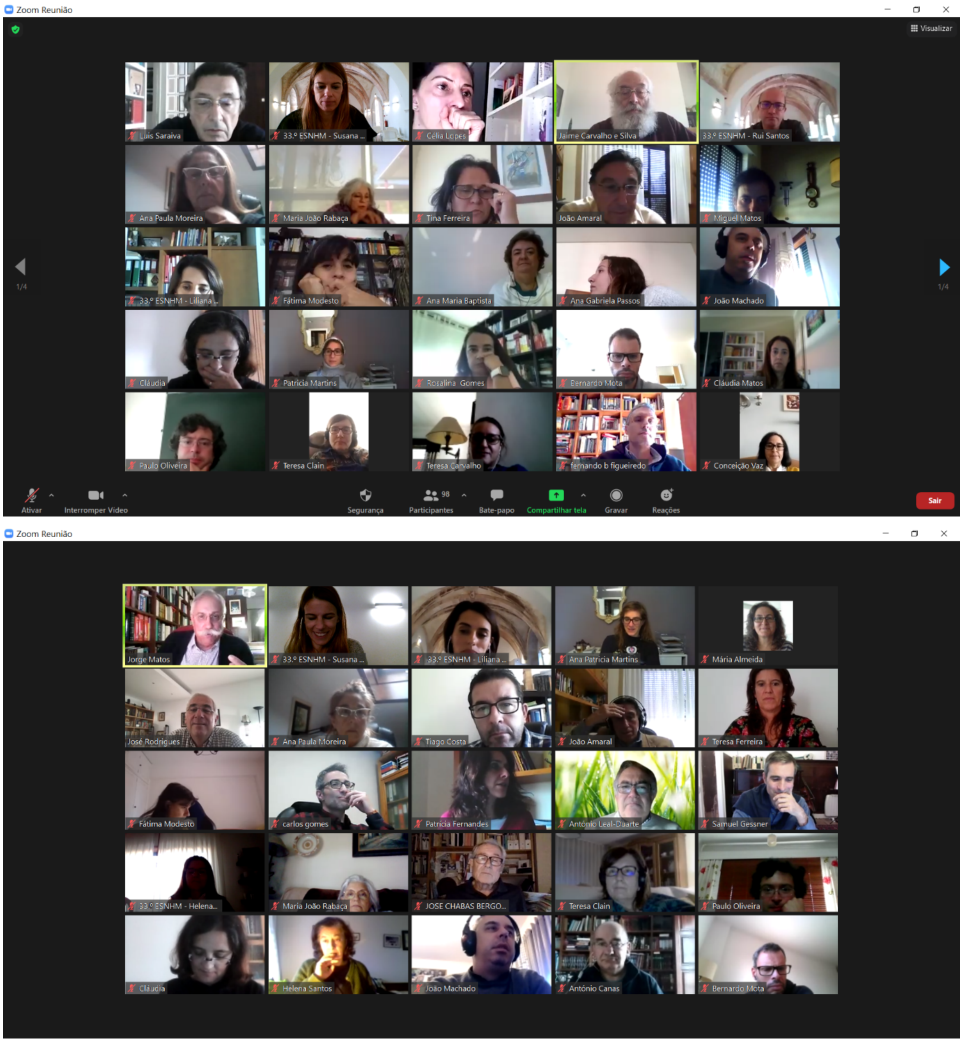
[2] José Maria Dantas Pereira, "Calculo da longitude pelo methodo de M. de Borda", *Ephemerides Nauticas, ou Diario Astronomico para o anno 1798, Calculado para o meridiano de Lisboa*, Lisboa, Oficina da Academia Real das Sciencias, 1796, pp. 148–175.

[3] José Maria Dantas Pereira, *Memoria que trata de humas novas taboas mathematicas, e dos usos que ellas podem ter tanto nas applicações da sciencia em geral, como na navegação alta em particular*, Lisboa, Impressão Régia, 1807.

[4] José Maria Dantas Pereira, *Memoria sobre o problema das longitudes*, Lisboa, Impressão Régia, 1826.

33.º Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática

Politécnico de Leiria
Encontro realizado online na plataforma Zoom
30 e 31 de Outubro de 2020



Alguns participantes do encontro.

Alguns participantes do encontro.

Rui Santos com Anabela Graça (Vereadora da Educação e da Cultura de Leiria) na Sala do Capítulo no Museu de Leiria durante a Sessão de Abertura do Encontro.

Introdução

Luis Saraiva[1]
(Coordenador Nacional do SNHM, CIUHCT, DM da FCUL)

A realização de um Encontro do SNHM em Leiria esteve inicialmente prevista para 2019. Esse encontro foi no entanto adiado para 2020 devido a em 2019 se celebrar o matemático José Monteiro da Rocha, nos 200 anos do seu falecimento, tendo o 32.º Encontro sido realizado em Marco de Canaveses, local do nascimento do referido matemático.

Infelizmente a pandemia que começou no início de 2020, e que ainda está longe de estar controlada, impediu a realização presencial deste Encontro, e este teve lugar online por uma plataforma Zoom. Pela primeira vez conseguiu-se que o Encontro fosse creditado pelo Ministério da Educação, o que resultou niuma elevada participação de professores, tendo o número total de inscrições ultrapassado a centena. Este foi o primeiro Encontro do SNHM realizado online, mantendo todas as características e estrutura dos Encontros do Seminário, e podemos dizer que correu muito bem, embora, claro, não se pudesse realizar algo que é inerente aos encontros presenciais e é parte da sua mais valia, o contacto directo entre participantes, as conversas fora da sala de conferências, o viver conjuntamente durante dois dias um projecto comum, incluindo a habitual tarde social, com a visita guiada pelos organizadores a locais de interesse da região. Para compensar de algum modo esta impossibilidade, fez-se a projecção de um filme que mostrou alguns dos aspectos relevantes de Leiria.

Tivemos dois conferencistas convidados, cuja vinda a Portugal esteve equacionada até se verificar a impossibilidade de um Encontro presencial, e que apresentaram conferências plenárias.

O Professor José Chabás, da Universidade Pompeu Fabra, de Barcelona, apresentou uma comunicação sobre os primeiros livros de astronomia impressos em Portugal, e sobre o cruzamento de tradições astronómicas que revelam, centrando-se em três livros: o *Almanach Perpetuo*, o *Regimento do Estrolabio* e o *Reportorio dos Tempos.*

O *Almanach Perpetuum*, de Abraham Zacuto, impresso em Leiria, foi o primeiro que surgiu em Portugal. Este livro é uma versão de outro escrito por Zacuto em hebreu, *Ha-Ḥibbur ha-Gadol.* Nele são utilizadas extensivamente as *Tabelas Afonsinas.* Nem todas as tabelas deste livro foram integradas no *Almanach Perpetuum,* a maioria das que não foram colocadas no *Almanach*

[1]Agradecimentos institucionais são devidos à *Fundação para a Ciência e a Tecnologia* de Portugal no âmbito do projeto UIBD/00286/2020.

são relativas ao calendário judaico. Uma outra tradição é visível no livro de Zacuto: as suas tabelas para conjunções e oposições são baseadas num conjunto de tabelas de Jacob ben David Bonjorn, elaboradas um século antes, relativas ao período 1361 a 1391, mas incluindo um procedimento para as calcular fora desse período temporal, Deste modo este livro partilha uma tradição de cálculo dos astrónomos judaicos da Península Ibérica e do Sul de França. Zacuto não foi o único que as utilizou, José Chabas dá o exemplo de Bernat de Granollachs no seu livro em catalão *Lunari.*

O *Regimento do Estrolabio* foi publicado em Lisboa pelo alemão Hermann Kempis no início do século XVI. É conhecido em duas versões: o *Regimento de Munique*, por haver um exemplar na Biblioteca Pública de Munique, e o *Regimento de Évora,* por haver uma cópia na Biblioteca Pública de Évora. Este segundo exemplar é mais tardio e mais completo que o de Munique. Estes dois documentos foram extensivamente estudados pelos historiadores portugueses de navegação. As suas tabelas são muito menos precisas que as do *Almanach*, o que é indicativo de diferentes públicos e usos: o *Almanach* seria destinado a astrónomos e, eventualmente, astrólogos, enquanto que o *Regimento* seria para uso de pilotos e marinheiros.

O *Reportõrio dos Tempos* foi publicado em 1518 em Lisboa por Valentim Fernandes. Anuncia-se como tradução, mas não indica a fonte. José Chabas indica-a como sendo o *Reportorio de los Tiempos,* de Andres de Li, publicado em castelhano em Saragoça em 1492. Contém tabelas de conjunções e oposições que, em última instância, passando por Andres de Li e Granollachs, derivam das de Bonjorn, e outras tiradas da obra de Zacuto, conjugando assim a tradição judaica com a afonsina.

Ugo Baldini, da Universidade de Pádua, depois de dar uma perspectiva geral das diferenças de evolução da ciência entre a Europa Ocidental e Central por um lado, e a Europa Oriental, por outro, deu conta do modo de penetração das escolas jesuitas na Europa Oriental e as consequências que tiveram no evoluir da ciência nessa regiões.

Quando se fala em Ciência Ocidental quer-se significar ciência da Europa Ocidental ou da Europa Central. De facto a Europa Oriental (que Baldini define em termos geográficos) não aompanhou a síntese cultural ocorrida no fim da Idade Média no Ocidente, e não tinha um sistema estruturado de escolas e universidades, nem uma tradição própria de ensino da matemática e disciplinas afins. Quem quisesse seguir o ensino superior tinha de vir para universidades ocidentais, principalmente na Alemanha e na Itália. São sugeridos dois motivos essencialmente para estas diferenças: por um lado, a sociedade da Europa Oriental não esteve envolvida nas grandes movimentações comerciais do Mediterrâneo, e manteve um sistema feudal e dos grandes agrários, pelo que não foi sentido, como no Ocidente, a necessidade de conhecimentos técnico-científicos especializados; por outro a divisão religioso-cultural: a Igreja Ortodoxa, dominante a Oriente, era muito diferente da Ocidental. A instrução bizantina não saiu do esquema clássico do *trivium* e do *quadrivium*. Como os estudos superiores eram orientados para fins religiosos, estavam centrados em tópicos dogmáticos ou sobre os escritos dos religiosos mais relevantes, pelo que os temas científicos só eram considerados na medida em que estavam de algum modo ligados àquelas áreas. Baldini inumera outros fatores igualmente relevantes para a diferença verificada, entre os quais a utilização do alfabeto cirílico e a não existência de ensino nem de línguas ocidentais nem de latim, a língua franca do Ocidente.

A partir de 1565/70 deve-se unicamente à Companhia de Jesus a divulgação a oriente de um sistema escolar de tipo ocidental, com a criação de um cada vez mais elevado número de escolas. O seu sucesso levou as escolas protestantes já existentes e as ortodoxas a adoptar os seus programas e os seus compêndios. Baldini detalha o conteúdo ensinado bem como as suas fontes. Devido à ausência de professores de matemática, os primeiros professores das escolas jesuitas eram alemães ou formados pela escola de Clavius em Roma . Durante os primeiros 50 anos a produção matemática limitou-se aos manuscritos das aulas. Depois a situação modificou-se, quer com o ensinamento pós-curricular de matemática avançada a futuros professores, quer com o envio dos melhores estudantes para universidades ocidentais, verificando-se um progresso em áreas como a matemática pura (o cálculo leibniziano), a arquitectura militar, a balística, a engenharia e a astronomia.

Baldini terminou a sua apresentação com uma constatação que dá que pensar: a matemática ocidental chegou à Europa Oriental trazida pelos jesuítas como parte da cultura da Companhia de Jesus, num momento em que esse mesmo conhecimento estava a entrar em colapso no Ocidente, colapso este atribuído ao raciocínio matemático-quantitativo, visto como algo radicalmente oposto àquela cultura.

A terceira e última conferência plenária foi de José Francisco Rodrigues, do Departamento de Matemática da FCUL e do CMAFCIO, sobre a espiral de Pedro Nunes e a sua influência na pré-história do Cálculo Infinitesimal.

Pedro Nunes, no *Tratado da Esfera*, publicado em 1537, conceptualiza a linha de rumo, que veio a ser designada por *linha loxodrómica*, tendo aperfeiçoado o conhecimento deste conceito na sua *Opera*, publicada em 1566. Os progressos da navegação fora do Mediterrâneo, em grande parte devidos aos portugueses, determinaram a globalização da influência europeia a partir do século XVI e tiveram correspondência em grandes progressos em áreas diversas, da Geografia e Ciências Naturais às Ciências Físicas e Astronomia.

José Francisco Rodrigues mostra como as linhas de rumo, através das suas profundas relações com a cartografia e a navegação, são exemplo de um problema prático que foi essencial na história da expansão europeia e teve importância na evolução do cálculo diferencial.

A teria de Pedro Nunes sobre as linhas de rumo foi essencial na teoria matemática da linha loxodrómica e na cartografia. Como exemplo, apresenta a linha quebrada (formada por arcos de círculo) com que Pedro Nunes aproxima a linha loxodrómica, e a que chama *noniodromia*, que utiliza para a construção de uma tábua de rumos aproximada. Isto pode ser visto como o que, dois séculos mais tarde, em 1768, Euler utilizou para a rwesolução de uma equação diferencial de 1ª ordem. Sabemos bem da importância de Mercator na cartografia. José Francisco Rodrigues mostra que Pedro Nunes, três anos antes de Mercator o ter utilizado no seu *Mapa Mundi* de 1569, já tinha criado um método para a rectificação da linha loxodrómica no plano. Sabia-se que Mercator conhecia as obras de Nunes, mas só recentemente se conseguiu estabelecer que foi através de uma tabela de rumos que elaborou a primeira projecção cilíndrica conforme num mapa. Mais tarde, em 1599, o matemático Edward Wright apresentou a primeira descrição rigorosa da regra matemática implicada naquela projecção. Rodrigues diz que se trata de facto da apresentação da primeira integração numérica. Discorre ainda sobre manuscritos de Thomas Harriot e uma publicação de Edmond Halley de 1696 para reafirmar a importância da contribuição de Pedro Nunes no que se pode chamar a pré-história do Calculo Infinitesimal.

As restantes comunicações percorrem a História da Matemática desde a pré-história até ao século XX.

Jaime Carvalho e Silva analisa algumas evidências de actividade matemática na pré-história, referindo-se em especial a trabalhos nesta área de Manoel de Campos Almeida. Daniel Pinto trabalha a *Óptica* de Euclides, em particular analisa a Proposição 15 no seu enunciado e na sua demonstração.Samuel Guessner examina a dificuldade que os astrónomos do século XV tiveram de enfrentar quando tentaram descrever geometricamente os cálculos obtidos por meio das tábuas da astronomia afonsina. Guessner e Bernardo Mota evidenciam aspectos do *De compositione astrolabii* de Andaló di Negro, um dos mais antigos textos do mundo latino sobre projeção estereográfica. Jorge Semedo de Matos analiza o *Almanach Perpetuum*, de

Abraham Zacut, publicado em 1496, e indica como os primeiros guias náuticos portugueses utuilizaram as suas tabelas para obter os valores da declinação do sol, o que era essencial para se obter a latitude do lugar. Teresa Clain apresenta o *Tratado da Pratica d'Arismetica*, de Gaspar Nicolas, o primeiro tratado de aritmética prática de autor português publicado em Portugal, fez 500 anos em Novembro de 1519. Carlota Simóes e Pedro Casaleiro referem os autores das primeiras ilustrações de observações da Lua: entre outros William Gilbert, Thomas Harriot, Galileu Galilei e Cristovão Borri, sendo as deste último feitas quando esteve em Coimbra. Os autores refeem que a gravura que incluiu em *Collecta Astronomica* (1631) é possivelmente a mais antiga imagem da Lua derivada de uma observação astronómica publicada em Portugal.

Cinco comunicações têm como tema o ensino e a divulgação da matemática. Fernando Figueiredo analisou o modo como a reforma da Universidade Portuguesa de 1772 pretendia que a história da Ciência fosse utilizada nos seus cursos de "Sciencias Naturaes". Mária Almeida apresenta um levantamento dos problemas de matemática incluídos em várias publicações periódicas entre 1859 e 1936, caracrerizando-os quanto ao seu conteúdo matemático e à sua relação com a vida corrente, propondo ainda possíveis aplicações na sala de aula. Helena Sousa Melo e Maria do Carmo Martins apresentam um quadro da variação dos conteúdos matemáticos dados no ensino liceal entre 1836 e 1888, referindo ainda alguns outros desenvolvimentos posteriores, e nesse quadro referem o modo como eram ensinados os números e as operações com inteiros. Alexandra Rodrigues deu uma visão global do modo como se processavam as aulas de matemática em épocas passadas a partir da interpretação de imagens encontradas em livros didácticos e em jornais, começando com uma gravura no *Tratado da pratica d'arismetica* de Gaspar Nicolas, de 1519, até imagens do século XX. Vitor Bonifácio estuda as dinâmicas de divulgação e instrução populares no século XIX, contextualizando o surgimento da *Bibliotheca do Povo e das Escolas*, a qual, iniciando-se em 1881, ao longo de 33 anos vai publicar 237 números.

Ainda relativo ao século XIX, Ana Patrícia Martins analisa um artigo oferecido por Daniel Augusto da Silva à Academia das Ciências de Lisboa em 1852 no que poderia ser uma contribuição para a História da Teoria dos Conjuntos. Pedro José da Cunha, em artigo de 1927 tinha considerado este distinto matemático um percursor da teoria dos conjuntos. A análise feita por Ana Patrícia leva-a a não validar a afirmação de Pedro José da Cunha.

Temos três palestras relativas ao século XX. Rui Santos analisa a visão da aplicação do Cálculo das Probabilidades feita por Diogo Pacheco de Amorim na sua tese de doutoramento datada de 1914. José Paulo Berger expõe os enormes avanços feitos na artilharia durante a primeira guerra mundial, onde a matemática era essencial, não só na construção e aplicação dos materiais de artilharia mas igualmente no que diz respeito à balística, como , por esxemplo, o cálculo da trajetória dos projecteis. Por último, Teresa Sousa (apresentação), António Canas e Magda Marabujo apresentaram o algoritmo desenvolvido por Gago Coutinho para determinar a altitude de um avião durante o voo de modo rápido e expedito, e de modo mias rigoroso que o que dava o altímetro, bem como um exemplo prático da sua aplicação.

Como é costume terminarmos esta introdução, esperamos que a publicação destes resumos seja útil a todos os que os consultarem, e que seja um estímulo para futura participação em outros encontros do SNHM, quer como palestrantes quer como assistentes. O Seminário está aberto a todos e de todos precisa.

Programa

30 de Outubro

09.10 Abertura (Luis Saraiva, Representante do Politécnico de Leiria, Representante da Câmara de Leiria, Representante da SPM, Diretor da ESTG)

09.30 José Chabas (Universidade Pompeu Fabra, Barcelona) — Early astronomical printing in . Portugal: a crossroad of traditions

10.30 Samuel Gessner (Observatoire de Paris-PSL / SYRTE, ALFA) — Entre aritmética e geometria: diferentes meios de expressão na explicação do movimento das estrelas fixas (séculos XIV e XV)

11.00 *Café*

11.30 Bernardo Mota e Samuel Gessner (F. Letras de Lisboa e Observatoire de Paris-PSL / SYRTE, ALFA) — A edição do *De compositione astrolabii* de Andaló di Negro (ca. 1330): um trabalho entre filologia e história da geometria projetiva

12.00 Daniel M. Pinto (DM da FCTUC) — A Proposição 15 da Óptica de Euclides

12.30 Jaime Carvalho e Silva (DM da FCTUC) — A Matemática Pré-Histórica através de artefactos milenários

13.00 *Almoço*

15.00 José Francisco Rodrigues (CMAFCIO) – A Espiral de Nunes e a sua influência na pré-história do Cálculo Infinitesimal

16.00 Jorge Semedo de Matos (Escola Naval) — Zacuto e os Guias Náuticos Portugueses do início do século XVI: Os primeiros passos da Navegação Astronómica em Portugal

16.30 Teresa Costa Clain (GHMEM, CIDMA, U. de Aveiro) — Os 500 Anos do Primeiro Tratado de Aritmética Prática Impresso em Portugal

17.00 José Paulo Berger (Gabinete de Estudos Arqueológicos da Engenharia Militar) — O canhão que bombardeou Paris em 1918

17.30 *Filme sobre Leiria*

Programa

31 de Outubro

09.00 Ugo Baldini (Universidade de Pádua) — The Jesuit «Drive to the East» (Lithuania-Poland-White Russia-Ukraine-Transylvania), and the role of their schools in Eastern Europe's scientific history (1570 to ca. 1700)

10.00 Carlota Simões (CFisUC) e Pedro Casaleiro (CITEUC) — Borri e Galileu: Observações Astronómicas em Coimbra

10.30 *Café*

11.00 Fernando Figueiredo (DM-FCTUC/CITEUC) — A história da ciência como ferramenta didáctico-pedagógica nos curricula das faculdades de *Sciencias Naturaes* na nova Universidade de Coimbra (1772)

11.30 Helena Sousa Melo e Maria do Carmo Martins (Dep. de Matemática e Estatística, da F. Ciências e Tecnologia, CEHu, Universidade dos Açores) — Os números e as operações com inteiros nos fins do século XIX em Portugal

12.00 Mária Almeida (UIED-FCT-UNL/ANQUEP) — Problemas de Matemática em imprensa periódica portuguesa (1859–1936)

12.30 Alexandra Rodrigues (Instituto de Gouveia − Escola Profissional, UIED) e José Manuel Matos (UNL, UIED) — A matemática na aula, um estudo histórico iconográfico

13.00 *Almoço*

15.00 Ana Patrícia Martins (Escola Superior de Educação de Viseu / CIUHCT) — Daniel Augusto da Silva, um precursor da teoria dos conjuntos?

15.30 Vitor Bonifácio (DF da UA) — A *Bibliotheca do Povo e das Escolas* e os seus precursores

16.00 Rui Santos (ESTG, Politécnico de Leiria, CEAUL) — A Aplicação do Cálculo das Probabilidades de Diogo Pacheco d'Amorim (1914)

16.30 Teresa Sousa, Magda Marabujo e António Canas (Escola Naval e CINAV, Centro de Matemática e Aplicações da UNL) — O Algoritmo de Gago Coutinho para o Cálculo da Altitude

17.00 Encerramento do Encontro

Early astronomical printing in Portugal: a crossroad of traditions

José Chabás
Universitat Pompeu Fabra, Barcelona, Spain

In this presentation we review the early editions on computational and observational astronomy printed in Portugal during the fifteenth century and first decades of the sixteenth century. Special attention is given to the first scientific book ever issued by a Portuguese printing press, the *Almanach perpetuum* by Abraham Zacut. This incunable edition dated 1496 was soon to be followed by other texts on astronomical instruments and navigational science, the *Regimento do estrolabio* and the *Reportorio dos tempos.* As will be shown, these three early editions are heir to specific astronomical traditions that were alive in the Iberian Peninsula.

1. The *Almanach perpetuum* was the first book on exact sciences to be printed in Portugal. It was published in February 1496 in Leiria at the printing house of Samuel d'Ortas, a printer who had previously issued several books in Hebrew. The *Almanach perpetuum* consists of a large set of astronomical tables and a text explaining their use. The name of the author is given in the title, at the head of the text: *Canones tabularum celestium motuum astronomi rabi Abraham zacuti ordinatisime felici sidere incipiunt.* Actually, two different versions of this book came out in Leiria: one with the text in Castilian, in 23 chapters, and another with the text in Latin, in 12 chapters. The set of tables, with titles and headings in Latin, is the same in both versions.[1]

The book published in Leiria was a version of a work originally written in Hebrew called *Ha-Ḥibbur ha-Gadol* (*The Great Composition*) authored by Abraham Zacut. This scholar was born in Salamanca most probably in 1452 and worked in his hometown until the Jews were expelled from Castile in 1492. He then settled in Portugal where he entered the service of King João II until 1495 when the king died, and later worked for King Manuel, until the Jews in Portugal were forced to convert or leave the country. Zacut moved to North Africa. Numerous scholars are explicitly mentioned by Zacut in his

[1]See J. Chabás and B. R. Goldstein 2000. *Astronomy in the Iberian Peninsula: Abraham Zacut and the Transition from Manuscript to Print.* Transactions of the American Philosophical Society, 90.2. Philadelphia.

work, and among them is Judah Ben Verga, an astronomer active in Lisbon from about 1455 to 1480.[2]

A few tables in Zacut's *Ḥibbur* were not integrated into the *Almanach perpetuum*, mostly those concerning the Jewish calendar. The tables in the book printed in Leiria deal with the usual problems addressed by practitioners of astronomy at the time, and their main purpose is to provide the true positions of the Sun, the Moon, and the planets at regular intervals (daily for the two luminaries) as well as the times of syzygies (conjunctions and oppositions of the Sun and the Moon) in order to determine the circumstances of solar and lunar eclipses. The tables are computed for the meridian of Salamanca and many of them have year 1473 as epoch. Among the most significant tables is one displaying the true daily positions of the Sun at noon in Salamanca, for a period of 4 years, where the entries are given in zodiacal signs, degrees, minutes and seconds. This table was used by sailors, together with a table for solar declination, also extant in the *Almanach perpetuum*, to determine the geographical latitude at sea. All tables for the positions of the celestial bodies, including that for the solar position, rest on periods of revolution different for each planet, after which the planets return to about their initial position. Algorithms to extend their use beyond the first cycle were also provided, conferring this set of tables their perpetual characteristic evoked in the title.

The tables for positions, mean motions, and other quantities associated with the planets in the *Almanach perpetuum* were compiled in the framework of Alfonsine astronomy, that is, they derive from the Alfonsine Tables, originally compiled in Toledo under the patronage of King Alfonso X of Castile and León (reigned: 1252–1284) and recast in Paris in the first decades of the fourteenth century. This set came back to Spain, in particular to Salamanca, in about 1460, and was extensively used by Abraham Zacut in his tables in the *Ḥibbur*. Besides this Alfonsine tradition, the *Ḥibbur*, and thus the *Almanach perpetuum*, shares another tradition developed by Jewish astronomers in the Iberian Peninsula and Southern France.

2. The Jewish tradition is clearly illustrated in Zacut's tables for true syzygies. They were based on another set of tables for conjunctions and oppositions computed by Jacob ben David Bonjorn more than a century earlier.

[2]See B. R. Goldstein, "Preliminary remarks on Judah ben Verga's contributions to astronomy", in L. Saraiva and H. Leitão (eds.), *The Practice of Mathematics in Portugal: Papers from the International Meeting held at Óbidos [Portugal], 16–18 November 2000.* Coimbra: Coimbra University Press, 2004, pp. 63–90. See also B. R. Goldstein "The astronomical tables of Judah ben Verga", *Suhayl* 2 (2001), 227–289.

This astronomer, in the service of Pere el Cerimoniòs (1319–1387), King of Aragon and Catalonia, drew tables for the meridian of Perpignan, listing all true conjunctions and oppositions in a period of about 31 Julian years and 2 days, ranging from 1361 to 1391, and tables for determining the circumstances of solar and lunar eclipses. It is worth noting that, for the derivation of his tables Bonjorn followed closely a previous work on mean syzygies and a value for the length of the mean synodic month by the well-known Jewish scholar, Levi ben Gerson (1288–1344), working in Southern France. Levi based his tables for the motion of the Moon on his own observations and his own lunar model in the framework of Ptolemaic astronomy, totally independent of Alfonsine astronomy.[3]

Bonjorn's tables were definitely most successful in manuscript and they were diffused widely in Hebrew, Latin, Catalan, and Greek, although they were never printed as such. Probably part of this success was due to the fact that the tables also include a procedure to extend the use of the tables for years before 1361 and after 1391. This scheme was certainly used by Zacut to adapt Bonjorn's tables to his own time.

3. In the early 1500s the German printer established in Lisbon, Hermão de Campos (Hermann Kempis), published the *Regimento do estrolabio.* The full title is more explicit on its purpose: *Regimento do estrolabio & do quadrante pera saber ha declinaçam & ho logar do soll em cada huũm dia & asy pera saber ha estrella do norte.*[4] This text is known as Regiment of Munich, because it is preserved in the public library in Munich. A later and more developed version of it is extant in the Public Library in Évora, and has been called Regiment of Evora. These two documents have been extensively studied by Portuguese historians of navigation.[5]

The *Regimento* consists of a rather short text and a long table. The text provides a series of rules for nautical astronomy to be used for determining

[3]For Jacob ben David Bonjorn, see J. Chabás 1991. "The Astronomical Tables of Jacob ben David Bonjorn", *Archive for History of Exact Sciences*, 42: 279–314; see also J. Chabás 2019, *Computational Astronomy in the Middle Ages.* Madrid, pp. 277–283. For Levi ben Gerson, see B. R. Goldstein 1974. *The Astronomical Tables of Levi ben Gerson.* Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences, 45. New Haven. For Levi's determination of the length of the mean synodic month, see B. R. Goldstein 2003, "Ancient and medieval values for the mean synodic month", *Journal for the History of Astronomy*, 34: 65–74.

[4]A facsimile edition with a commentary in French was published by J. Bensaude in 1924 as *Regimento do estrolabio e do quadrante.* Imprimerie Nationale. Lisbon.

[5]L. Mendonça de Albuquerque 1965. *Os guias náuticos de Munique e Évora.* Junta de Investigações do Ultramar. Lisbon.

latitude from the solar altitude at noon. The text also includes a number of worked examples corresponding to observations north, south, and on the equator, as well as a list of geographical latitudes of places along the Atlantic coast of Africa north of the equator.

In addition to the text, there is a long table presented as a daily calendar in 12 monthly subtables, with no indication of the year for which it is valid. For each day of the year we are given the corresponding saint's name, the position of the Sun at noon, and the solar declination. It is worth noting that the solar position is only given to degrees, whereas it was displayed to seconds in the *Almanach perpetuum.* This lack of precision makes it almost impossible to identify with confidence its source. In the Evora version, the equivalent table for the daily solar positions covers 4 years, not just one as in the Munich version. It has been claimed that this table is valid for years 1517-1520 and depends on Zacut's corresponding table. As for the other tabulated quantity, the solar declination, it is readily seen that it reaches its maximum value (23;33°), that is, the obliquity of the ecliptic, in June 11-14. This is also a crude approximation in relation to more precise values in use at the time. In a more general way, the low precision used in the *Regimento,* as compared with other contemporary astronomical works, indicate that we are dealing with quite a different readership, as well as different uses. Zacut's tables are addressed to astronomers and possibly astrologers, while the *Regimiento do estrolabio* is intended to appeal to pilots and sailors.

The volume printed in Lisbon includes a second work, which is an abridged first translation into Portuguese of Sacrobosco's known treatise, under the title: *Tractado da Spera do mundo tyrada de latim em linguoagem com ha carta que huũm grande doutorale man mando va orey de purtugall dom Joham el Segundo.* The volume ends with a letter dated 1493, written by Hieronymus Münzer to King João II, proposing a voyage to Cathay, i.e., China.

4. Zacut was not the only scholar to take advantage of Bonjorn's tables for syzygies. In 1485, Bernat de Granollachs, *mestre en arts y en medicina dela inclita ciutat de Barçelona*, published in Catalan a book called *Lunari.* It provides a list of all new and full moons, specifying the month, day, hours, and minutes of each of them, presented on a yearly basis, from 1485 to 1550. For each year we are also given information on the dates of Easter, Corpus Christi, and other movable feasts, as well as the time and magnitude of each eclipse visible at the latitude of Barcelona. The numerical information for all syzygies derives from Bonjorn's tables. The *Lunari* became a bestseller

in the early ages of printing and had no less than 42 incunabula editions, mostly in Latin, but also in Italian, Catalan, and Castilian.[6]

In many of these editions, the work by Granollachs is inserted, with no mention of the name of the author, in a *Reportorio de los Tiempos*, signed by Andrés de Li, first published in Zaragoza in 1492. Andrés de Li completed his book with a miscellaneous text including comments on the division of time, definitions of the year, month, day, etc., explanations of the properties of the zodiacal signs and planets, a calendar specifying the saints' days, medical information on humors, bloodletting, etc., and a short list of localities, with an indication of the time one has to add or subtract to make the table valid for the user's own city. The entry for Barcelona is 0;0h, clearly indicating where the original table was computed.

5. In 1518, a German printer coming from Moravia, Valentim Fernandes, published in Lisbon a volume entitled *Reportorio dos tempos em lingoagem portuguez com as estrellas dos signos.* The title refers to a translation into Portuguese that was made by Valentim Fernandes himself, but does not specify the original language nor the text from which it was translated. Nevertheless, it is not difficult to recognize that the original text is the *Reportorio de los Tiempos,* first published in Castilian in 1492, as mentioned above. As was the case with its Castilian homologue, the book translated and printed by Valentim Fernandes had a remarkable success for it was printed at least eight times until the 1570s. Most of the editions were made by German Galhard, a printer of French origin also working in Lisbon.[7]

The *Reportorio dos tempos* contains a list of true conjunctions and oppositions, from 1518 to 1550, borrowed from the *Reportorio* by Andrés de Li, in turn derived from Granollachs's *Lunari*, as explained above, and ultimately built on Bonjorn's table of syzygies. The *Reportorio dos tempos* also displays a table for the daily positions of the Sun, of which we are told that it was "tirada puntualmente del Zacuto pello honrrado Gaspar nicolas mestre sufficiente en esta arte".

In short, the *Reportorio dos tempos* first printed in 1518 gathers multiple astronomical traditions: the Alfonsine tradition represented by Abraham Zacut's computation of solar positions and the Jewish tradition represented

[6] For a facsimile edition with a commentary, see J. Chabás and A. Roca 1985. *El "Lunari" de Bernat de Granollachs.* Fundació Vives i Casajuana. Barcelona. See also J. Chabás and A. Roca 1998. "Early Printing of Astronomy: The *Lunari* of Bernat de Granollachs", *Centaurus*, 40: 124–134.

[7] A. Fontoura da Costa 1983. *A Marinharia dos Descubrimientos.* Edições Culturais da Marinha, Lisbon.

by the list of true syzygies based on a quite different foundation and first computed by Jacob ben David Bonjorn. This tabular material was complemented with a text providing practical and basic information originated in Granollachs's *Lunari* and Andrés de Li's *Reportorio de los tiempos*.

It can thus be concluded that early printed books on astronomy in Portugal offer therefore a nice example of the complexity of the transmission of astronomical knowledge and the mixture of components on which it is based, facilitated by the development of print.

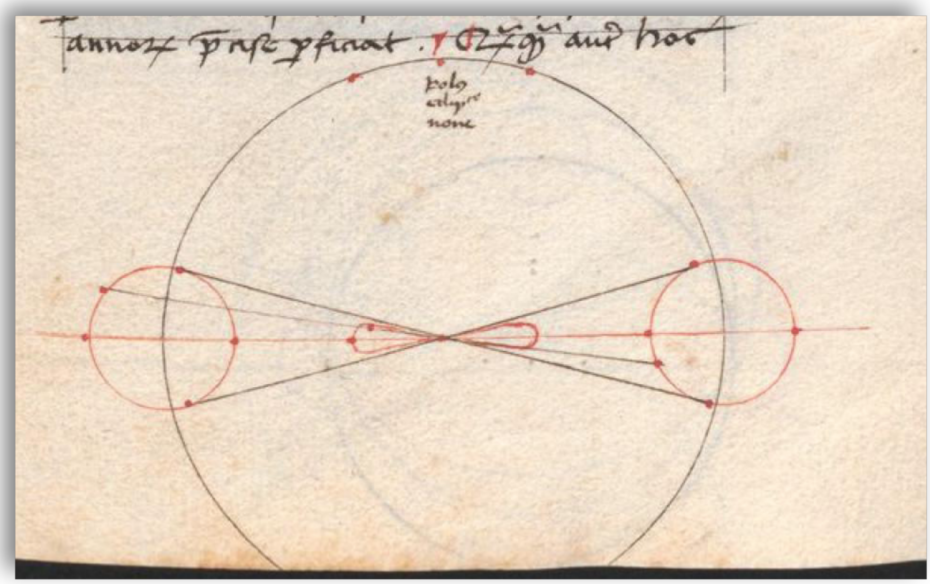
Entre aritmética e geometria: diferentes meios de expressão na explicação do movimento das estrelas fixas (sécs. XIV e XV)

Samuel Gessner
Observatoire de Paris, ALFA, ERC grant 723085

A atribuição de um movimento duplo à oitava esfera (a esfera das estrelas fixas) constitui uma das marcas da astronomia Afonsina que dominou progressivamente a prática astronómica europeia a partir de 1320. Segundo essa doutrina, a precessão dos equinócios resultaria da sobreposição de um movimento de 'trepidação' e de um movimento uniforme. As Tábuas Afonsinas divulgadas a partir da Universidade de Paris ilustram essa teoria de forma clara e simples: a soma daquelas duas componentes, ambas funções do tempo, permitia obter a variação em longitude das estrelas fixas ao longo dos séculos.

Tomando como exemplo Regulus, a estrela mais brilhante da constelação Leo, o catálogo ajustado pelos astrónomos do rei Afonso para a era T_1 tem a longitude α *Leonis* $(\mathrm{T}_1) =$ Leo $19^\circ\,38'$, onde T_1 corresponde ao meio dia local em Toledo, do dia 31 de Maio de 1251. A maioria dos astrónomos dos séculos XIV até XVI usavam as tábuas Afonsinas para prever a longitude da mesma estrela noutros tempos. Por exemplo, o astrónomo Johannes Werner quando observou a mesma estrela na era T_2, isto é, às 4.30 da manhã em Nuremberga, dia 1 de Dezembro de 1514, pôde constatar a diferença, fazendo o cálculo, como está relatado no seu tratado *De motu octavae sphaerae* (1522). A componente uniforme acumulada neste espaço de tempo é dado pelas tábuas em $1^\circ\,56'\,9''$. Para obter a componente que pertence ao movimento de trepidação, calcula-se a diferença das 'equações' $\mathrm{q}(\mathrm{T_i})$ do movimento da oitava esfera (colhidas na tábua tradicionalmente apelidada 'Tabula equationum motus accessus et recessus 8e spere' com os máximos de $\pm 9^\circ$): $\mathrm{q}(\mathrm{T}_2) - \mathrm{q}(\mathrm{T}_1) = 45'\,13''$. A nova longitude da estrela é assim obtida: $\alpha\,\mathrm{Leo}\ (\mathrm{T}_2) = \mathrm{Leo}\ 19^\circ\,38' + 1^\circ\,56'\,9'' + 45'\,13'' = 22^\circ\,19'\,22''$. (Werner, no entanto, por observação, obteve uma longitude de Leo $23^\circ\,42'$.)

A situação tornou-se menos clara a partir do momento em que os astrónomos do século XV começaram a examinar as implicações geométricas da doutrina implícita no cálculo utilizando tábuas. As dificuldades eram várias e serão mencionadas aqui apenas duas. O *Almagesto* de Ptolemeu descreve a precessão uniforme como o resultado do movimento da esfera das estrelas fixas sobre os polos da eclíptica. Ainda que os Afonsinos adoptem uma outra



Peurbach, *Theoricae novae planetarum*, Viena, ÖNB, Cod. 5203, fol. 22r

taxa, esta geometria adequa-se à componente uniforme da precessão. Também para a componente oscilatória existia uma interpretação geométrica no *De motu octave spere* atribuido a Thābit ibn Qurra. Esta obra explica o movimento da esfera das estrelas fixas em conjunto com uma 'eclíptica móvel' produzido pela rotação sobre pequenos círculos de dois pontos da esfera (chamados 'cabeças de Carneiro e de Balança') em redor dos pontos equinoxiais fixos da esfera do movimento diúrno. As duas tábuas Afonsinas com os títulos 'motus octavi circuli' e 'tabula equationum...' pareciam corresponder bem a esta configuração. No entanto a configuração geométrica não está completamente determinada pela expressão tabelar dos movimentos. Assim, Nicolaus Comes de Comitibus, no seu *De triplici motu octavae sphaerae* (1450) imagina que os pontos solsticiais da eclíptica móvel sempre se encontram a deslizar ao longo da eclíptica média. Em contraste, a célebre *Theoricae novae planetarum* (1453) de Georg Peurbach insiste que as duas eclipticas têm pontos de intersecção fixos nos pontos solsticiais da eclíptica média. Por consequência, os pontos solsticiais móveis seguem umas curvas 'quasi conoidales', semelhantes a lemniscatas.

Peurbach, no entanto, tem o mérito de apontar para uma problemática mais fundamental ainda, sem a resolver: se os pequenos círculos do movimento de trepidação se deslocarem ao longo da eclíptica sob o efeito da componente uniforme, então o equinócio 'real', isto é o ponto em que a eclíptica móvel interseta o equador, não (ou apenas muito raramente) coincide com o ponto equinocial adoptado como origem das coordenadas eclípticas. Por outras palavras, com esta interpretação geométrica a precessão obtida pelo cálculo tabular não mede o arco da eclíptica a partir do ponto equinocial 'real'. Peurbach nas suas *Theoricae novae* não dá o assunto da oitava esfera como concluido. Na verdade, as edições subsequentes do tratado incluem apresentações das diferentes teorias e parámetros, incluíndo a de Ptolemeu e de Pseudo-Thābit. Em suma, o esforço dos astronomos para conceber geometricamente a mudança em longitude que sabiam calcular acabou por revelar uma 'imperfeição' da doutrina que, por consequência, levantava dúvidas sobre a veracidade do método tabular.

Desde o final do século XV observa-se a construção de esferas armilares complexas com o objectivo de representar o movimento de trepidação, hoje designadas por 'esferas de trepidação'. Contam-se hoje dezoito destas esferas oriundas dos séculos XV até XVII. Em comparação com as esferas armilares comuns elas são muito raras e todas diferentes. Apresentam variações por vezes importantes nas suas configurações. A maioria delas inclui uma materialização dos dois pequenos circulos de trepidação colocados nos pontos equinociais da 'nona esfera'. O exemplo da esfera datada de 1605, fabricada por Ch. Schissler em Augsburgo, hoje no Maximilianmuseum (no. inv. 3432), permite ilustrar as implicações de uma representação tridimensional. Quando o raciocínio geométrico de Peurbach revelou uma 'inconsistência' entre configuração das esferas e valores tabuladas, os modelos materiais do tipo da esfera de Schissler permitia descobrir ainda outro aspecto do problema.

A esfera em Augsburgo está conforme com a descrição de Peurbach: no interior da esfera principal de rotação diurna (esfera armilar comum) encontra-se um anel graduado que representa a eclíptica da nona esfera, no plano da ecliptica principal. Esse anel ajusta-se por deslisamento para produzir o efeito da componente uniforme da precessão, deslocando assim os pontos equinociais da nona esfera relativamente aos pontos respectivos da esfera principal. Montados no interior deste anel, precisamente nos pontos equinociais, encontram-se duas rodas graduadas. Na periferia destas duas pequenas rodas prendem-se os eixos diametralmente opostos de um anel que representa a ecliptica da oitava esfera. Os dois eixos materializam as 'cabeças de Carneiro e de Balança' acima mencionadas. Estes pontos podem ser fixados nas pequenas rodas, reproduzindo assim a trepidação ao longo da periferia de dois pequenos círculos. O anel correspondente à ecliptica da oitava esfera encontra-se assim num plano diferente do plano da ecliptica da nona esfera e a da principal. Este movimento corresponde à componente oscilatória do movimento.

Além de ser uma imagem simbólica e didáctica da geometrização de Peurbach, a esfera de Schissler, com as suas partes correctamente proporcionadas e cuidadosamente graduadas, apresenta a possibilidade de ajustar o instrumento com precisão em função de uma época certa. Assim, o movimento médio da oitava esfera, isto é a deslocação das cabeças de Carneiro e Balança, obtem-se da tábua acima mencionada do 'motus octavi circuli'. Em 1514, os pontos encontravam-se em $78° 7' 10''$ a contar do ponto mais afastado da ecliptica da nona, levando a ecliptica da oitava esfera a uma posição perto da coplanar à ecliptica da nona. Só faltaria agora ajustar a componente uniforme do movimento obtida pelo deslisamento da ecliptica da nona esfera. Acontece que a tábua do movimento médio das estrelas fixas fornece a velocidade desta componente, mas não há indicação nenhuma sobre a posição *inicial* dos pontos equinociais relativamente à ecliptica principal. Desta forma, a manipulação do instrumento de Schissler acaba por evidenciar que a doutrina da oitava esfera, tal como é expressada nas tábuas, não permite determinar inteiramente a configuração geométrica do movimento que se calcula.

Este episódio da história da astronomia ilustra o impacto que pode ter o meio de expressão utilizado para descrever um fenómeno astronómico. Enquanto a expressão tabular basta perfeitamente para obter resultados numéricos das posições planetárias e estelares, uma descrição da situação geométrica, fosse ela por prosa, por diagramas ou por modelos tridimensionais, revela que as tábuas por si só não se podem transpôr em uma configuração geométrica que seja congruente em todos os pormenores com o cálculo tabular.

Bibliografia

1. E. J. Aiton. 1987. "Peurbach's *Theoricae Novae Planetarum*: A Translation with Commentary", *Osiris*, vol. 3, n. 1, p. 4–43.

2. M-M. Saby. 1987. *Les canons de Jean de Lignères sur les tables astronomiques de 1321: édition critique, traduction et étude*, thesis, Ecole des Chartes.

3. D. A. King. 1993. "177 Armillarsphäre", in U. Müller ed., *450 Jahre Copernicus 'De revolutionibus', Astronomische und mathema-*

tische Bücher aus Schweinfurter Bibliotheken, Veröffentlichungen des Stadtarchivs Schweinfurt, n. 9, p. 362–364.

4. C. Ph. E. Nothaft. 2019. "An Alfonsine universe: Nicolò Conti and Georg Peurbach on the threefold motion of the fixed stars", *Centaurus*, vol. 61, p. 91–110.

A edição do *De compositione astrolabii* de Andaló di Negro (*ca.* 1330): um trabalho entre filologia e história da geometria projectiva

Samuel Gessner
Observatoire de Paris, ALFA, ERC grant 723085

Bernardo Mota
Centro de Estudos Clássicos da Faculdade de Letras da Univ. de Lisboa

Até muito recentemente, o *De compositione astrolabii*, de Andaló di Negro, não estava acessível aos estudiosos, apesar de constituir um dos mais antigos textos do mundo latino sobre projeção estereográfica. O trabalho de edição crítica e tradução deste texto agora concluído preencheu esta lacuna, ao mesmo tempo que identificou e resolveu uma série de problemas de interpretação do texto que conjugavam questões filológicas, historiográficas e de história da geometria.

Andaló di Negro nasceu em Génova *ca.* 1260 e faleceu em Nápoles no ano de 1334. Membro de uma família genovesa de embaixadores e mercadores com direitos senhoriais na Ligúria, Chipre, Arménia e Síria, viajou pelo espaço mediterrânico e estabeleceu laços de amizade com Hugo IV de Lusignan, Rei de Chipre e Jerusalém. Tendo obtido o cargo de embaixador da República de Génova no Oriente, ficou encarregue das negociações de paz com o Imperador de Trebizonda em 1314. Depois desta data, perde-se o seu rasto, mas sabe-se que permaneceu na corte do Roberto I de Nápoles, também conhecido como Roberto de Anjou, durante alguns anos. Foi nesse ambiente de corte que Andalò, já septuagenário, ensinou astronomia e astrologia ao poeta Bocaccio. Um documento de Nápoles com a data de 9 de Junho de 1334 refere a sua morte.

Entre as obras escritas por Andaló, contam-se várias dedicadas ao astrolábio. Algumas destas foram impressas em 1475, integrando assim o primeiro volume alguma vez impresso sobre esse tópico. De fora dessa edição, contudo, ficou o tratado *De Compositione, que se* destaca dos demais pelo teor essencialmente teórico. Muito mais do que um texto clássico sobre o método de construir geometricamente as escalas num astrolábio, o *De Compositione* expõe os conceitos de base envolvidos nas várias etapas de construção do instrumento e elucida, em cada passo, o resultado da projeção de uma esfera num plano, ainda que não apresente demonstrações euclidianas. Com base nos cinco testemunhos manuscritos mais relevantes, é possível reconstituir-se a seguinte sequência de capítulos, que não vêm explicitamente indicados na obra:

1. Dos coluros (De coluris)
2. Do círculo equinocial (De circulo equinoctiali)

   Dos círculos paralelos de Câncer e de Capricórnio (De circulis parallelis cancri et capricorni)

   Da descrição da esfera (De descriptione spere)
3. Como a esfera é cortada e comprimida (Qualiter spera secatur et deprimitur)

   Do desenho dos círculos (De figuratione circulorum)
4. Das linhas meridiana, da meia-noite, oriental e ocidental (De lineis meridiana, medie noctis, orientalis et occidentalis)

   Da formação dos círculos com os quais se fazem os almucantares (De formatione circulorum cum quibus fiunt almucantarath)

   Da reconstrução do mesmo (De refectione eiusdem)
5. Do almucantar (De almucantarath)

   Do zénite da cabeça (De cenith capitis)
6. Da aurora (De aurora)
7. Do azimute (De azimute)
8. Das horas (De horis)
9. Da grandeza e brevidade dos dias (De magnitudine et brevitudine dierum)
10. Da eclíptica e dos signos do zodíaco (De ecliptica et signis zodiaci)
11. Do local e posição das estrelas fixas (De loco et situ stellarum fixarum)
12. Do polo do zodíaco (De polo zodiaci)

Ao editar o texto de cada um deles, foram propostas soluções para vários problemas identificados numa edição anterior (Cesari 1984a), incluindo a correcção de pequenos erros de leitura dos manuscritos, a inclusão de pequenas passagens que existem nos testemunhos que agora sabemos serem os mais importantes, e a eliminação de algumas dificuldades de interpretação de conteúdo.

Depois do trabalho realizado, é possível afirmar que os vários breves desenvolvimentos de natureza teórica incluídos no tratado mostram que a prática instrumental não deve ter sido a sua principal finalidade. Um exemplo que atesta este facto é o capítulo 4, que se debruça sobre a construção dos círculos de altitude constante chamados almucantares. Nele, sobressai o facto de os pontos do coluro solsticial com declinação meridional não serem construídos directamente como uma projecção estereográfica de uma esfera com raio dado R_1; antes pelo contrário, para obter as imagens desses pontos no plano do equador, Andalò prefere usar os pontos correspondentes com declinação septentrional numa esfera de raio maior R_2 igual ao raio da projecção do trópico de Capricórnio, e projectados pelo polo desta esfera maior. Isso equivale, em notação moderna, à aplicação da seguinte igualdade:

$$R_1 \tan\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right)\right) = R_2 \tan\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon+\delta\right)\right) \tag{1}$$

para toda declinação $\delta \in [0, \varepsilon]$, quando a razão dos raios das esferas projectadas, R_1 e R_2, é $\frac{R_2}{R_1} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Esta propriedade (1) é utilizada sem se apresentar qualquer justificação da validade do procedimento, como, de resto, era típico da época, mas está correcta. Também os capítulos 8 e 9, dedicados ao traçado das linhas das horas, apresentam um desenvolvimento original sobre os casos-limite dessa operação que se verificam na preparação de tímpanos de astrolábio para latitudes terrestres extremas (perto do círculo ártico, no próprio círculo ártico e além desse mesmo círculo). Estes pequenos desenvolvimentos de natureza teórica e especulativa sugerem que o pequeno tratado de Andalò di Negro explora o potencial heurístico de um género da literatura científica medieval que poderia parecer, à primeira vista, um mero texto procedimental.

Bibliografia

Andalò di Negro, ed. Fornaciari and Faracovi. 2005. *Trattato sull'astrolabio di Andalò di Negro*, a cura di P. E. Fornaciari e O. P. Faracovi. Pubblicazione del Comune di Livorno in occasione della "Primavera della Scienza a Livorno" (Ospedaletto: Pacini editore).

Cesari, A. M. 1984a. *L'astrolabio di Andalò di Negro*, Parte I, edizione critica. Milano: s. n.

Cesari, A. M. 1984b. *Practica Astrolabii di Andalò di Negro*, Parte I. Edizione critica. (Bergamo: Istituto Universitario di Bergamo).

Muccillo, M. 1991. "Di Negro, Andalò". *Dizionario Biografico degli Italiani* 40: 126–131.

Dominique Raynaud, Samuel Gessner, Bernardo Mota, "Andalò di Negro's *De compositione astrolabii*: a critical edition with English translation and notes", *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 73, 2019, p. 551–617.

A Proposição 15 da Óptica de Euclides

Daniel Pinto
Universidade de Coimbra – CMUC
Departamento de Matemática

Sem a relevância histórica dos *Elementos*, a *Óptica* de Euclides está longe de ser uma obra menor, constituindo-se como uma das mais antigas e influentes no campo da óptica geométrica. Apesar das imperfeições do texto, e de algumas incertezas quanto à autoria, poucos contestam a sua preponderância no desenvolvimento das modernas teorias da visão. Diversas cópias do manuscrito foram elaboradas ao longo dos séculos, tendo chegado até nós versões em grego, árabe e latim (algumas delas agora também traduzidas para outras línguas como o inglês, o francês, o italiano e o português). A partir dos manuscritos em grego, foram editadas, em 1895, por J. L. Heiberg, duas versões que ficaram conhecidas como Heiberg A e Heiberg B [4]. A construção da versão A teve por base manuscritos descobertos no séc. XIX, e foi apresentada por Heiberg como sendo a mais próxima do texto original, enquanto a versão B corresponderia a uma versão modificada, no séc. IV, por Teão de Alexandria. Apesar de bem recebida na altura e durante grande parte do séc. XX, esta é uma tese que, hoje em dia, não recolhe consenso [6].

De todos os conceitos que Euclides introduz logo nas primeiras definições (nas quais os raios visuais são apresentados como linhas rectas, e o olho implicitamente entendido como um ponto), o mais importante decorre da ideia de que é o ângulo de visão que determina o tamanho aparente do objecto. Essa separação entre *realidade* e *aparência* é bastante explícita na Proposição 8 da *Óptica*, na qual se prova que segmentos de igual comprimento e paralelos, se colocados a distâncias distintas do olho, não são vistos na proporção dessas distâncias. A demonstração da *Óptica* compara a razão entre amplitudes de ângulos (tamanhos aparentes) com a razão entre comprimentos de segmentos (distâncias reais), e chega à conclusão que estas não coincidem. Por outro lado, visitando algumas das versões do texto [1][2][3][5], percebe-se que a demonstração da Proposição 15 (bem como as das Proposições 16 e 17, variações daquela) centra-se sempre no comprimento dos segmentos, negligenciando o tamanho aparente dos objectos, que é o tema central da *Óptica.* Na versão de Francisco de Melo [1], matemático português do séc. XVI, a proposição 15 é enunciada da seguinte forma:

De grandezas colocadas por baixo do olho em que uma excede a outra, se o olho se aproximar da menor, aquilo que se vê por cima [dela] aparece *maior, se o olho se afastar da menor, [aquilo que se vê por cima dela] aparece menor.*

Mas mais interessante do que o texto da proposição é o início da prova elaborada por Francisco de Melo. Antes de apresentar a sua própria demonstração, Francisco de Melo reescreve o enunciado da proposição — que na formulação inicial acima apresentada (baseada na versão em latim de Zamberto, que terá usado um texto grego próximo da versão Heiberg B) inclui a referência às aparências — salientando que a comparação será feita entre comprimentos de segmentos e a diferença real entre as grandezas, que o autor denomina *excesso legítimo*. Recorrendo à notação da Figura 1, podemos dizer que o que Francisco de Melo conclui é que aquilo que é visto acima de CD (o segmento AG) é maior do que o *excesso legítimo* AF, e que o que é visto acima de ZK (o segmento AL) é menor do que AF.

Este tipo de demonstrações, focadas na diferença real entre comprimentos, abre espaço ao exercício especulativo de tentar reformular a prova da Proposição 15, estabelecendo uma comparação entre tamanhos aparentes. Neste caso, recorrendo, entre outras ferramentas, à comparação entre ângulos inscritos numa circunferência, uma técnica fiel ao estilo da *Óptica* de Euclides, e que é utilizada abundantemente na segunda metade da obra. Considerando dois segmentos AB e GD (representando o maior e o menor objecto, respectivamente), e L e E duas posições distintas para o olho, tal como indicadas na Figura 2, é possível provar que o ângulo ALG tem amplitude maior do que o ângulo AEG, e que portanto o tamanho aparente daquilo que se vê por cima do objecto menor aparece maior se o olho se aproxima do menor (posição L) e aparece menor se o olho se afasta (posição E).

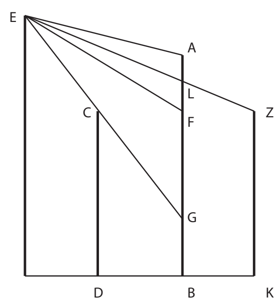


Figura 1: Demonstração da Proposição 15 proposta por Francisco de Melo.

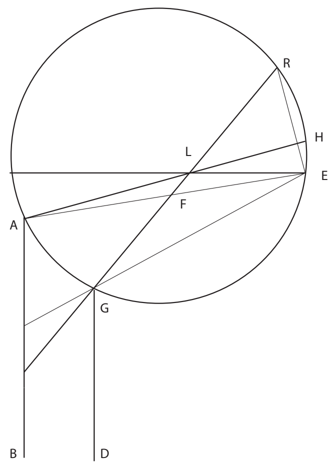


Figura 2: Demonstração alternativa da Proposição 15.

Referências

[1] Bernardo Mota, Henrique Leitão, *Francisco de Melo: Obras Matemáticas. vol. I: Texto Latino e Tradução*, BNP/CEC, 2014.

[2] Elaheh Kheirandish, *The Arabic version of Euclid's Optics*, Springer, 1999.

[3] Fabio Acerbi, *Euclide, Tutte le opere*, Bompiani, 2007.

[4] Harald Siebert, *Transformations of Euclid's Optics in late antiquity*, Nuncius 29 (2014), pp. 88–126.

[5] Harry David Burton, *The Optics of Euclid*, JOSA, 35(5) (1972), pp. 357–372.

[6] Wilbur R. Knorr, *On the Principle of Linear Perspective in Euclid's Optics*, 34 (1991), pp. 193–210.

A Matemática Pré-histórica através de artefactos milenários

Jaime Carvalho e Silva
Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra

A relevância social da Matemática é muito anterior à Matemática Grega, que muitos consideram o início da História da Matemática. Vários investigadores têm chamado a atenção para a relevância da atividade matemática em épocas remotas. Seidenberg defende que a "*geometria tem uma origem ritual (…) as origens vão até ao Leste mais antigo*." (Seidenberg, 1962) Como bem assinala Manoel de Campos Almeida, Van der Waerden defende "uma origem única, pré-histórica, para as principais correntes da matemática da antiguidade: grega, hindu, chinesa, babilônica e a dos construtores megalíticos." (Almeida, 2009)

Manoel de Campos Almeida chama a atenção para a "similaridade entre as ideias matemáticas e religiosas, além de outras, dos construtores megalíticos das Ilhas Britânicas, dos babilônios, dos gregos, dos hindus e dos chineses, que praticamente nos forçam a postular a existência de doutrina matemática comum, emergente do neolítico, da qual essas ideias se originaram." (Almeida, 2009, pg. 6)

Existem muitos artefactos com inscrições abstratas, de índole numérica ou geométrica dos tempos pré-históricos que não têm recebido muito atenção dos historiadores matemáticos, e, no entanto, eles são potencialmente relevantes para compreender melhor o uso da Matemática em tempos mais recuados. Claro que precisamos de uma noção de Matemática mais abrangente. Podemos seguir Manoel de Campos Almeida escolhendo "uma conceituação operacional que nos permita distinguir o que é matematizar das outras atividades cotidianas do ser humano, tais como comer, dormir, caçar, plantar, construir, fabricar, acender, etc." (Almeida, 2009)

Um dos artefactos pré-históricos mais conhecidos e estudados é o osso de Ishango, em exibição no Museu da Ciência de Bruxelas, cuja datação aponta para uma antiguidade de cerca de 20 000 anos; poderá constituir um calendário (há na realidade vários ossos descobertos em Ishango, mas um é mais completo e detalhado e tem atraído mais a atenção dos historiadores). O osso de Lebombo, considerado ainda mais antigo, não tem a mesma notoriedade e nem sequer está em exposição no museu da África do Sul, onde está depositado (Museu McGregor, Kimberley, Northern Cape). Estes e outros exibem marcações a espaços regulares, podendo representar registos de contagens ou mesmo calendários.

Suplemento do Boletim da SPM 79, Dezembro 2021, pp. 103–105

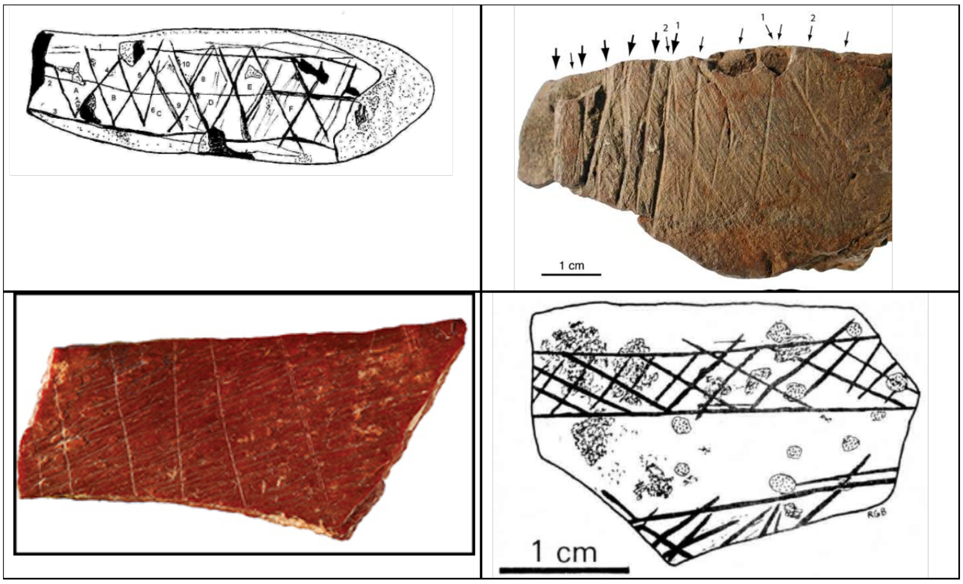


Figura 1: Ocre da caverna de Blombos (Africa do Sul), Ocre do Rio Klasies (Africa do Sul), Osso de Lingjing (China), casca de ovo de avestruz de Patne (Índia).

Muitas investigações arqueológicas têm feito aparecer outros artefactos pré-históricos em Africa e na Ásia, como os da caverna de Blombos, das cavernas do Rio Klasies, ambos na Africa do Sul, dos ovos de avestruz de Patne na Índia ou dos ossos da região de Linjing na China, mas o seu estudo e interpretação está essencialmente por fazer. Todos estes artefactos têm sido datados com dezenas de milhares de anos, podendo ultrapassar cem mil anos. O mais curioso destes artefactos é que não se limitam a registar em osso ou em pedra marcações a espaços regulares, mas parecem apresentar representações geométricas abstratas cuja finalidade obviamente se desconhece.

Tal como refere Manoel de Campos Almeida "A Pré-História da Matemática se empenha no estudo de como a Matemática se tornou um fator estruturante do raciocínio que classificamos como especificamente humano, o que, obviamente, ocorreu muito antes da invenção da escrita. Contempla a Matemática com uma ótica ampliada, similar à proposta por D'Ambrosio em sua Etnomatemática"(Almeida, 2011, pg. 9).

Esta área parece requerer que os historiadores matemáticos se debrucem mais sobre ela.

Bibliografia

ALMEIDA, Manoel de Campos (2009) *Origens da Matemática – A Pré-História da Matemática. Vol. I – A Matemática Paleolítica.* Curitiba: Progressiva.

ALMEIDA, Manoel de Campos (2011) *Origens da Matemática – A Pré-História da Matemática. Vol. II – O Neolítico e o Alvorecer da História.* Curitiba: Progressiva.

ALMEIDA, Manoel de Campos (2015) As Mais Antigas Evidências Conhecidas do Emprego de Talhas Numéricas Associadas a Processos de Contagem. In *Anais do XI Seminário Nacional de História da Matemática.* Natal: SBHM.

ALMEIDA, Manoel de Campos (2017) *A Matemática na Idade da Pedra: Filosofia, Epistemologia, Neurofisiologia e Pré-história da Matemática.* São Paulo: Livraria da Física.

BEDNARIK, R. G. (1992) Natural line markings on Palaeolithic objects. *Anthropologie*, 30, 233–40.

D'ERRICO, Francesco & Backwell, Lucinda R. & Wadley, Lyn (2012) Identifying regional variability in Middle Stone Age bone technology: The case of Sibudu Cave, *Journal of Archaeological Science*, 39(7), 2479–2495.

LI, Z., Doyon, L., Li, H., Wang, Q., Zhang, Z., Zhao, Q., & D'Errico, F. (2019). Engraved bones from the archaic hominin site of Lingjing, Henan Province. *Antiquity*, 93(370), 886–900.

SEIDENBERG, A (1962) The Ritual Origin Of Geometry. *Archive for History of Exact Sciences*, 1, 488–527.

WAERDEN, B. L. van der (1983) *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations.* Berlin: Springer Verlag.

A Espiral de Nunes e a sua influência na pré-história do Cálculo Infinitesimal

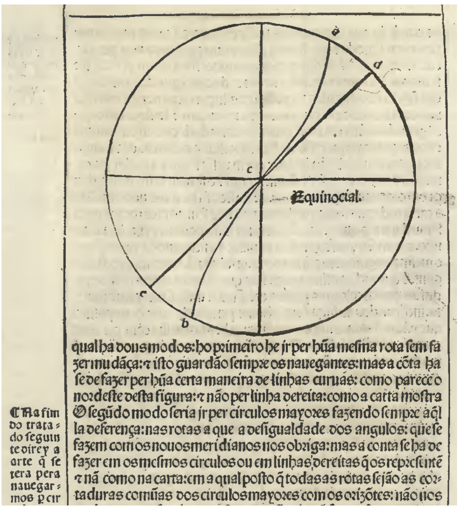
José Francisco Rodrigues
Departamento de Matemática e CMAF&IO, FCUL

A conceptualização da linha de rumo e a sua aproximação pela *noniodrómia* como método para o cálculo da tábuas de rumos, por Pedro Nunes em 1537 e em 1566, respetivamente, foram etapas cruciais da matemática renascentista que ao longo do século seguinte estimularam o desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal até à publicação de Edmond Halley em 1696 sobre a "*doutrina destes rumos espiraliformes que são de grande importância na Arte da Navegação*". Este texto procura fundamentar essa evolução histórico-científica e é uma adaptação do artigo [1] para o 33.º Seminário Nacional de História da Matemática, onde foi apresentado.

1- A *Espiral de Nunes*, ou Loxodrómia, data de 1537 — Pedro Nunes (1502–1578) no *Tratado da Sphera* [2], traduziu e comentou o tratado homónimo de Sacrobosco, os capítulos sobre o Sol e a Lua da *Theoricae nouae planetarum*, de Purbachio, o Livro I da *Geographia* de Ptolomeu e ainda dois importantes ensaios originais, o "*Tratado* (...) *sobre certas duuidas da navegação*" e o "*Tratado (...) em defensam da carta de marear*", que lançaram as bases da teoria matemática da navegação.

Com efeito, se um navegador seguir sempre com o leme fixo em direção ao seu objetivo descreve um arco de círculo máximo, que é afinal a "reta" sobre a superfície esférica. Esta é a linha mais curta ou geodésica sobre a esfera, que se veio a chamar ***ortodrómia***. No entanto, a orientação oceânica baseada na bússola ao manter constante o azimute, i. e. um ângulo constante e não nulo com o Norte, desvia-se da rota mais curta e constituiu motivo de confusões e de erros graves na navegação. Esta linha de rumo, concetualizada por Nunes em 1537 (Fig. 1a), veio a ser chamada linha loxodrómica ou ***loxodrómia***, do grego *loxos* e *dromos*, que significam, respetivamente, torto e percurso. Estas curvas coincidem com os meridianos no caso limite do azimute a 0° e, nestes casos, também são ortodrómias. A aplicação interativa *Loxos* ilustra a diferença entre estas duas curvas, bem como as suas projeções, e é acessível em: `http://formas-formulas.fc.ul.pt/interactive/loxo/pt/index_pt.html` .

Se inicialmente em 1537 Pedro Nunes pode ter admitido que as linhas de rumo atingiam os polos, num manuscrito que está em Florença, escrito poucos anos depois, clarifica *"que o rumo não chega ao polo (...), mas*



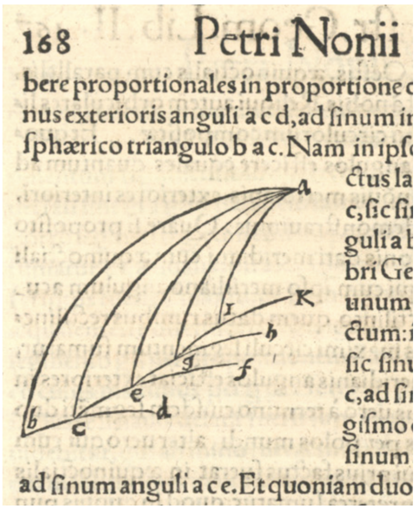


Fig. 1a. A representação de 1537, de Nunes, da linha de rumo "acb" e do círculo máximo "dce". **1b.** A ***noniodrómia*** é a linha ***bcegi*** composta por arcos de "retas" sobre a esfera fazendo o mesmo ângulo com os meridianos convergindo no polo ***a*** e aparece pela primeira vez em *"De Arte Atque Ratione Nauigandi"* de 1566.

chega a qualquer ponto antes do polo, pois que de qualquer ponto se pode ir adiante pelo mesmo rumo" e, posteriormente, nas suas *Opera* em latim de 1566 publicada em Basileia, demonstra-o matematicamente por redução ao absurdo [3], num argumento que mostra que o polo é o ponto assintótico da loxodrómia.

A conquista dos oceanos determinou a globalização da influência europeia a partir do século XVI e correspondeu ao início de uma grande transformação científica não só na Geografia, na História Natural, mas também na Astronomia e nas ciências físicas. O papel da náutica nesta transformação, levou o historiador inglês David Waters a defender a tese de que "*os inícios da revolução científica devem ser encontrados nos trabalhos dos portugueses e de outros eruditos que a Coroa de Portugal teve a perspicácia de empregar para resolver os novos problemas de navegação colocados pelas viagens oceânicas no século XV e inícios do XVI; e nos efeitos que as descobertas geográficas feitas pelos navegadores usando a nova ciência náutica dos portugueses tiveram sobre os intelectuais da Europa desse tempo, e sobre os homens nas práticas de governo, comércio e indústria"* [4].

2- A *Noniodrómia* é a aproximação noniana da linha de rumo e data de 1566. No capítulo *"De Arte Atque Ratione Nauigandi"* de [3], Nunes apresenta um método para construir uma tábua de rumos, i. e., uma tabela de latitudes e longitudes das sete loxodrómias com azimutes múltiplos de $11^\circ 15'$ *"para o traçado de quaisquer rumos num globo"*, deixando-a para ser preenchida pelos "*moços aplicados*" que *"acharão os números que se devem escrever nela, estendendo-os quanto lhe aprouver."*

A teoria da linha de rumo de Pedro Nunes teve um papel seminal na teoria matemática da loxodrómia e da cartografia e só recentemente começou a ser reconhecido o verdadeiro alcance e o pioneirismo das suas ideias [5]. Por exemplo, a linha quebrada que aproxima a loxodrómia por arcos de 1° de círculos máximos [3], a que chamaremos de ***noniodrómia*** (Fig. 1b), é uma ideia natural, mas inovadora, que Pedro Nunes introduz para a construção da sua tábua de rumos aproximados, iterando soluções de sucessivos triângulos planos ao longo da linha correspondente sobre a esfera. Como cada um dos arcos de círculo máximo *bc, ce, eg* ou *gi*, é tangente à loxodrómia que passa no seu ponto inicial com o mesmo azimute V, e pode ser interpretado como um segmento de "reta" na superfície esférica, o método de Nunes é, essencialmente e traduzido para o cálculo infinitesimal, o mesmo que Euler introduziu dois séculos mais tarde, em 1768, para a resolução aproximada de uma equação diferencial de primeira ordem.

Um dos problemas científicos mais importantes do século XVI era o problema matemático da navegação oceânica de como, pela rota mais curta, pela direção mais adequada e no tempo mais curto, se deve conduzir um navio entre dois lugares previamente assinalados e o problema correspondente da cartografia de representar os rumos como retas na carta de marear plana. Sem explicar detalhes, Pedro Nunes já havia imaginado um método para a retificação da loxodrómia no plano, antes de cartógrafo Gerardus Mercator (1512–1594) a ter realizado no seu *Mapa-múndi* em 1569, tendo-o anunciado três anos antes na introdução às suas *Opera* de 1566: *"Mas, porque era muito difícil e até inviável para os mareantes traçar nos globos linhas semelhantes a estas, os matemáticos imaginaram uma descrição plana do orbe, não só adaptada à arte de navegar que praticam, como também muitíssimo fácil. Nesta representação são desenhadas linhas retas em lugar dos rumos do mesmo nome; como são paralelas, fazem ângulos iguais com toda a linha meridiana ou rumo Norte-Sul".*

Mercator conhecia as obras de Nunes, mas apenas recentemente foi possível estabelecer que foi através de uma tabela de rumos que construiu a primeira projeção cilíndrica conforme num mapa [6]. Três décadas depois, o matemático inglês Eduard Wright (1561–1615), que conheceu os problemas práticos da navegação oceânica numa viagem aos Açores em 1589, publicou em Londres o livro *Certain errors in navigation,* em 1599, e aí apresentou a primeira descrição detalhada e rigorosa da regra matemática subjacente àquela projeção. Para ilustrar essa projeção, Wright utilizou a imagem duma superfície esférica a inchar, tal como acontece ao soprar uma bexiga mantendo o equador constante e em contato com a superfície côncava de um cilindro fixo, de modo que os meridianos se tornam retas verticais e ortogonais aos paralelos, cujas distâncias entre si vão aumentando progressivamente na direção da geratriz do cilindro.

Mas existe uma infinidade de projeções cilíndricas, como a que se atribui a Arquimedes e projeta horizontalmente os pontos da esfera terrestre sobre o cilindro tangente a esta e que tem o efeito oposto de encurtar as distâncias entre paralelos no plano que se obtém desse cilindro depois de desdobrado e cortado ao longo de um meridiano. Outro exemplo, é o da projeção centográfica cilíndrica em que um ponto P, de latitude φ e longitude λ, da superfície do globo se projeta radialmente no cilindro, tangente ao seu equador, num ponto P' de coordenadas x e y. Neste caso tem-se $x/\lambda = y/\tan\varphi$, o que determina uma maior extensão das ordenadas com o aumento das latitudes. Mas esta "carta de latitudes crescidas" amplia demasiado as latitudes e não é conforme, ou seja, não preserva os ângulos. Não é, portanto, a carta de marear proposta por Pedro Nunes, pois não transforma as loxodrómias em retas no cilindro, apesar de também transformar os meridianos em perpendiculares dos paralelos estendidos na superfície cilíndrica.

3- A primeira integração numérica "*avant la lettre*" de 1599. Seguindo o método de Nunes [3], Wright observou que o mapa de Mercator aumenta a distância entre paralelos de tal modo que as pequenas "*partes do meridiano, em cada latitude, têm de crescer com a mesma proporção das respetivas secantes ou hipotenusas do arco, determinado pelos pontos de crescimento da latitude e da equinocial*". Assim, para construir a tabela, publicada em 1599, para "*a verdadeira divisão do meridiano na carta marítima*", a qual é uma tabela de latitudes para $\Delta\varphi = 1'$, i. e., com variações de um minuto, Wright utilizou somas de secantes para obter as ordenadas de cada paralelo na carta de marear.

Em termos do Cálculo Infinitesimal, que só apareceu quase um século mais tarde, nesta projeção cilíndrica, em que o equador é o eixo dos x e o paralelo de latitude φ é a reta horizontal $y = l(\varphi)$, a proporção da distorção segundo a direção dos meridianos deve ser igual à proporção com o fator de escala igual a $\sec\varphi = 1/\cos\varphi$ segundo a direção dos paralelos. Então podemos concluir

$$\lim_{\Delta\varphi\to 0} \frac{\Delta\ \textit{distância no mapa}}{\Delta\ \textit{distância na esfera}} = \lim_{\Delta\varphi\to 0} \frac{l\,(\varphi+\Delta\varphi)-l(\varphi)}{\Delta\varphi} = l'(\varphi) = \sec\varphi.$$

Como observou o historiador da Matemática Florian Cajori [7], o processo utilizado por Wright corresponde a um cálculo numérico do integral da secante, ou seja, a utilização duma relação do tipo $\Sigma \sec\varphi\Delta\varphi$ para a aproximação do integral

$$l(\varphi) = \int_0^{\varphi} \sec\phi\, d\phi = \log\tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

É interessante observar que esta expressão também fornece a equação em coordenadas polares da loxodrómia de azimute V, i. e., tem-se

$$\lambda(\varphi) = \tan V\, l(\varphi) = \tan V \log\tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Com efeito, se numa esfera de raio unitário, considerarmos um triângulo esférico com base infinitesimal num paralelo de latitude φ, correspondendo a uma variação infinitesimal de longitude $d\lambda$, essa base terá por comprimento $\cos\varphi\, d\lambda$, uma vez que a essa latitude o paralelo é uma circunferência de raio $\cos\varphi$. Então para uma variação $d\varphi$ num ponto P, de coordenadas (λ, φ), sobre a loxodrómia, o quociente $\cos\varphi\, d\lambda/d\varphi$ dá o declive da tangente a essa linha nesse ponto e é igual à constante $tanV$, como se pode facilmente concluir do respetivo triângulo incremental com vértice em P. Então, com o cálculo infinitesimal, obtemos a derivada da longitude sobre a loxodrómia na forma $d\lambda/d\varphi = \tan V \sec\varphi$ e, por integração, obtemos a expressão para a longitude $\lambda(\varphi)$ proporcional a uma tangente logarítmica da latitude.

Desse triângulo infinitesimal, podemos também concluir que o elemento da variação do comprimento de arco sobre a loxodrómia ds vem dado por $\cos V ds = d\varphi$, e, integrando, obtemos imediatamente que a distância s_{12} entre dois pontos de latitude $\varphi_1 < \varphi_2$ vem dada por

$$s_{12} = \sec V\,(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Em particular, podemos concluir com o Cálculo Infinitesimal que, apesar da loxodrómia de azimute V, $0 < V < \pi/2$, espiralar indefinidamente entre o polo Sul e o polo Norte sem nunca os atingir, tem comprimento total finito e igual a $\rho \sec V\, \pi$, representando por ρ o raio da Terra.

A cronologia da história da compreensão matemática da loxodrómia no século XVII [8] tem aspetos muito interessantes e paralelos à história do aparecimento do Cálculo Infinitesimal, incluindo a descoberta por Henri Bond, referida num compêndio inglês de navegação de 1645, que a "*linha meridiana era análoga a uma escala de tangentes logarítmicos de meio complemento de latitudes*" começando a 45°, por fortuita comparação da tabela de rumos de Wright com a tabela dos logaritmos naturais, introduzidos por Neper em 1614. Esta conjetura despertou o interesse dos matemáticos britânicos da época, tendo sido demonstrada por James Gregory, na sua *Exercitationes geometricae* de 1668, mostrando uma relação entre uma certa área sobre um cilindro com a área de um sector hiperbólico, portanto um cálculo logarítmico, e por Isaac Barrow que, nas suas *Lectiones geometricae* de 1770, encontrou a seguinte expressão, equivalente à anterior por conhecidas relações trigonométricas [9]

$$\int_0^{\varphi} \sec\phi \, d\phi = \frac{1}{2}\left[\log(1+\operatorname{sen}\phi) - \log(1-\operatorname{sen}\phi)\right].$$

Apesar de John Wallis, em 1686, utilizar a sua aritmética dos infinitos para substituir a "coleção de secantes", correspondendo a este integral, por um "agregado" de potências ímpares do seno da latitude divididos pela respetiva potência, a menos de um fator constante γ, tendo obtido uma série logarítmica da forma $\gamma\,\Sigma_{k\geq 0} S^{2k+1}/(2k+1)$, para $S = \operatorname{sen}\varphi$, tal como Barrow, Wallis também não reconheceu na sua fórmula a relação com a tangente logarítmica.

4- Conheceria Halley em 1696 os manuscritos de Harriot? Essa questão é retomada num importante trabalho [10] de 1696 do matemático e astrónomo Edmond Halley (1656–1742). Reconhecendo a prioridade da demonstração de Gregory, ao pretender dar uma demonstração fácil da "*analogia das tangentes logarítmicas com a linha meridiana ou soma de secantes*", utiliza de um modo direto a nova "*regra de Newton*" do recém inventado Cálculo Infinitesimal. Obteve o incremento rigoroso das latitudes da carta de marear e provou que a projeção estereográfica da loxodrómia é a espiral logarítmica, concluindo que "*a soma total de todas as secantes infinitas sobre o arco* φ" é a "*tangente logarítmica, na forma neperiana, para o arco* $45° + \frac{1}{2}\varphi$", a qual obtém na forma de uma série em radianos, [10]

$$\int_0^{\varphi} \sec\phi \, d\phi = \varphi + \frac{1}{6}\varphi^3 + \frac{1}{24}\varphi^5 + \frac{61}{5040}\varphi^7 + \frac{277}{72576}\varphi^9 + \&c.$$

Como Cajori observou [7], Halley determinou ainda a diferença das longitudes entre duas latitudes φ_1 e φ_2 sobre uma loxodrómia também sob a

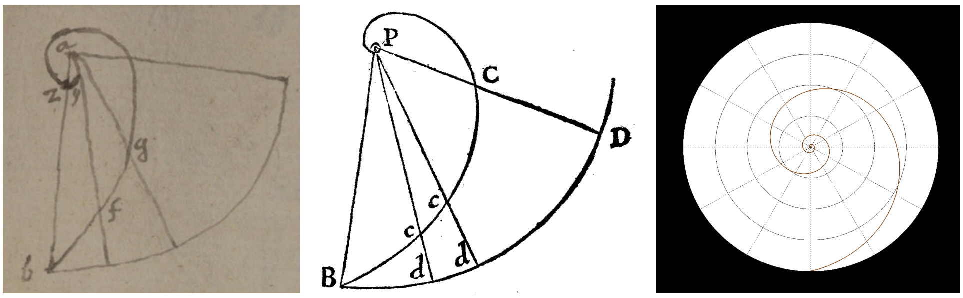


Figura 2a. Manuscrito de Harriot—De longitudine Helicis 45° (Leconfield MS 240, f 221). **2b.** A espiral logarítmica ("*proportional spiral*") de Halley de 1696. **2c.** A projeção estereográfica da loxodrómia com azimute de 76°, obtida com o programa interativo LOXO `http://formas-formulas.fc.ul.pt/interactive/loxo/pt/POINSOT2_pt.html`

forma de uma série numérica, o que corresponde na notação moderna ao integral definido entre φ_1 e φ_2, podendo ser ambos os valores diferentes de zero, algo que é inédito até 1696. Halley neste pequeno tratado discute não só vários aspetos teóricos como os numéricos dos cálculos das loxodrómias e, com isso, considera mesmo completa a *"doutrina destes rumos espiraliformes que são de grande importância na Arte da Navegação"*.

No entanto, os manuscritos de Thomas Harriot (1560–1621), matemático inglês contemporâneo de Wright e Neper, revelaram que os seus cálculos numéricos completos de 1614 das "partes meridionais", ou latitudes crescentes das linhas de rumo, se basearam na conformidade da projeção estereográfica da loxodrómia, na propriedade equiangular da espiral logarítmica e em fórmulas de interpolação, que conheceria, em parte, desde 1594 quando obteve uma resolução aproximada do problema de Nunes-Mercator para a carta de marear [11]. Apesar de não haver referências aos manuscritos de Harriot na segunda metade do século XVII, esses resultados foram conhecidos por alguns matemáticos ingleses, nomeadamente Collins e Newton, antes da publicação de Halley, cuja figura da loxodrómia é extraordinariamente semelhante à de um dos manuscritos (Figuras 2a. e 2b.).

As linhas de rumo, através da sua história e das suas profundas relações com a cartografia e navegação, constituem um importante exemplo de um problema prático, que foi instrumental na história da expansão europeia e foi relevante na evolução do cálculo infinitesimal.

Bibliografia

[1] José Francisco Rodrigues, "A Matemática e o Planeta Terra", *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, 76 (dezembro 2018), 1–32.

[2] Pedro Nunes, *Tratado da Sphera*, Lisboa, 1537, http://purl.pt/14445. Reedição, com comentários, pela Academia de Ciências de Lisboa—Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2002.

[3] Pedro Nunes, *Petri Nonni Salaciensis Opera*, Basileae, 1566, http://purl.pt/14447. Reedição e tradução, com comentários, pela Academia de Ciências de Lisboa—Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2008 e 2011.

[4] David Waters, "Portuguese nautical science and the origins of the scientific revolution", *Boletim da Academia Internacional da Cultura Portuguesa*, 2 (1966), 165-191.

[5] Bruno Almeida & Henrique Leitão, *Pedro Nunes (1502–1578). Mathematics, cosmography and nautical Science in the 16th century* (2009). http://pedronunes.fc.ul.pt, accesso de 8 novembro 2020.

[6] Joaquim Gaspar & Henrique Leitão, "How Mercator Did It in 1569: From Tables of Rhumbs to Cartographic Projection", *EMS Newsletter*, 99 (March 2016), 44–49.

[7] Florian Cajori, "On an Integration ante-dating the Integral Calculus", *Bibliotheca Mathematica*, 14 (1915), 312–319.

[8] Raymond D'Hollander, "La théorie de la loxodromie de Pedro Nunes", Proceedings of *International Conference Petri Nonii Salaciensis Opera*, Dep. Matemática, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, 2003, Eds. L. T. Campos, H. Leitão, J. F. Queiró, 63–111.

[9] V. Frederick Rickey & Philip M. Tuchinsky, "An Application of Geography to Mathematics: History of the Integral of the Secant", *Mathematics Magazine*, Vol. 53, No. 3 (1980), 162–166.

[10] Edmond Halley, "An easie demonstration of the analogy of the logarithmick tangents to the meridian line or sum of secants: with various methods for computing the same to the utmost exactness", *Philos. Trans., Roy. Soc. London*, 19 (1696), 202–214.

[11] Jon V. Pepper, "Harriot's calculation of the meridional parts as logarithmic tangents", *Arch. Hist. Exact Sci.*, 4 (1968), 359–413.

Zacuto e os Guias Náuticos portugueses do princípio do século XVI: os primeiros passos da navegação astronómica em Portugal

Jorge Semedo de Matos
Escola Naval; CINAV; CH-UL

Abraham Zacut, natural de Salamanca, provém de uma família judaica de tradição erudita, dedicada aos estudos religiosos. Não há nenhuma evidência de que tenha cursado a Universidade, nem é provável que ali tenha leccionado astronomia ou astrologia, matérias em que se notabilizou e que vieram a dar-lhe o protagonismo que importa a este estudo.

Sem me alongar muito sobre a sua vida – o espaço é escasso – direi que emigrou para Portugal em 1492, a quando do decreto dos Reis Católicos que expulsava os judeus dos seus domínios, sendo certo que o rei D. Manuel se serviu dos seus serviços como astrólogo. Gaspar Correia diz-nos que prometeu ao soberano a elaboração de um almanaque que permitisse calcular os valores astronómicos necessários à navegação; e, de facto, em 1496 era publicado em Leiria, na oficina de Samuel D'Ortas, o *Almanach Perpetuum*, cujas tabelas estão na base da elaboração das tábuas que constam dos primeiros guias náuticos portugueses.

Os almanaques foram uma tradição que atravessou toda a Idade Média, normalmente para uso em astrologia natural, sendo constituídos por diversas tabelas, com a posição dos astros no cosmos, acompanhadas por uma parte escrita – os cânones – que explicava a forma de as utilizar. Neste caso específico, e na parte que interessava à navegação, o Almanaque de Zacuto dispunha de uma tabela do lugar do sol, para o quadriénio que começava em 1473, acompanhada de uma outra, que permitia corrigir o valor original para cada um dos quadriénios seguintes, de uma forma que o autor entendia como sendo de utilização perpétua.

Para os cálculos do sol, dispõe ainda de uma terceira tabela, com três colunas, onde se faz corresponder o lugar do sol, em cada uma das casas de 30° da Eclíptica, a um valor de declinação respectivo. Valor que cresce de 0° até $23° 33'$, decrescendo depois até zero, numa leitura de frente para trás (até à entrada na casa de balança); e segue-se, de forma semelhante, até completar os 360°.

E os primeiros guias náuticos portugueses serviram-se das três tabelas referidas, para obter os valores da declinação do sol, indispensáveis ao cálculo da latitude do lugar, quando os navios não têm outra referência que não fosse a tomada da altura do sol, na sua passagem meridiana.

Os mais antigos guias náuticos que até nós chegaram, são documentos impressos no princípio do século XVI, com dois modelos que têm pequenas diferenças entre si, conhecidos como o *Guia Náutico de Munique* (mais antigo) e o *Guia Náutico de Évora*. Qualquer deles contém regras elementares de cosmografia (retiradas do *Tratado da Esfera*), regimentos das léguas e das horas nocturnas, regras aplicáveis à navegação, formas de cálculo de festas móveis e, bem entendido, as tábuas de declinação do sol.

Falemos primeiro do *Guia de Évora*, exemplar que pertence à Biblioteca Pública dessa cidade, onde encontramos um conjunto de tábuas de declinação do sol, que começam num ano bissexto. Feitas as contas, conforme explicam os cânones de Zacuto, verificamos que se trata do ano de 1520. Há algumas evidências que o *Guia* foi editado por Valentim Fernandes, numa altura em que este se dedicou à publicação de documentos náuticos, de forma que é muito provável que a edição date de 1518 ou 1519.

O *Guia Náutico de Munique*, contudo, sendo claramente anterior a este, tem uma tábua de declinação do sol apenas para um ano (e não para quatro, como seria normal). Vários autores fizeram muitas tentativas de identificar a que ano se destinava, a meu ver com menor atenção às características da tábua.

A primeira curiosidade é a de que a primeira tabela não corresponde ao mês de Janeiro (como seria de esperar), mas ao mês de Março, quando ocorre o equinócio da Primavera e a declinação do sol atinge o zero. Terminando no mês de Fevereiro, do ano seguinte.

Mas, prosseguindo a observação, verificamos que as sucessivas tabelas transcrevem quase de forma perfeita a tábua auxiliar de cálculo de declinações, do *Almanach Perpetumm*, a que há pouco me referia. Ou seja, a tábua serve-se dos 360 valores, correspondentes a 360 graus inteiros da Eclíptica, fazendo corresponder um a cada dia do percurso do sol. Naturalmente que no final faltavam seis dias (o mês de Fevereiro tem 29 dias), de forma que foram intercalados seis valores de declinação, sem um critério visível, de forma a completar os 366 dias do ano. Estas tábuas não resultam, portanto, de nenhum cálculo, sendo absurdo imaginar um ano raiz. As tábuas servem para qualquer ano (com erros, normalmente, inferiores a ½ grau), desde que se aceite que a declinação máxima do Sol de $23^\circ\,33'$. Valor que dominou a literatura náutica portuguesa até à década de 90 do século XVI.

Recentemente, foi possível identificar sem margem para dúvidas, que o *Guia* foi publicado por Hermão de Campos, alemão que trabalhou com Valentim Fernandes desde 1516 até à morte deste último, em 1519.

Bibliografia

ALBUQUERQUE, Luís, *Os Guias Náuticos de Munique e Évora*, Lisboa, Junta de Investigações do Ultramar, 1965.

ZACUTO, Abraão, *Almanach Perpetuum*, introdução de Luís Albuquerque, Lisboa, Imprensa Nacional – Casa da Moeda, 1986.

Os 500 Anos do Primeiro Tratado de Aritmética Prática Impresso em Portugal

Teresa Costa Clain
Grupo de História da Matemática e Educação Matemática,
CIDMA-Univ. de Aveiro

Comemorou-se recentemente (15 de Novembro de 2019) os 500 anos do *Tratado da Pratica d'Arismetica* de Gaspar Nicolas, também considerado o primeiro tratado de aritmética prática de autor português publicado em Portugal. Da obra original, saída da oficina de Germão Galharde, existe um exemplar na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto que, em 1963, foi publicado em edição fac-similada pela Livraria Civilização do Porto e prefaciada pelo Professor Luís de Albuquerque.

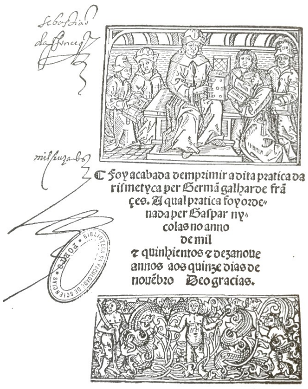


Figura 1: Colofão do *Tratado da Pratica d'Arismetica*

À semelhança de outras obras para o mesmo fim, o tratado apareceu num ponto comercial importante, a cidade de Lisboa, então conhecida pela dinâmica ligada à expansão marítima portuguesa. O conhecimento prático, então transmitido de «boca em boca», e ligado aos «pequenos» negócios, tornara-se insuficiente. Gaspar Nicolas atuou como divulgador e formador do saber matemático ligado a esta nova realidade. Propôs modelos para programar os grandes negócios e para calcular os impostos, associados à intensa atividade comercial, utilizando algoritmos apoiados na vulgarização do cálculo com os números indo-árabes.

Sobre Gaspar Nicolas os dados são escassos. Contudo, pensa-se que viveu entre o último quartel do século XV e o segundo do século XVI. A. A. Marques de Almeida remete-nos para Luís de Albuquerque que admite a possibilidade de Gaspar Nicolas ser de origem judaica (Almeida, 1994, v. I, p. 79). Na nota biográfica presente na edição fac-similada de 1963, Luís de Albuquerque escreve, «Nascido talvez em Guimarães (...) tem o seu nome ligado aos aspectos científicos dos descobrimentos Portugueses, pois atribui-se-lhe parte activa na realização de tábuas náuticas.» (Nicolas, 1963, Nota sobre a obra e o autor de Luís Mendonça de Albuquerque). O que sabemos de Gaspar Nicolas está ligado à obra que nos deixou. No prólogo do *Tratado da Pratica d'Arismetica* o autor refere as suas ligações à cidade de Guimarães onde encontrou, numa dada ocasião, D. Rodrigo, Conde de Tentúgal[1], o mecenas. Nas palavras do próprio autor encontrámos referências ao esclarecimento de dúvidas na Casa da India sobre o cálculo dos impostos o que nos leva a crer no seu papel de formador naquela instituição.

Quanto à estrutura do tratado, não existe qualquer espaço com a função de «índice» mas antes a presença das tabuadas da multiplicação. Seguem-se: os números, «Primeiramẽte te he neçeesario cõhecer as letras e despoys de conheçidas saber numerar cõvẽ asaber cõhecer estas mesmas letras quãto vallẽ» (Nicolas, 1963, f. 1) (as dez «letras» da aritmética, os algarismos de 0 até 9); as cinco operações aritméticas básicas: «numerar, conta de assomar, conta de demenuir, conta de multiplicar e repartir» (Nicolas, 1963, ff. 1f–10f); a regra de três, as regras de companhias e as regras de quarto e vintena. Todas estas regras são necessárias ao mercador. Nos enunciados propostos está bem claro o papel do imposto ligado à prática do quarto e vintena na economia nacional, daí deduzir-se o papel de destaque na obra. Nicolas passa às operações com quebrados e à regra da conta de Flandres, às progressões, deixando para depois a regra de baratas. Parece haver uma vontade de intercalar temas de aritmética mercantil com assuntos matemáticos desligados do ambiente dos negócios. De um modo geral, os assuntos expostos são, na sua maioria, temas que fazem parte de uma tradição em aritmética prática, como as regras de companhias, as baratas, as ligas da prata e do ouro muito ligadas aos modelos para os negócios. Contudo, desviam-se deste objetivo em algumas situações. Assim, observamos a presença de uma Matemática pensada para o comércio, a par com processos desligados do mundo mercantil, tais como os que se encontram associados à resolução de problemas para determinar números. Outras práticas aparecem disfarçadas de temas

[1]O Conde de Tentúgal era D. Rodrigo de Melo (1488–1545) também 1.º Marquês de Ferreira. Era filho de D. Álvaro (filho dos segundos Duques de Bragança) e de sua mulher, D. Filipa de Melo. Pressume-se que nasceu em Castela durante o exílio do seu pai. Foi agraciado com o título de Conde de Tentúgal por D. Manuel em 1504 (Almeida, 1994, v. I, p. 77).

mercantis mas visam trabalhar conceitos matemáticos. Podemos observar os exemplos dos mercadores que investem nas «companhias» mas desconhecem o que investiram ou os tempos nas companhias, que nos conduzem a sistemas lineares cuja resolução nos remete para conceitos algébricos que certamente o mercador comum não dominava.

Para ilustrar esta vontade de tratar de matemática fora do mundo mercantil, veja-se o capítulo «Numeros» (Nicolas, 1963, ff. 39–56), onde aparece um conjunto de enunciados que, embora considerados clássicos, demonstram uma vontade em conhecer e transmitir conteúdos emancipados do real e associados a um esboço da «teoria dos números». No universo dos problemas apresentados podem incluir-se alguns temas sobre números quadrados:

> Da me huũ numero que lhe poendo .10. fique quadrado e tirãdo .10. fique quadrado. Este he o modo por que diz .10. multiplica .10. em sy e fazem .100. ajũta sempre .4. por regra geral e fazem .104. ora sempre parte por .4. por regra geral vem .26. (...) (Nicolas, 1963, f. 43 f).

A «regra geral referida» não se encontra enunciada anteriormente e a resposta apresentada não carece de qualquer justificação por parte do autor. Se passarmos à linguagem atual podemos ter as equações do problema

$$\begin{cases} x + 10 = a^2 & (1) \\ x - 10 = b^2 & (2) \end{cases}$$

onde x representa o número a determinar, a^2 e b^2 são os números quadrados referidos. Se fizermos $(1) + (2)$ temos $2x = a^2 + b^2$ e fazendo $(1) - (2)$ temos $20 = a^2 - b^2$. Sabendo que $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, procuram-se dois divisores de 20. A solução dada considera $a + b = 10$ e $a - b = 2$. Daqui resulta que $a = 6$ e $b = 4$. Ou seja, $2x = 6^2 + 4^2 \Leftrightarrow x = 26$. Na regra geral referida por Nicolas temos $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 10^2 + 2^2 = 2\left(a^2 + b^2\right) = 2\,(2x)$ então $4x = 104 \Leftrightarrow x = 26$.

Os enunciados de problemas com números do fólio 42 v incluem números e raízes, tais como este exemplo: «Dame huũ numero que partido o seu terço por sua rayz venham .19.» (Nicolas, 1963, f. 42 v) e as situações de impossibilidade, sempre com o suporte da regra de três: «Buscame hũ numero que lhe tirando dous terços e o meo fiquem .10.» (Nicolas, 1963, f. 42 v). Para justificar que a «conta é falsa» o autor afirma: «... tu bem ves que ho meo e dous terços que passa de cousa enteira e não podes tirar este meo e dous terços de nenhuũ numero que fique alguũa cousa minguar» (Nicolas, 1963, f. 42 v). Para reforçar as suas afirmações, usa o número 6, assim determina um meio e dois terços de 6 que somados fazem 7. O «minguar», neste caso, quer dizer que $6 - 7 = -1$.

O tratado inclui ainda um conjunto de problemas que abordam as regras enunciadas em capítulos anteriores, numa secção denominada «Números e Perguntas». Trata-se, não só, de um conjunto de enunciados para consolidação das regras mas também um meio de abordar outros temas. Um assunto singular na obra é o tema «Geometria» e nas últimas páginas aparecem os problemas da liga da prata.

Sobre as obras matemáticas que teriam inspirado Gaspar Nicolas a compor o seu tratado, o próprio faz múltiplas referências a Luca Pacioli: «Frey Lucas de Sam Francisco que foi nesta arte grande mestre que compilou e compôs huũa obra d'arismetica e geometria» (Nicolas, 1963, f. 51 f).

Podemos considerar que *Tratado da Pratica d'Arismetica* teve uma grande divulgação dado que, sem contar com a edição de 1519, foi impresso nos séculos XVI, XVII e XVIII (apenas uma edição), num total de nove vezes (Nicolas 1963, Nota sobre a obra e sobre o autor de Luís de Albuquerque), o que demonstra reconhecimento, agrado pela obra e utilidade da mesma na formação, assim o afirma Gomes Teixeira (Teixeira, 1934, p. 98) «um excelente manual de Aritmética prática, muito claro e simples na exposição das doutrinas, sem teorias, que certamente prestou bons serviços no século XVI».

Bibliografia

ALMEIDA, António A. M.. 1994. *Aritmética como descrição do real (1519–1679).* Imprensa Nacional, Casa da Moeda, 2 vols. Lisboa.

CLAIN, Teresa C. 2018. As regras de quarto e vintena e da conta de Flandres no comércio português das especiarias (século XVI). *Revista Brasileira de História da Matemática*, Vol. 17 n.º 34, págs. 83–97.

CLAIN, Teresa C. 2019. Gaspar Nicolas e os 500 anos do Tratado da Pratica d'Arismetica. *Revista Brasileira de História da Matemática*, Vol. 19 n.º 38, págs. 105-137.

NICOLAS, Gaspar. 1963. *Tratado da Pratica d'Arismetica.* Edição fac--similada da edição de 1519. Livraria Civilização. Porto.

TEIXEIRA, Francisco G. 1934. *História das Matemáticas em Portugal.* Academia das Ciências de Lisboa. Lisboa.

O canhão que bombardeou Paris em 1918

José Paulo Ribeiro Berger
Gabinete de Estudos Arqueológicos da Engenharia Militar, Academia Militar, Conselho Científico da Comissão Portuguesa de História Militar

Durante a Grande Guerra o desenvolvimento da ciência e da tecnologia deram saltos gigantescos destacando-se em especial a grande evolução da artilharia, ciência bélica em que a matemática tem um papel predominante, não só na construção e aplicação dos materiais de artilharia, mas também no cálculo das trajectórias dos projécteis, elaboração das tabelas de tiro e também na direcção, regulação e correcção do próprio tiro.

Durante este conflito, quando o impasse da guerra de trincheiras se impôs, o uso da artilharia destacou-se uma vez que os seus alcances deixaram de ser os 3 a 4 quilómetros até aí praticados para o tiro à vista, para passarem a ser de uma a três dezenas de quilómetros e mesmo cerca de 120 como foi conseguido pelos canhões que os alemães baptizaram como «*Kaiser Wilhelm Geschütz*», com que bombardearam Paris, na Primavera de 1918, também por isso conhecidos como «*Paris-Geschütz*», sendo designados pelos parisienses, inapropriadamente, por «*Grosse Bertha*».

Resumidamente, o problema do tiro de artilharia pode ser abordado simplesmente em duas fases: a da balística interna (estudo dos fenómenos que ocorrem dentro do tubo do canhão) e a da balística externa (fenómenos relacionados com o trajecto do projéctil desde que sai da boca do canhão, deixando de estar sujeito aos gases propulsores, até que chega ao alvo).

O estudo da balística interna começou com o uso da pólvora negra, ainda na Idade Média. No período da Grande Guerra olhava-se já de forma muito diferente para as teorias da combustão da pólvora tendo em conta as relações entre a velocidade de combustão, a temperatura, a forma dos grãos e a erosão da alma do canhão.

A evolução da balística externa passou por duas etapas claramente diferenciadas. Antes de Newton, com utilização de métodos geométricos, em que se destacam: Galileu Galilei ao deduzir a trajectória parabólica de um projéctil no vazio e Torricelli ao formular a equação do alcance de um projéctil. Depois, Newton fundamentou as bases da dinâmica para os corpos rígidos e para os fluidos que também são aplicáveis aos fenómenos e estudos da balística. Após Newton, utilizando métodos analíticos, Euler estudou a resistência aerodinâmica das balas dos canhões e, nos finais do século XIX, desenvolveram-se os métodos para determinar a resistência aerodinâmica, começaram a usar-se projécteis com cinta de travamento em tubos de almas estriadas, que permitiam melhorar a obturação da câmara, conseguindo velocidades iniciais mais altas e com mais consistência, além de estabilizarem o projéctil durante o voo, factores que iriam permitir melhores alcances. Nas vésperas da Grande Guerra começaram, então, a desenvolver-se bases matemáticas que descreviam o comportamento do projéctil em voo, permitindo elaborar tábuas de tiro ou estudar a resistência aerodinâmica em túneis de vento, bem como analisar trajectórias balísticas estratosféricas permitindo construir algoritmos de simulação que por sua facilitava a predicção do tiro sem recorrer aos avultados custos de utilização das carreiras de tiro.

O modelo de Galileu considerando a trajectória parabólica no vazio pressupunha como hipóteses que a Terra era plana e não girava, não havia atmosfera e o projéctil era uma massa pontual. Mas, para os enormes alcances dos canhões que bombardearam Paris tais pressupostos não eram aplicáveis. Para além da velocidade inicial e do ângulo de tiro havia que considerar uma série de factores que afectavam a trajectória; uns dependentes do próprio projéctil, como a sua massa, o calibre, a geometria e a rotação a que era submetido; outros, contudo, inerentes ao meio em que deslocava, como a densidade, temperatura, pressão e viscosidade; a influência das velocidades e direcções do vento nas várias altitudes do percurso; tudo conjugado com a estabilização do voo, a resistência aerodinâmica, o efeito giroscópico, etc., faziam com que a trajectória real no ar não correspondesse à da parábola teórica do vazio. Esta, no ramo ascendente, em que a resistência aerodinâmica actuava em conjunto com a gravidade, levava a que a componente vertical da velocidade inicial se anulasse e a componente horizontal diminuísse mais rapidamente, enquanto no tramo descendente, em que a resistência do ar se opunha à da gravidade provocava que o tempo de queda fosse maior do que na subida, originando como consequências que: a trajectória não era simétrica (estando o vértice mais próximo do ponto de queda), a altura do vértice era menor do que a correspondente à trajectória no vazio, o angulo de queda era maior que o ângulo de tiro, a velocidade no ponto de queda menor do que a velocidade inicial, e o alcance máximo não era obtido pela utilização de um ângulo de tiro de 45°.

Após aturados estudos de algoritmos de simulação, o professor von Eberhardt e os engenheiros e matemáticos das indústrias *Krupp*, escolhendo a direcção de tiro adequada (para compensar o desvio provocado pela rotação da Terra e o efeito de Coriolis) e considerando que o projéctil, na atmosfera, acima dos 19 quilómetros de altitude, enfrentaria condições da resistência do ar muito perto do zero e que, assim, o máximo alcance poderia ser conseguido com um ângulo de tiro superior a 50° que, em conjunto com a muito alta velocidade inicial imprimida ao projéctil, o iria fazer atingir aquela altitude entrando nela com uma inclinação de cerca de 45° (ângulo de tiro correspondente ao máximo alcance em vazio) percorrendo então estas altas camadas da atmosfera num regime muito próximo das condições do vazio, conseguindo assim, pela quase ausência de resistência do ar, muito maior alcance, até descer de novo para camadas inferiores, continuando depois o seu trajecto num regime condicionado pelas componentes da resistência aerodinâmica do ar, até atingir o alvo a cerca de 120 quilómetros de distância.

A interacção entre as teorias analíticas, a resolução de equações diferenciais, a integração numérica e gráfica, a pesquisa empírica resultante da experimentação e medição, todas combinadas, permitiram aos alemães, em Março de 1918, bombardear Paris a cerca de 120 quilómetros de distância, felizmente sem grande efeito prático, mas que, cientificamente, juntando matemáticos, engenheiros e artilheiros concretizaram a procura de uma lei que pudesse traduzir os efeitos matemáticos da resistência do ar e permitisse a obtenção de uma solução para a utilização das equações diferenciais aplicáveis à balística, sendo, neste caso, o embrião para a utilização em aplicações posteriores como a dos foguetes V1 e V2, na Segunda Guerra Mundial, e dos actuais mísseis balísticos intercontinentais.

Bibliografia

(obras que podem ser consultadas nas Bibliotecas da Defesa Nacional)

1 - *Les méthodes d'integration de Poincaré et le problème générale de la balistique extérieure : leçons faites à la Sorbonne pendant l'année scolaire 1924–1925* / Kyrille Popoff ; pref. de Émile Picard. Paris: Imprimerie Nationale : Gauthier-Villars, 1925.

2 - *Corso teorico-pratico de balistica esterna del Colonnello Bianchi* edizione 1922: aggiunte e varianti / compil Ettore Cavalli e Enrico Fianchino. Torino: Academia Militare d'Artiglieria e Genio, 1926.

3 - *Balística interna*: lições professadas na 6.ª cadeira da extinta Escola do Exército, no ano lectivo de 1901–1902 / José Nunes Gonçalves. Lisboa: Imprensa Nacional de Lisboa, 1929.

4 - *Balística externa*: lições professadas na 6.ª cadeira da extinta Escola do Exército, no ano lectivo de 1901–1902 / José Nunes Gonçalves. Lisboa: Imprensa Nacional de Lisboa, 1932.

The Jesuits' "Drive to the East" (Lithuania-Poland-White Russia-Ukraine-Transylvania) and the Role of their Schools in Eastern Europe's Scientific History

Ugo Baldini
Universidade de Pádua

1 The historical background

The so-called 'globalization' of Western science, from the geographical discoveries to the end of the *ancien régime*, is usually meant as a transfer to other continents. However:
1) Properly, 'Western science' (especially mathematics) was that of Central-Western Europe.
2) It reached Eastern Europe *at the same time* as other continents, also with a revolutionary effect.
3) Due to rooted historical factors, that area had not been involved in the cultural synthesis of the late Middle Ages; it lacked a structured school and university system, not to say a proper teaching tradition in mathematics and the related disciplines.
4) The diffusion of a western style school system with some scientific contents, from about 1565/70, was *mainly* due to a single agent, the Society of Jesus.
5) The Jesuits' motives being not primarily scientific, this is a notable example of a carrier transporting goods different from those it was mainly destined to, or even considered contrary to its purposes.
6) Much early modern mathematical production in the area – whatever its level – was due to Jesuits.
7) The role of a second teaching agent, the Piarists (Escolapios), was minor because: they entered the region half a century later; for many decades their schools were only of primary and secondary levels, and then their few high schools adopted the Ignatians' programs and methods also in mathematics, so providing a partial 'Jesuit' instruction; excepting only a part of Transylvania, they did not advance much. Thus, individual cases apart, their contribution was more in the social history of mathematics instruction than in high learning or research.
8) A third agent, the Protestant schools, in some places existing before the Jesuits' arrival, were soon outnumbered and often surpassed in quality;

to face the Jesuits' challenge, many of them adopted their programs in philosophy and mathematics.

For long, the western – and more clearly, for political reasons, the eastern European historiography – ignored or belittled this epochal fact. Recently local historians have focused on it, but the initial neglect and the dispersal of the documents have kept the progress in this area relatively slow *("…. to advocate for the factual and the true …. is no easy task, as the relevant evidence was for many years ... obscured by many …., so biased against Jesuits that they refused to acknowledge even their most obvious …. successes*": Stasiewicz-Jasiukowa 2004, Introduction). Also due to language barriers, the results are not yet found fully in general histories of mathematics and science.

Until late 16th century, no stable higher education institutes existed in the Baltic area east of a 'border' connecting Uppsala, Königsberg and Kraków. In the Slovakian-Hungarian territories, it was even more to the west (Bratislava to Pécs). In the Balkans and in the orthodox zone (Greece to Moldavia, Ukraine and Belarus, not to say Russia), no university or high school properly existed [Map I]. The only schools – apart from the monastic, usually not attended by lay persons – were those of the 'brotherhoods' affiliated with individual churches, instructing the youth of the community. Religion apart, they just provided a primary or lower secondary instruction, including only 'everyday' mathematics. No stable orthodox high school existed before the Kiev academy (1632) and that of Moscow (1687), both of which were not universities. Most of the 16th–17th centuries best known intellectuals from eastern Baltic to Greece, literature or religion apart, studied in German or Italian universities (Copernicus, Hevelius and Comenius are just some examples).

Even in the Balkans, the Ottoman rule was not the only – and perhaps, on a great historical scale, not the main – cause of this state of things. A key historical-geographic factor was a west-east division in the essentials of the economic-political system. Eastern society, not involved in the great currents of the Mediterranean trade, remained more strictly feudal and of large land tenures; so the thrust towards rationalizing procedures, and hence specialized technical-scientific learning, was smaller. But another factor, religious-cultural, was also decisive. A little more east of that division there was that between the Western and the Orthodox churches. The Byzantine origin of the latter permeated the entire East Slavic area with characteristic knowledge contents and conventions. This is well known (Toynbee considered Orthodoxy a 'civilization' different from the western),

Map I
(W. R. Shepherd, *Historical Atlas*, New York 1911, p. 100)

but little attention is paid to its bearing in the field of science. Byzantine instruction did not evolve really from the classic *trivium-quadrivium*. More than directly, mathematics was dealt with through the works of such philosophers-theologians as Proclus. After the fall of the Empire, the regions influenced by it conserved this approach. There was no emergence of a (partially) lay higher education agent as the West's universities, which from mid-fourteenth century provided mathematics with a stable placement in the specialized curriculum of arts and medicine. Due to their prevailing religious finality, higher studies were not organized in a disciplinary structure but centered on dogmatic topics or the works of the Church fathers; thus, scientific matters were mostly considered in the measure they were some-how linked to those topics, or hinted at in some patristic text; therefore their topics remained incidental and ancillary. Four differentiating aspects are worth mentioning:

i. The use of the Cyrillic alphabet; The Cyrillic alphabetic numerals (used in the Balkans until late 16th century, in Russia until the first decades of the 18th century) are unfitting for a purely positional algorithm. Numbers were written *usually* from a high value position to a low value one but, for instance, those from 11 to 19 were not only *named* with the units before the tens (as in the German languages: 'eighteen', 'achtzehn'), but also *written* so (M. Dejić, "How the old Slavs (Serbs) wrote numbers", *Jr. of the British Society for the History of Mathematics*, 2013, 1, 2–17);

ii. The lack of a teaching of western languages and of Latin, the West's academic Esperanto;

iii. The lack of a systematic presentation of the whole of the natural world, and of the disciplines regarding its parts or aspects, hampered the possibility of connecting single problems, or doctrines, in a general methodical and conceptual structure, such as the West's scholastic cosmological synthesis. Although largely aprioristic and inducing to conformity, that synthesis was a model of integrated knowledge, and evidenced the areas in which research and systematization were needed. It had absorbed originally separated topics (such as medicine), under a general requirement of adopting an unique set of ontological and intellectual criteria: one that, independently from the inadequacy of that adopted in Scholasticism, was (and is) basic for any scientific enterprise;

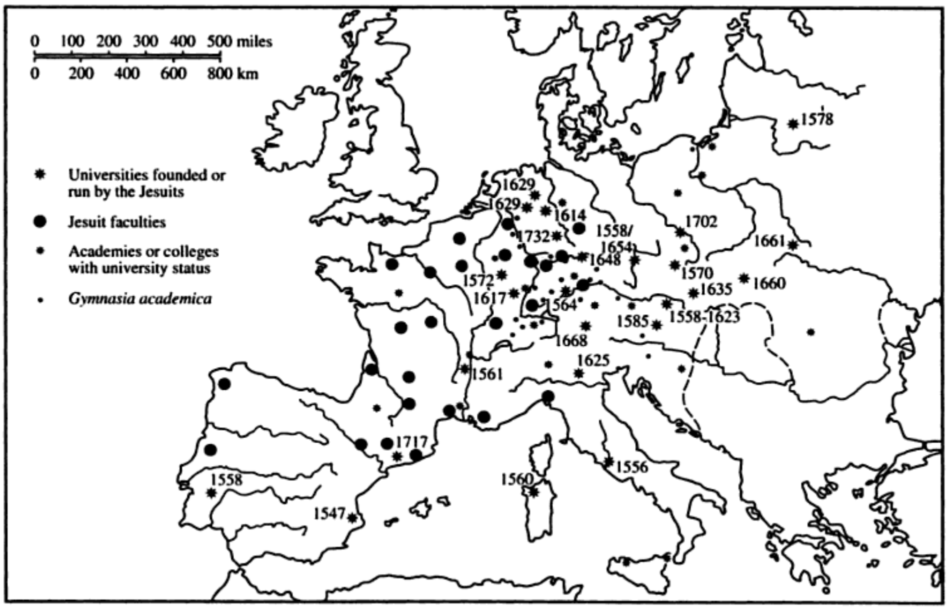
iv. At the same time, the lack of refined observational and mathematical approaches did not enable Orthodox culture to profit from the absence of the constraints and inadequacies typical of that model.

2 The Jesuit advance and its cultural-scientific effects

From 1570, in an effort to reverse the Protestant expansion in the Baltic area, and to support the pro-Rome Uniate Church in the Orthodox realm, the Jesuits founded a growing number of schools. In parts of Eastern Europe the Catholics were outnumbered by other confessions, but most of the region, up to nearby the Black Sea, was ruled by the catholic Kings of Poland, whose authority overlapped a fragmented religious geography [Map II]. Thanks

Map II
(*História Universal*, Vol. VI. Europa - Séculos XVI–XVIII [ed. Michel Vovelle], Alfa 1985, p. 203)

to them, in about half a century the Society's schools extended from Riga to Kolozsvár/Cluj (Romania), major intermediate points being Vilnius and Lwów [Map III]; thus, western instruction advanced more than 300 km to the east. Each Jesuit school (22 in 1615, and 66 at mid-18th century) had about 300–400 students per year; moreover,their reputation attracted protestants and orthodoxes (even from Russia), and to cope with their success orthodox and protestant schools adopted their programs and also textbooks. A growing number of students learnt Latin and became familiar with the western alphabet and numerals, but also with the western system of the disciplines. Around 1650, ca. ten Jesuit schools (and some of the non-Jesuit) provided the three years philosophy curriculum, in which mathematics was taught according to the programs of the 1599 *Ratio studiorum*: Euclid's *Elements*, especially books I–VI; arithmetic, with some elementary algebra; basic spherical astronomy (sometimes with some trigonometry);



10 The Jesuits' university offensive

Map III
(H. De Ridder-Symoens (ed.), *A History of the Universities in Europe.* Vol. II. Universities in Early Modern Europe (1500–1800), Cambridge 1996, p. 104)

general descriptive geography; applications (perspective, statics, gnomonics; sometimes also musical theory and calendar theory). In all the Order's schools, conformity to the *Ratio* meant standardized textbooks. Lessons were dictated, but – whatever their level – the contents transmitted came from a little number of works: until about 1620 – as in Europe, America, Asia and Africa – mainly those of C. Clavius (his commentaries to Euclid and Sacrobosco are probably the most widespread mathematical works in early modern history). Then the eclipse of pure geocentrism and the adoption of Brahe's system implied the use of other works, but in pure mathematics Clavius' texts were substituted only after 1640, mainly by those of A. Tacquet.

3 Early research and publishing

Due to the lack of local teachers, the first Jesuit teachers of mathematics came from Germany and from Clavius' school in Rome. They usually stayed for the time necessary to prepare local substitutes, so published nothing in the field. Their successors until 1600–1620 were not supported by extended public and adequate libraries; moreover, most of them had been trained on a little more than the contents of the teaching programs. Therefore, for the first fifty years of the schools' history, mathematical production was mainly limited to manuscripts of lessons. After 1600 new circumstances took shape. A few notable foreign teachers, Jesuit and not, provided a stimulus: around 1610 A. van Roomen taught in a lay school at Zamość (southeastern Poland), from 1613 to 1617. Ch. Malapert taught in Kalisz (central Poland), and from 1621 to 1650 C. Scheiner taught in spells in Nysa (Silesia); some post-curricular, advanced courses in mathematics began to be taught to future teachers. Moreover, promising students were often sent to western colleges (especially to Rome) to specialize in theology, and some mathematically gifted benefited from this experience: notable cases are Alexius Sylvius (1593–ca. 1653), Marcin Śmiglecki (1564–1618), Adam A. Kochański (1631–1700, later a correspondant of Hevelius and Leibniz and a royal mathematician under Jan III Sobieski). Stanisław Solski (1622–1701) was formed locally, in Kalisz, but possibly by a Malapert former pupil.

Most pre-1700 mathematics works by Polish, Lithuanian, Belarusian and Ukrainian Jesuits were didactical, or dealt with civil and military architecture, engineering, gnomonics, astronomical tables, and other. The scarcity of lay mathematicians in the region, the Society's support of the rulers and of the catholic aristocracy, and the continuous wars from early 17th century to the mid-18th involved Jesuits in politics, military affairs, and even as technicians in the Commonwealth's army, including artillery. Some advanced research was however done (Kochański found a notable approximation for π, mastered leibnitian calculus, and had some original views in mechanics). Their study is still in a preliminary stage, and interesting findings are possible.

The outlines drawn so far provide us with a methodological lesson. From ca. 1570 to mid 18th century, at the time when western mathematics reached Far Eastern Europe as a part of Jesuit culture, in the West that culture began collapsing. That collapse is often attributed to the impact of mathematical-quantitative reasoning, seen as something radically opposite to that culture, both conceptually and historically. What has been said shows perhaps that conceptual oppositions should not be simply taken as historical.

Some bibliography

(studies on Poland usually refer to the whole Polish-Lithuanian kingdom).

WEB page "Jesuit science network" (more than fifty Jesuit 'scientists' in pre-1700 East Europe).

J. A. Rackauskas, "Education in Lithuania prior to the dissolution of the Jesuit Order (1773)", *Lithuanian Quarterly. Jr. of Arts and Sciences*, 22, 1976, 1, 5–41.

K. A. F. Fischer, "Die Jesuiten Mathematiker des Nordostdeutschen Kulturgebietes", *Archives int. d'histoire des sciences*, 34, 1984, 124–162.

R. Darowski, *Studies in the philosophy of the Jesuits in Poland from 16th to the 18th centuries*, Kraków 1999.

Lisiak B. (ed.), *Jezuici polscy a nauki cisle od XVI do XIX wieku. Słownik bio-bibliograficzny* ("The Polish Jesuits and Science from the 16th through 19th centuries: a bio-bibliographical Dictionary"), Kraków 2000.

I. Stasiewicz-Jasiukowa, *The Contribution of the Polish Jesuits to the Development of Science and Culture in the Polish-Lithuanian Commonwealth and during the Partitions*, Kraków 2004.

L. Grzebień SJ (ed.), *Podstawowa bibliografia do dziejów Towarzystwa Jezusowego w Polsce* ("Basic bibliography of the history of Society of Jesus in Poland"), Kraków 2009.

A. Mariani, "L'insegnamento delle scienze nelle scuole dei Gesuiti polacchi. Fra popolarizzazione e applicazioni pratiche (1740–1773)", *History of Education and Children's Literature*, 7, 2012, 1, 319–339.

Id., *I gesuiti e la nobiltà polacco-lituana nel tardo periodo sassone (1724–1763)*, Poznań 2014.

M. Kosman, A. Mariani, "Jesuits in the Early-Modern Polish-Lithuanian State", *Archivum Historicum Soc. Iesu*, 86, 2017, 1, 145–208.

J. Niedzwiedz, “Jesuit Education in the Polish-Lithuanian Commonwealth”, *Jr. of Jesuit Studies*, 5, 2018, 3, 441–455.

A. Karp, “Mathematics Education in Russia”, in A. Karp, G. Schubring (eds.), *Handbook on the History of Mathematics Education*, New York 2014, 303–322.

B. R. Vogeli, A. Karp (eds.), *Russian Mathematics Education: History and World Significance*, Singapore 2010.

K. Hall, D. Bayuk, “Science and Russian Orthodox Scholarship”, *Isis*, 107, 2016, 3, 273–8.

J. Šimončič, A. Hološová, eds., *The History of Trnava University (1635–1777, 1992–2012)*, Trnava 2014 (firstly a Jesuit college, with perhaps the first observatory in the region).

P. Shore, *Jesuits and the Politics of Religious Pluralism in Eighteenth-Century Transylvania*, Aldershot 2007.

I.-A. Pop, *Cultural Diffusion and Religious Reformation in Sixteenth-Century Transylvania, (. . .)*, Lewiston 2014.

E Nicolaidis, *Science and Eastern Orthodoxy. From the Greek Fathers to the Age of Globalization*, Baltimore 2011.

Id. (and others), “Science and Orthodox Christianity: An Overview”, *Isis*, 107, 2016, 3, 542–66.

Borri e Galileu: Observações Astronómicas em Coimbra

Carlota Simões
Universidade de Coimbra
Departamento de Matemática da FCTUC
Centro de Física da UC

Pedro J. Enrech Casaleiro
Universidade de Coimbra
Observatório Geofísico e Astronómico da UC
CITEUC - Centro de Investigação da Terra e do Espaço da UC

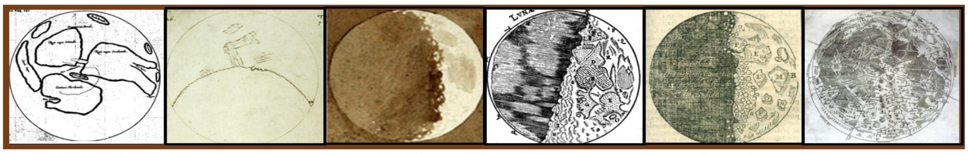
De Galileu a Borri

Galileu Galilei (1564–1642) terá conhecido o telescópio em Julho de 1609. Com este instrumento iniciou uma série de observações do céu que publicaria no seu livro *Sidereus Nuncius* (1610). A observação da Lua revelou a existência de montes e vales na sua superfície, ilustrados nas gravuras que ali se encontram reproduzidas. Mas não eram as primeiras ilustrações de sempre do relevo da Lua: talvez a de William Gilbert (1544–1603), a partir de observações a olho nu, tenha sido a primeira (certamente antes de 1603) mas só foi publicada em 1651. Também o inglês Thomas Harriot (1560–1621) produziu imagens da Lua com a ajuda de um aparelho a que chamou *dutch spyglass*; a primeira data de 3 de Agosto de 1609, uns meses antes das observações da Lua por Galileu (Novembro de 1609), mas como as gravuras de Harriot não foram publicadas durante a sua vida, é Galileu o autor das primeiras gravuras impressas da Lua a partir de observações com telescópio.

Mas também aos padres jesuítas chegou a notícia da existência do telescópio, e também estes começaram a fazer observações astronómicas, entre finais de 1609 e início de 1610. Por via da Companhia de Jesus, as novidades de Galileu chegaram rapidamente a Portugal. Em 1615, Giovanni Paolo Lembo começou a leccionar no Colégio de Santo Antão em Lisboa. Pelas notas do seu curso ficamos a saber que por essa altura se construíam telescópios e se faziam observações astronómicas em Lisboa [4]. Alguns anos mais tarde, Cristovão Borri (1583–1632) encontrava-se em Coimbra e ali fez algumas observações astronómicas. Na noite de 18 de Julho de 1627, Borri observou a Lua e fez a gravura que publicou em *Collecta Astronomica* (1631) [1]. A sua gravura da Lua é muito provavelmente o mais antigo documento gráfico publicado de uma observação astronómica feita em Portugal.

Suplemento do Boletim da SPM 79, Dezembro 2021, pp. 139–141

Entre as gravuras da Lua publicadas por Galileu e Borri ainda encontramos a de Christoph Scheiner (1573/1575–1650), também jesuíta, publicada em *Disquisitiones Mathematicae* (1614). Durante todo o Séc. XVII a Lua continuou a ser escrutinada e as suas irregularidades foram recebendo nomes de pessoas ilustres. Os nomes que chegaram aos nossos dias são em grande parte os da cartografia lunar do jesuíta Giovanni Baptista Riccioli (1598–1671), publicada em *Almagestum Novum* (1651).



Gilbert (antes de 1603) **Harriot (Agosto 1609)** **Galileu (Nov. 1609)** **Scheiner (antes de 1613)** **Borri (1627)** **Ricciolli (antes de 1651)**

Propostas expositivas – Visto de Coimbra e Galileu--Borri

Visto de Coimbra (Museu da Ciência da UC) é uma exposição de memória de lugar que aborda o tema das observações astronómicas em Coimbra [2]. A gravura da Lua de Borri é a imagem de marca da exposição que começa por exibir uma réplica da luneta de Galileu junto às ilustrações da Lua publicadas em *Sidereus Nuncius*. A primeira parte da exposição é dedicada à história dos Colégios Jesuítas de Coimbra (Colégio das Artes e Colégio de Jesus), com destaque para o curso filosófico Conimbricense e para três apontamentos sobre a prática da cultura, da ciência e do culto naqueles colégios. A vitrina sobre ciência está organizada em três núcleos:
- Cristóvão Clavius, antigo estudante do Colégio das Artes e divulgador da obra de Pedro Nunes; em exposição o *De Crepusculis*, um astrolábio e uma rosa-dos-ventos, ambos do séc. XVII.
- O telescópio; em exposição uma luneta do séc. XVIII e uma lente de telescópio que se crê estar relacionada com a Companhia de Jesus e destaque para a obra *Collecta Astronomica* de Borri onde se encontra a ilustração da Lua.
- Os azulejos didáticos jesuítas; em exposição um azulejo de astronomia e um de matemática junto a um facsimile de *Os Elementos* de Euclides na versão de Andrea Tacquet (1729).

Galileu e Borri (Observatório Astronómico e Geofísico da UC) é uma proposta de guião para uma mostra sobre Galileu e Borri, também com três núcleos e centrada na obra de Borri:
- Apresentação da cronologia dos modelos do sistema solar; destacam-se as duas questões centrais da obra de Borri e a sua relação com a religião, enquanto divulgador da obra de Galileu: a incorruptibilidade dos céus rebatida pela existência de cometas e o movimento da Terra, proposto por Galileu, questão que Borri crê resolver optando pelo modelo geocêntrico de Tycho Brahe.
- O papel do telescópio e a sua história; este núcleo introduz a descoberta do telescópio, construído em 1608 na Holanda e melhorado por Galileu em 1609, permitindo as observações astronómicas publicadas em *Sidereus Nuncius* (1610), seguindo-se a utilização do telescópio pelos Jesuítas em Portugal (Lembo em Lisboa e Borri em Coimbra).
- Os painéis didáticos de Astronomia em azulejo; o elemento central da exposição será a reconstrução dos dois painéis didáticos de astronomia à escala real [3]. Cada painel terá por base uma ilustração do séc. XVII dos hemisférios celestes sobre o qual estarão colocadas réplicas dos azulejos. Neste núcleo serão ainda apresentadas as obras que podem ter servido de base à composição final do painel existentes nas bibliotecas da UC (Zahn e Kircher). Será ainda assinalada a diferença entre painéis de azulejos decorativos sobre ciência (Colégio de St. Antão em Lisboa e Colégio do Espírito Santo em Évora) e os azulejos didáticos que foram produzidos para o Complexo Jesuítico de Coimbra.

Referências

[1] Borri, Cristoforo, *Collecta Astronomica ex-Doctrina*, Lisboa, 1631.

[2] Casaleiro, Pedro, 'Visto de Coimbra: O conceito de uma exposição de memória do lugar', in *Visto de Coimbra*, pp. 333–419, C. Simões, M. Miranda e P. Casaleiro (eds.). Imprensa da Universidade de Coimbra, Coimbra, 2020.

[3] Duarte, António Leal; Simões, Carlota e Gil, Francisco, 'Azulejos que testemunham o ensino das ciências nos colégios jesuítas em Coimbra', in *Visto de Coimbra*, pp. 145–157, C. Simões, M. Miranda e P. Casaleiro (eds). Imprensa da Universidade de Coimbra, Coimbra, 2020.

[4] Leitão, Henrique, prefácio de *Sidereus Nuncius*, Galileu Galilei (Veneza, 1610), edição da Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

A História da Ciência como Ferramenta Didáctico-Pedagógica nos Curricula das Faculdades de *Sciencias Naturaes* na "Nova" Universidade de Coimbra (1772)

Fernando B. Figueiredo
DM, CITEUC, Universidade de Coimbra

A importância da História da Ciência (HC) como ferramenta didático--pedagógica para o ensino das ciências é hoje em dia uma questão mais que consensual junto da comunidade educativa. Professores e alunos usam com regularidade temas de HC para uma melhor compreensão de tópicos e conceitos científicos e os próprios currículos das várias disciplinas, das ciências exatas às naturais, integram eles mesmos muitos episódios da sua própria história. Nas escolas portuguesas o ensino das ciências exatas e naturais faz parte dos currículos dos alunos, sejam eles de Ciências e Tecnologias, Humanidades ou Artes. O aumento da escolaridade obrigatória para 12 anos traz também ao percurso escolar dos alunos mais disciplinas de ciências, bem conteúdos científicos ministrados durante mais anos, e por isso mesmo mais aprofundados. Ao nível do ensino, desde o básico, passando pelo secundário e indo até ao superior, os temas de HC integrados nos currículos é hoje indiscutivelmente visto como uma mais valia que deve ser usada para ajudar e melhorar o processo de ensino e aprendizagem. Em Portugal, temas de HC encontram-se e cruzam-se atualmente nos vários níveis de escolaridade e disciplinas, apesar de muitas vezes ser deixado à responsabilidade do professor o uso desse critério.

Por incrível que nos possa parecer, muitas destas ideias acerca da importância da HC, como ferramenta didático-pedagógica para o ensino das ciências, já estava presente nos Estatutos Pombalinos de 1772, que instituem uma das mais significativas e duradouras reformas do ensino universitário e superior em Portugal, integrando-a, inclusive, nos currículos das diversas disciplinas. Pombal pretende tornar a Universidade não só um centro de ensino, mas também um centro de produção de conhecimento que fizesse face às necessidades técnico-científicas de um país que via atrasado e que urgia modernizar (Figueiredo & Duarte 2017). É implementado um ensino técnico e científico em moldes completamente novos, criando-se um curso completo e superior de *'Sciencias Filosóficas'*, dividido *«na de Naturalistas: na de Médicos: e na de Matemáticos»* (Estatutos 1772, v. 3 p. 4), a ser ministrado nas novas Faculdades de Matemática e Filosofia Natural, e na completamente reestruturada Faculdade de Medicina.

No contexto da Reforma Pombalina o ensino da História toma um papel de destaque. Pois como como sublinha H. Kragh, no século XVIII, a História deixa de *"conduzir ao conhecimento da vontade de Deus, para passar a conduzir ao conhecimento da natureza humana. Esta revolução crucial no campo das letras encontrou um sólido apoio por parte da nova filosofia natural, então em rápida expansão"* (Kragh 2004, 8). O progresso da Ciência, sendo construído degrau a degrau, aproveitava os progressos passados e a História revelava essa edificação feita, tijolo a tijolo, pelos filósofos e pensadores ao longo dos séculos. Nesse sentido, a História assumia um papel importante como didática do ensino não só das ciências matemáticas e naturais, mas também das ciências positivas. No caso dos cursos científicos a HC é matéria introdutória a todas as cadeiras e disciplinas – "em toda e qualquer Faculdade principiarão os alunos pela parte histórica", afirmava Manuel do Cenáculo, um dos atores da Reforma.

Do ponto de vista do ensino, a HC podia contribuir não só para que as disciplinas científicas se tornassem mais atraentes, despertando nos estudantes o interesse pelo estudo. Assim, todos os professores deveriam nas suas primeiras aulas introduzir os fundamentos da sua disciplina, a par de uma resenha histórica focada nos períodos mais relevantes, de modo a

> *«facilitar melhor a entrada nela e segurar o fruto das Lições: Principiará o Professor pelos Prolegômenos respectivos: Dando uma ideia circunstanciada do seu objecto e dos meios que aplica para conseguir o fim que se propõe: Mostrando a sua origem e progressos»* (Estatutos 1772, v. 3 p. 176).

E sempre com o cuidado em fazê-lo de acordo com a capacidade dos alunos, estimulando-os, mas não os assustando,

> *«Mostrando-lhes, que a primeira coisa, que deve fazer quem se dedica a entender o progresso das Matemáticas, é instruir-se nos descobrimentos antecedentemente feitos; para não perder tempo em descobrir segunda vez as mesmas coisas; nem trabalhar em tarefas, e empresas já executadas»* (Estatutos 1772, v. 3 p. 170)

No caso da cadeira de Astronomia, cadeira do 4.º ano do *Curso Mathematico*, que no vasto campo das ciências físico-matemáticas gozava de um estatuto particular, o papel da HC usado para *'conduzir os mesmos discípulos com mais gosto, e melhor preparo a ouvir as lições'* sai ainda mais reforçado. Pois, para além desse papel introdutório e motivador, a HC poderia, em si mesma, desempenhar uma função didática muito relevante ao próprio processo de aprendizagem através do chamado *'método dos inventores'*. Segundo o autor dos Estatutos, o professor podia seguir dois métodos no ensino da Astronomia,

> *«O Primeiro consiste em dispor os conhecimentos já descobertos, e averiguados, pela ordem Doutrinal, e Sintética, de sorte que façam um encadeamento natural; e se apresentem ao entendimento do modo mais fácil, e vantajoso. O Segundo consiste em seguir os passos dos mesmos Inventores; ajuntado primeiro as Observações de todos os Fenómenos; e entrando depois na indagação das causas deles, pela mesma cadeia de tentativas, e raciocínios, por onde se chegou, ou podia chegar aos verdadeiros conhecimentos, que hoje possuímos.»* (Estatutos 1772, v. 3 p. 191)

Quem hoje pela primeira vez lê os Estatutos Pombalinos impressiona-se com a clareza do discurso e as preocupações didáticas que atravessam todo o texto. A HC já era, tal como hoje o é, vista e aceite, como uma ferramenta indispensável a uma melhor compreensão das realizações teóricas e práticas das próprias ciências, servindo aos alunos como um importante auxiliar para apreciar o significado das questões e desafios que inspiram os cientistas do passado.

Bibliografia

Estatutos da Universidade de Coimbra... (3vols.), Coimbra: Imprensa da Universidade, 1972 [fac-simile da edição de 1772].

Figueiredo, F. B., Duarte, A. L. (2017). A Reforma Pombalina da Universidade de Coimbra e a institucionalização das Ciências Matemáticas e Astronómicas em Portugal. In Araújo, A. C. & Fonseca, F. T. (coords.). A Universidade Pombalina: Ciência, Território e Coleções Científicas. (pp. 191–244). Coimbra, Portugal: Imprensa da Universidade.

FOCUS: What is the value of History of Science, ISIS, v. 99, n. 2, Jun. 2008.

Helge Kragh, Introdução à Historiografia da Ciência, Porto: Porto Editora, 2003.

Kostas Gavroglu, O Passado das Ciências como História, Porto: Porto Editora, 2007.

Pedro Calafate, A ideia de natureza no século XVIII em Portugal (1740–1800), Lisboa, 1994.

Pedro Calafate, F. Soares Gomes, “Iluminismo”, Logos: Enciclopédia Luso-Brasileira de Filosofia, v. 2 (1990), pp. 1301–1316.

Thomas L. Hankins, Science and the Enlightenment, Cambridge: University Press, 1999.

Os números e as operações com inteiros nos finais do século XIX em Portugal

Helena Sousa Melo, *Maria do Carmo Martins*
F. Ciências e Tecnologia, Dep. Matemática e Estatística,
Centro de Estudos Humanísticos, Universidade dos Açores

Desde o século XVI o ensino elementar possui temas relacionados com a Matemática, estando a aritmética sempre presente. Ao longo dos tempos, o ensino da Matemática em Portugal sofreu várias reformulações. Por questões de limitação, concentramo-nos a partir de 1836 e apresentamos alguns conteúdos ensinados desde 1860.

Com a criação dos liceus, pelo ministro do reino Passos Manoel, entre 1836 e 1860, a instrução secundária teve 10 disciplinas sendo a 5.ª, Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Desenho. Como se pretendia valorizar o ensino científico e técnico é decretado a criação de um liceu em cada capital de distrito do continente e do ultramar, mas em Lisboa seriam dois.

Contudo, no Decreto da Instrução Secundária, não é feita referência ao número de anos que constituem o ensino liceal, nem tão pouco os conteúdos a lecionar em cada disciplina de cada ano e respetiva carga horária. A escolha e coordenação dos compêndios e a distribuição das disciplinas ficariam a cargo do Conselho de cada liceu.

Em 1844, Costa Cabral aprova nova reforma. No ensino secundário, mantém-se a intenção da existência de um liceu em todas as capitais de distrito, mas reduz consideravelmente o ensino científico. O curso dos liceus passa a ter 6 disciplinas, sendo a 3.ª, Aritmética e Geometria aplicada à Arte e primeiras noções de Álgebra. Tal como a reforma anterior, não faz referência ao número de anos que deve ter o ensino liceal nem a carga horária ou manuais escolares. A salientar que só no final de 1870 são publicados os primeiros programas oficiais do ensino liceal.

Em 1850 são alterados os conteúdos do curso liceal e criada a cadeira envolvendo Aritmética, Álgebra Elementar, Geometria Sintética Elementar, Princípios de Trigonometria Plana e Geografia Matemática. Em 1860, surge um novo regulamento para os liceus, decretado por Fontes Pereira de Melo: o curso liceal, de 5 anos, é composto por 10 disciplinas, sendo a 5.ª, Matemática Elementar. O ensino liceal vai sendo progressivamente estruturado e as disciplinas vão surgindo de forma mais organizada, bem como os docentes e os manuais que vão sendo cada vez mais especializados. Em 1868, o curso liceal passa de 5 para 6 anos, continuando a existência de liceus de 1.ª e de 2.ª classe. Em 1880, no ensino liceal há 16 disciplinas, onde a 5.ª é Aritmética, Geometria plana, Princípio de Álgebra e Escrituração, e a 11.ª é Álgebra, Geometria no Espaço e Trigonometria. Em 1888, há ainda a divisão do curso liceal em Curso Geral, Curso Complementar de Letras e Curso Complementar de Ciências.

Em 1871, o tópico de Aritmética da cadeira de Matemática Elementar contemplava, entre outros, a numeração, as seis operações e divisibilidade com números inteiros, números primos, frações, decimais, raízes quadradas e cúbicas, proporções, progressões, logaritmos e aplicações da aritmética. Um livro adotado na altura foi *"Elementos de Arithmetica"* de Augusto José da Cunha, também usado no liceu de Ponta Delgada, um dos primeiros fundado nos Açores.

Alguns dos tópicos programáticos dos planos de estudos a partir de 1860 permanecem até hoje, como por exemplo, a organização dos números em ordens e classes, contadas da direita para a esquerda. Considerava-se as ordens: unidades, dezenas e centenas das classes das unidades, dos milhares, dos milhões e, logo a seguir, a dos biliões. Após a 9.ª Conferência Geral de Pesos e Medidas, em 1948, recomendou-se a normalização para a Europa, sendo adotada em Portugal, a partir de 1959, a Norma Portuguesa NP-18. Nesta norma, obtém-se o nome dos grandes números através da expressão designatória n-ilião para os valores de 10^{6n}, onde n é 2, 3, etc. atribuindo-se os prefixos latinos *bi*, *tri*, etc., respetivamente. A padronização deveu-se ao facto de existirem duas escalas: a *curta* baseada em $10^{3(n+1)} = n$-ilhão e a *longa* supracitada, termos introduzidos em 1975 pela matemática Geneviève Guitel (1895–1982).

Há também a referir que se usava os complementos aritméticos para determinar a diferença entre dois números e o valor de expressões numéricas no conjunto dos números inteiros. A operação de multiplicação começava com a adição de parcelas repetidas e, posteriormente, recorria à tabuada de multiplicação, apresentando o algoritmo completo com os produtos parciais. A operação de divisão iniciava-se com as subtrações sucessivas cujos subtrativos correspondiam ao divisor, sendo depois apresentado o algoritmo completo com os restos parciais. Definia-se um número primo como aquele que admitia apenas dois divisores: o 1 e ele próprio, e considerava-se o 1 como número primo. Apresentava-se o algoritmo da raiz quadrada, mas na raiz cúbica, usava-se a tentativa e erro com um início semelhante ao da raiz quadrada. Abordava-se os cálculos com números complexos e incomplexos. Por exemplo, 1d 2h 3min era um número complexo, enquanto o seu equivalente, 1563min era um número incomplexo.

Podíamos apontar outras particularidades. As acima referidas foram o nosso alvo de estudo.

Bibliografia

Cunha, Augusto José (1899), *Elementos de Arithmetica*, Livro I, 7.ª Edição, Lisboa.

Rosa, A. Cunha (s. d.), *Aritmética Prática*, 7.ª Ed., Biblioteca de Instrução Profissional, Paris-Lisboa.

Almeida, António José & Matos, José Manuel (coordenadores) (2014), *A matemática nos programas do ensino não superior 1835–1974*, UIED, APM, Lisboa.

Atas do 7.º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática (2014), Óbidos.

Legislação Régia de 1860 – Ministério do Reino.

Problemas de Matemática em imprensa periódica portuguesa (1859–1936)

*Mária Cristina Almeida**
CICS.NOVA/ANQEP

Em 2015 ao folhear um exemplar de *A Illustração Portugueza: Revista Litterária e Artística* observámos que esta revista semanal publicava, a par das crónicas, dos contos, das narrativas e das anedotas, problemas de matemática. Esta divulgação da Matemática, na parte lúdica da revista, interessou-nos e levou-nos procurar a existência de passatempos matemáticos nesta e noutras publicações periódicas. Assim, fizemos um levantamento dos problemas editados em várias publicações da época. No que respeita ao número de problemas temos: *Archivo Pittoresco* (1859) – 4 problemas, *Jornal do Domingo* (1881) – 20 problemas, *A Illustração Portuguesa* (1884) – 117 problemas, *A Imprensa* (1886) – 3 problemas, *Brasil-Portugal* (1899) – 3 problemas, *O Académico* (1903) – 1 problema, *Almanach Bertrand* (1900) – em estudo. O reduzido número de problemas propostos nas outras publicações, levou-nos a que caracterizássemos apenas os problemas publicados na revista *A Illustração Portuguesa* (1884–1889), no que respeita a conteúdo matemático e ligação à vida corrente. Do conjunto de problemas publicados nesta revista, cento e oito foram propostos por Moraes d'Almeida. Carlos Augusto Morais de Almeida (1843–1919) foi, segundo o Dicionário de Educadores Portugueses (1999), um indivíduo que se destacou especialmente no campo do ensino das ciências físicas e matemáticas durante o período que engloba o fim do século XIX e o princípio do século XX; e, que contribuiu igualmente para o movimento de divulgação científica publicando vários artigos em revistas.

Segundo Mello e Souza (1940), mais conhecido por Malba Tahan, corresponde "à Aritmética recreativa uma série de problemas relacionados com curiosidades sobre os números, operações, enigmas, anedotas, adivinhações, quadrados mágicos, etc." (Mello e Souza, 1940, p. 233). Sobre adivinhações matemáticas, refere que há "questões formuladas, envolvendo relações numéricas ou figuras geométricas, que não constituem propriamente problemas – mas sim verdadeiras adivinhações matemáticas. Essas adivinhações não se apresentam, de modo algum, adstritas a regras fixas ou a processos racionais, as soluções, em geral, são atingidas quando o curioso dispõe

*Este trabalho foi parcialmente financiado por fundos portugueses através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I. P., no contexto do projeto PTDC/CED-EDG/32422/2017.

de uma habilidade especial e conhece os artifícios comumente empregados pelos inventores de enigmas." (Mello e Souza, 1940, p. 45). Após a análise do enunciado de cada um dos problemas propostos por Moraes d'Almeida estabelecemos oito temas: Álgebra, Aritmética, Adivinhações matemáticas, Geometria, Combinatória, Aritmética recreativa, Aritmética indiana, Probabilidades. A distribuição dos problemas por tema revela que o maior número de problemas se situa no campo da Aritmética, em segundo lugar temos as Adivinhações matemáticas, seguindo-se a Álgebra, Geometria, Combinatória, Probabilidades. O número de problemas com contexto ligado à vida real é cerca de metade do número dos problemas. Apresentamos um exemplo de problema de Álgebra, com contexto ligado à vida real "Quanto possue uma pessoa que diz o seguinte: Se eu juntasse 30 contos ao que tenho ficaria com tantos contos a mais de 85 quantos actualmente tenho a menos. (*A Illustação Portugues*a, n.º 1, 1/07/1884, p. 7).

George Pólya na sua obra *How to Solve It* (2003/1945, 1.ª ed.) argumentou que o espaço dedicado pelos jornais e revistas populares a palavras cruzadas e outros enigmas parece demonstrar que as pessoas apreciam passar algum tempo a resolver problemas, apenas pelo desafio, pelo triunfo da descoberta (Pólya, 2003). Estes problemas, que mantivemos na sua grafia original para benefício curiosidade dos alunos, podem ajudar os professores a acautelar que lhes são propostos problemas que não seguem um padrão que já conhecem e que por isso não lhes colocam nenhum desafio. Alguns dos problemas analisados poderão ser resolvidos na sala de aula ou clubes de Matemática, onde sendo possível avançar para uma discussão alargada, se pode verificar a validade das várias estratégias de resolução que foram descobertas e usadas, comparar as várias estratégias apresentadas, analisar as possíveis soluções (havendo mais que uma), ou avançar para variantes ou prolongamentos do problema. Mas, também poderão ser resolvidos em casa e entregues ao professor. Num caso, como no outro, trabalha-se a capacidade de transmitir ideias, raciocínios e conclusões matemáticas. Apresentamos ao lado uma possível aplicação para sala de aula (Figura 1) usando um dos problemas analisados. Este problema tem várias respostas (Figura 2).

Em jeito de conclusão, realço que como professores cabe-nos proporcionar condições para que os nossos alunos vivam o prazer de resolver problemas que reside muitas vezes na descoberta de que podemos ir mais além do que aquilo que pensávamos conseguir.


AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE XXX

Disciplina/Clube: **MATEMÁTICA** Ano letivo ______

Professor(a): ___________

Nome: ______________________ Ano: ____ Turma: ____

Assunto: **Problema dos tonéis**

A Illustração Portugueza: Revista Litterária e Artística foi lançada em Lisboa, em Junho de 1884, publicou-se, semanalmente, entre Julho de 1884 e Outubro de 1890.

Numa das suas rubricas denominada "Em família", eram propostos passatempos, que incluíam problemas de matemática. Tendo sido publicados 108 problemas.

Vejamos um problema foi proposto nesta revista.

Problema

Dividir entre Fagundo, Procopio e Seraphim 24 toneis, estando 5 cheios de vinho, 8 vazios e 11 meio cheios, de maneira que cada uma d'aquellas pessoas fique com egual número de toneis e com a mesma quantidade de vinho.

Resolva o problema.

a) Exponha a sua resposta.

b) Compare a sua resposta com a de outros colegas.

Figura 1. Aplicação para sala de aula

	Toneis cheios	**Toneis meio cheios**	**Toneis vazios**
Fagundo	0	7	1
Procopio	2	3	3
Seraphim	3	1	4
Fagundo	1	5	2
Procopio	3	1	4
Seraphim	1	5	2
Fagundo	2	3	3
Procopio	2	3	3
Seraphim	1	5	2

Figura 2. Proposta de resolução do problema

Se o professor achar pertinente, poderá ser inserida no enunciado da atividade (Figura 1), uma tabela como a da figura 2 para os alunos preencherem, ou ainda, avançar para um prolongamento do problema.

Fontes e Bibliografia

A Illustração Portugueza: Revista Litterária e Artística (1884-1890)

G. Pólya, *Como resolver problemas.* Lisboa: Gradiva, 2003.

Mello e Souza, *Dicionário Curioso e Recreativo da Matemática* 1.º Vol.-A-B. Rio: Edit. Getulio Costa, 1940.

Nóvoa, A.; Bandeira, F. (coord. geral). (1999). A educação portuguesa: corpus documental (séculos XIX–XX): dicionário de educadores portugueses. Porto: Edições Asa.

A matemática na aula, um estudo histórico iconográfico[1]

Alexandra Rodrigues
Inst. de Gouveia — Escola Profissional, UIED

José Manuel Matos
U. Nova de Lisboa (UNL), UIED

O estudo de representações de aulas centradas na matemática, mostra-nos como elas têm tomado diferentes disposições ao longo dos séculos refletindo metodologias de ensino, teorias de aprendizagem e inovações tecnológicas. Este estudo iconográfico, suportado nas propostas de Erwin Panofsky (1939/1972) recorre a gravuras e fotografias encontradas em livros de texto, revistas ou no espólio de colecionadores desde a época medieval até meados do século XX. Utilizando um paradigma qualitativo, com pesquisa histórica e documental, apresentamos para diferentes épocas teorias de ensino e aprendizagem subjacentes à aula, através da consulta da legislação, manuais escolares e fotografias.

O principal objetivo da comunicação foi apresentar vislumbre de como eram as aulas de matemática no passado. Por outras palavras, procurámos interpretar as representações das aulas de matemática a partir de imagens (fotografias, gravuras, imagens) encontradas em livros didáticos e jornais e relacioná-las com outros estudos do ensino passado da matemática. O uso de imagens como evidência histórica estende o campo de trabalho do investigador para além das fontes materiais tradicionais: declarações oficiais, textos publicados em jornais, livros, documentação em arquivos, etc. Contestando o que ele chama de invisibilidade visual, Peter Burke (2001) discute os caminhos em cuja história cultural pode incorporar o estudo das imagens. Utilizando uma abordagem iconográfica, pretendemos identificar os elementos mostrados nas fotos das salas de aula e as relações entre eles e, assim, compreender a mudança e estabilidade nas salas de aula de matemática. É uma viagem através dos modos de organização do processo de ensino, a aula e não sobre o conteúdo desse ensino (o currículo). Será necessariamente uma viagem preliminar, visto que ainda não foi feito um estudo aprofundado sobre o assunto em Portugal, ao contrário de um trabalho mais consistente realizado em outros países.

[1]Encontra o artigo completo em Matos, J. M., & Rodrigues, A. S. (2020). Mathematics in classroms, na iconographic historical study. *Revista História da Educação, 24* (Epub June 29, 2020). doi: `https://doi.org/10.1590/2236-3459/99597`

Figura 1: Gravura do Tratado da pratica Darismetyca de 1519.

A mais antiga gravura que encontrámos está precisamente no final da primeira edição do *Tratado da pratica Darismetyca* da autoria de Gaspar Nicolas (1519/1963)[2] e que constitui o primeiro livro de texto de matemática impresso em Portugal (figura 1). A imagem parece representar uma aula medieval típica, na qual o mestre está sentado numa cadeira mais elevada e aponta para o livro enquanto os aprendizes folheiam, presumivelmente, outros exemplares do mesmo livro ou escrevem em cadernos.

Sistematicamente e obedecendo a uma ordem cronológica, analisámos imagens que retratavam a aula jesuíta, as aulas de primeiras letras e nos primeiros liceus, gravuras que retratavam as inovações tecnológicas no final do século XIX (o quadro preto, a lousa, entre outras...), as salas de aula da primeira metade do século XX, salas de aula de formação de professores e do ensino profissional e a influência da escola nova no ensino primário e liceal.

Com semelhanças com o método hermenêutico alemão de análise textual, o método iconográfico tem sido criticado por ser demasiado intuitivo e especulativo (Burke, 2001). No entanto, a análise iconográfica das representações encontradas em livros de texto, fotografias ou gravuras, interligadas com o contexto social, económico e cultural da época, encontrado em registos de professores, alunos e na legislação permitiram-nos identificar práticas da matemática na aula (no sentido de Julia, 1995) enquadradas entre o período medieval e meados do século XX. Através deste retrato iconográfico foi possível reconhecer uma evolução das relações estabelecidas entre professores e alunos, dos materiais utilizados e da organização do espaço da aula, que, ao longo dos séculos, foi transformando a rigidez formal da organização es-

[2]A gravura foi usada noutros livros do mesmo editor.

pacial. Os novos equipamentos educativos, em especial o quadro negro, vão gradualmente transformar a estrutura da aula, não apenas de um ponto de vista arquitetónico, mas, mais importante, de um ponto de vista simbólico.

Esperamos ter trazido o leitor para uma visão da história (em particular da história da Educação Matemática) como uma busca de permanências e mudanças que nos permita refletir sobre o presente. O aluno, o professor e o conteúdo enquanto categorias abstratas são permanentes, mas tudo o resto muda: as relações que se estabelecem na aula, o valorizado e o reprimido, os artefactos e o seu significado. Mas muda, para além de tudo a identidade social e cultural concreta dos alunos, dos professores (repare-se de novo nas imagens de alunos e de professores) e da própria matemática (que incorporou diferentes visões do que é conhecimento matemático legítimo e desejável eliminando simultaneamente outras dimensões).

Bibliografia

Burke, P. *Eyewitnessing: The Uses of Images as Historical Evidence*. Londres: Reaktion Books, 2001.

Carvalho, R. (2008). *História do Ensino em Portugal – Desde a fundação da nacionalidade até ao fim do Regime de Salazar-Caetano* (4.ª ed.). Lisboa. Fundação Calouste Gulbenkian.

Leitão, H. (2007). Azulejos que testemunham uma tradição de ensino científico. In: Simões, C. e Duarte, A. L. (Ed.). *Azulejos que ensinam*. Coimbra: Universidade de Coimbra, 2007. p. 17–33.

Matos, J. M. (2011). *Imagens da aula de Matemática*. Educação e Matemática, v. 115, n. Nov/Dez 2011, p. 3–10.

Matos, J. M. (2014). Mathematics education in Spain and Portugal. Portugal. In: Karp, A. e Schubring, G. (Ed.). *Handbook on the History of Mathematics Education*. Londres: Springer. p. 291–302.

Nicolas, G. *Tratado da pratica darismetyca*. Porto: Livraria Civilização, 1519/1963.

Panofsky, E. (1939/1972). *Studies in Iconology: Humanistic Themes in the Art of the Renaissance*. First Icon, 1939/1972.

Rodrigues, A.; Matos, J. M. (2018). Uma iconografia da matemática na aula. In: Rodrigues, A.; Barbosa, A., et al (Ed.). *Livro de Atas do EIEM*

2018, Encontro em Investigação em Educação Matemática. A Aula de Matemática. Caparica: SPIEM, 2018. p. 161–179. ISSN: 2182-0023.

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., no âmbito do projeto «UID/CED/2861/2016».

Daniel Augusto da Silva, "um precursor da Teoria dos Conjuntos"?

Ana Patrícia Martins
CIUHCT/ Escola Superior de Educação de Viseu

Em 1927, Pedro José da Cunha apresenta, ao Congresso Luso-Espanhol para o Progresso das Ciências, uma comunicação intitulada *A noção de conjunto numa das memórias de Daniel da Silva*, onde considera o matemático, oficial de Marinha e lente da Escola Naval, Daniel Augusto da Silva (1814–1878) "um precursor da Teoria dos Conjuntos". Essa memória, *Propriedades geraes e resolução directa das congruencias binomias: introducção ao estudo da theoria dos numeros*, estava concluída em 1852 e foi ofertada pelo autor à Academia das Ciências de Lisboa. Publicada em 1854, o seu capítulo final (*Várias aplicações*) não ficou concluído — Daniel da Silva afastara-se da vida activa ainda em 1852, por motivos de doença (excesso de trabalhos intelectuais, segundo o próprio). Regressaria em 1859.

A primazia do contributo de Georg Cantor (1845–1918) na génese da Teoria dos Conjuntos (TC) é facto amplamente difundido desde os inícios do século XX e Pedro José da Cunha partilhava dessa opinião. Pouco comuns são as abordagens historiográficas que realçam também o papel de outros matemáticos, destacando-se, na década de 1990, os textos de José Ferreirós. Para o autor, a tese de que, no terceiro quartel do século XIX, Cantor foi o introdutor do infinito na Matemática, conceito que impulsionou o surgimento da Matemática Moderna é, se considerada isoladamente, um facto histórico impreciso. Segundo Ferreirós, a tradicional historiografia da TC potenciou alguns equívocos quanto ao desenvolvimento da Matemática Moderna. Por um lado, é falso que antes de Cantor houvesse uma rejeição universal do *infinito actual*. É, também, falso que abordagens conjuntistas da Matemática (que consideram a TC como linguagem básica da Matemática) tenham surgido exclusivamente em assuntos da Análise (associados aos trabalhos de Cantor com séries trigonométricas). Emergiram, também, de questões da Álgebra e da Teoria dos Números (distinguindo-se os contributos de Richard Dedekind), e da Geometria (de onde sobressaem as investigações de Bernhard Riemann, em Topologia). De realçar que os primeiros contributos na TC, por Cantor e seus contemporâneos (Dedekind e Riemann), incluem abordagens intuitivas aos conjuntos, sendo enquadrados no que se apelidou de *Naive Set Theory*. Já nos inícios do século XX, as primeiras tentativas sistemáticas de axiomatização da TC são devidas a Bertrand Russel (1903) e Ernest Zermelo (1908).

Em *Propriedades geraes e resolução directa das congruências binomias*, Daniel da Silva apresenta processos e fórmulas para a resolução de congruências binómias que se destacam pela sua originalidade, colocando-se questões de prioridade sobre o matemático escocês John Stephen Smith, num trabalho seu publicado em 1861. A noção de *conjunto* surge, na obra do matemático português, como uma ferramenta para demonstrar "um dos teoremas de uso mais frequentes na teoria dos numeros", de Euler, que permite obter a quantidade de primos com um número, não superiores a ele. É apresentada como uma "notação". Daniel da Silva assume, portanto, a existência de conjuntos, pelo que não os define.

Para uma série de números S, "*reunidos*, e não *sommados*", denota por S_a a "*reunião*" daqueles que gozam de certa propriedade a, e introduz notações que correspondem aos actuais conceitos de intersecção de conjuntos, complementar de um conjunto e cardinal de um conjunto. $S_{a,b}$ representa a reunião dos números que verificam, simultaneamente, as propriedades a e b (sendo que $S_{a,b} = S_{a_b}$, ou seja, $S_{a,b}$ é a reunião dos números que, gozando da propriedade a, gozam também de b). (De forma semelhante, $S_{a,b,c} = S_{a,b_c} = S_{a_{b_c}}$, etc.) ${}^aS$ representa a reunião dos elementos de S "privados" da propriedade a, *operação* que pode ser estendida a qualquer número de propriedades. (De modo semelhante, ${}^{b,a}S = {}^{b^a}S$, etc.) ψS_a denota o "número dos números contidos" em S_a. Utiliza, ainda, notações correspondentes aos actuais conceitos de reunião $(+)$ e diferença $(-)$ de conjuntos.

A notação $S\,[1-_a]$ serve para representar ${}^aS = S - S_a$, pelo que a reunião ${}^{\dots c,b,a}S$ é escrita na forma

$$ {}^{\dots c,b,a}S = S\,[1-_a]\,[1-_b]\,[1-_c]\dots, \tag{1}$$

sendo que "os produtos dos numeros a, b, c, etc. passam a indices compostos das series respectivas". E, de modo semelhante, se estipula

$$\psi\,{}^{\dots c,b,a}S = \psi S\,[1-_a]\,[1-_b]\,[1-_c]\dots, \tag{2}$$

igualdade que expressa o Princípio de inclusão-exclusão na sua forma complementar. Para clarificação das *parcelas* constituintes de (2) (que Daniel da Silva não faz), considere-se o desenvolvimento:

$$\psi\,{}^{\dots c,b,a}S = \psi S - \psi S_a - \psi S_b - \psi S_c - \dots + \psi S_{a,b} + \psi S_{b,c} + \dots - \psi S_{a,b,c} - \dots$$

A abordagem da noção de conjunto feita por Daniel da Silva abrange apenas conjuntos finitos, facto evidenciado pelos exemplos em que usa a sua *notação*. A saber, na demonstração da fórmula de Euler e também na aplicação das fórmulas (1) e (2), a respeito das quais afirma: "teem ainda a vantagem de exprimir teoremas muito mais geraes que o de Euler, [e] podem servir comodamente para a demonstração de formulas importantes e curiosas". Tal exemplo, demonstrado, diz respeito à obtenção da soma de todos os números não maiores que N, e primos com ele.

De salientar que na memória *Propriedades geraes e resolução directa das congruencias binomias* não se faz outro uso da *notação* de conjunto nem existem considerações a processos infinitos. O que está em linha com o enquadramento desta obra, desde logo explicitado no seu subtítulo (*introducção ao estudo da theoria dos números*).

Concordamos com Pedro José da Cunha na afirmação de que "muito antes que Cantor publicasse os seus primeiros trabalhos sôbre a Teoria dos conjuntos já Daniel da Silva havia mostrado a conveniência de estabelecer princípios a que se subordinassem os números reunidos em colecções, só pelo facto de estarem reunidos". No entanto, discordamos da sua tese. A resposta à questão que nos propusemos esclarecer, Daniel Augusto da Silva, "um precursor da Teoria dos Conjuntos"?, é, portanto, não.

Referências

Cunha, Pedro José da. 1927. "A noção de conjunto numa das memórias de Daniel da Silva". Asociación Española para el Progreso de las Ciencias. Congreso de Cádiz, tomo 3, Ciencias matemáticas.

Ferreirós, José. 2007. *Labyrinth of Thought. A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics.* Birkhauser: Basel, Boston, Berlin.

Silva, Daniel Augusto da. 1854. *Propriedades geraes e resolução directa das congruencias binómias: introducção ao estudo da theoria dos numeros.* Lisboa: Imprensa Nacional.

A *Bibliotheca do Povo e das Escolas* e os seus precursores

Vitor Bonifácio
Departamento de Física, CIDTFF, Universidade de Aveiro

Durante o século XIX verificou-se uma expansão dos sistemas de ensino, de novos métodos de produção de papel e máquinas de impressão. Os desenvolvimentos científico-tecnológicos – transportes a vapor, marítimos e terrestres; comunicações, a rede global de cabos telegráficos; iluminação, a gás e, posteriormente, eléctrica – alteraram de forma palpável o dia a dia de muitos cidadãos. A vontade de potenciar a instrução, mobilizar cidadãos e/ou, apenas, aproveitar oportunidades comerciais resultantes do crescente número de leitores, nomeadamente das classes baixas, levou a que, ao longo do século XIX, se tenha desenvolvido o que hoje denominamos por comunicação de massas e se identifica, por vezes, como a idade de ouro da divulgação científica. Livros e revistas com tiragens de milhares de exemplares tornaram-se comuns em vários países europeus. Inserido nesta dinâmica internacional, o editor português David Corazzi (1845–1896) deu à estampa, em 1881, o primeiro número da *Bibliotheca do Povo e das Escolas* (BPE). A primeira edição, de 10 000 exemplares, da brochura de 64 páginas de 11,0 cm por 16,5 cm intitulada *História de Portugal* esgotou rapidamente. A este êxito comercial somou-se uma boa recepção crítica e as tiragens subiram acompanhando a procura popular. O número 16, *Hygiene*, publicado aproximadamente 8 meses depois, teve uma tiragem de 20 000 exemplares [1]. Isto é, cerca de 8% de todos os alunos matrículados em Portugal no ensino primário no ano de 1889 [2, p. 104]. A longevidade é outra das características desta colecção. A publicação sobreviveu ao abandono de Xavier da Cunha (1840–1920), o seu primeiro director e arquitecto, e às mudanças de proprietário da editora. No total publicaram-se, ao longo de 33 anos, 237 números, entre os quais, vários de matemática, quer de nível elementar como, por exemplo, *Arithmetica Pratica* (n.º 5, 1881) e *Algebra Elementar* (n.º 14, 1881) de José Greenfield de Mello (1848–1905), *Trigonometria* (n.º 142, 1887) de João Maria Jalles, quer de conteúdos mais elaborados, nomeadamente numa fase tardia, como *Funcções e Equações Numericas* (n.º 207, 1898) de Luís Marrecas Ferreira (1851–1928) e *Noções sobre Cálculo das Probabilidades, Theoria dos Erros e Methodo dos Minimos Quadrados* (n.º 223, 1904) e *Geometria e Trigonometria Espherica* (n.º 231, 1910) de Rodolpho de Guimarães (1866–1918). Note-se que todos os autores referidos pertenceram às forças armadas [3].

Em 1985, Manuela Domingos analisou, de forma exemplar, a colecção e o seu contexto [4]. Não conseguiu, no entanto, identificar quais as colecções análogas referidas por Xavier da Cunha como modelos da colecção. A comercialização de colecções, mais ou menos elaboradas, enquadradas pelo vocábulo "biblioteca" eram, em 1881, un *fait accompli* em muitos países europeus. Refiram-se, por exemplo, indicando entre parêntesis o ano do primeiro número, a inglesa *Library of Useful Knowledge* (1827) ou a francesa *Bibliothèque Populaire* (1832). Todas estas "bibliotecas" possuíam características idênticas — instruir o povo a custo módico. Em geral, são pequenas brochuras, publicadas em papel de qualidade inferior, vendidas avulso em quiosques de jornais e locais similares ou por assinatura. Em Portugal, podemos enquadrar no mesmo espírito a *Encyclopedia Popular* (1867) de João José de Sousa Telles (1826–1903), embora, ao contrário das colecções referidas anteriormente, esta publicação não tivesse um único tema por número e incluísse artigos de poesia e romance. A publicação não terá sido bem

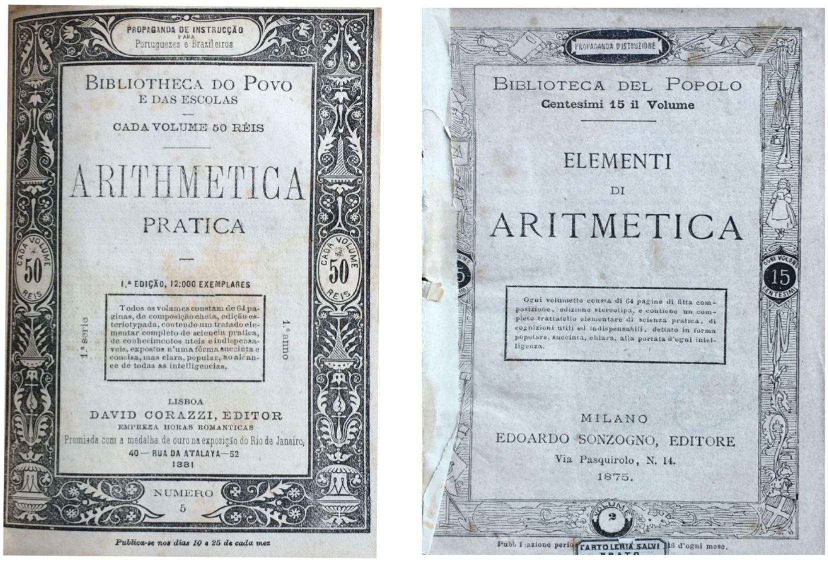


Figura 1: Imagem das capas dos números *Arithmetica Pratica* (1881) da *Bibliotheca do Povo e das Escolas* e *Elementi di Aritmetica* (1876) da *Biblioteca del Popolo*.

sucedida, como aliás, tantas outras iniciativas nacionais, tendo terminado ao fim de 16 números. Esta constatação revela não só a fragilidade dos esforços locais de divulgação científica como evidencia, no contexto nacional, a singularidade da BPE.

Ao estudarmos este tipo de publicações encontrámos, por acaso, o modelo da BPE. Publicada em Milão, pelo importante editor Edoardo Sonzogno (1836–1920), a *Biblioteca del Popolo* (BdP) apareceu em 1875, mantendo-se no prelo pelo menos até à década de 40 do século XX. Os números da BdP e da BPE têm igual dimensão e o mesmo número de páginas. A comparação das duas publicações (figura 1) revela não só a semelhança gráfica entre ambas como o texto do rectângulo central da BPE corresponde à tradução do da sua congénere italiana. Numa publicação anterior analisamos com detalhe as semelhanças e diferenças entre as duas colecções [1]. Se as diferenças resultam de uma aposta explícita nos mercados escolar e brasileiro, as semelhanças apontam inequívocamente a BdP como a inspiração da BPE. Refira-se, no entanto, que os números da BPE não são traduções. Aliás, uma análise prévia dos primeiros números das duas colecções aponta para uma maior incidência de conteúdos de Ciências Naturais na publicação portuguesa, provavelmente devido à formação académica de Xavier da Cunha, antigo aluno das Escolas Médico-Cirúrgica e Politécnica de Lisboa.

Este estudo confirma, de novo, que no Portugal oitocentista se conheciam os desenvolvimentos além fronteiras. Neste caso particular, os responsáveis pela publicação da BPE, adaptaram um modelo internacional ao contexto português conseguindo, assim, um inesperado êxito comercial.

Referências

[1] V. Bonifácio, "Um modelo para a Bibliotheca do Povo e das Escolas: a Biblioteca del Popolo", *Do Manuscrito ao Livro Impresso I*, Imprensa da Universidade de Coimbra; UA Editora - Universidade de Aveiro, 2019, Cood. M. L. Andrade, M. C. Carrington, pp. 313–339.

[2] A. Candeias, A. L. Paz e M. Rocha, *A alfabetização e escola em Portugal nos séculos XIX e XX*, Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, 2007.

[3] V. Bonifácio e H. R. Malonek "Os inesperados livros de Matemática da 'Bibliotheca do Povo e das Escolas'", *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, Vol. 69 (2013), Suplemento, pp. 35–37.

[4] M. Domingos *Estudos de Sociologia da Cultura. Livros e Leitores do Século XIX*, Lisboa, Instituto Português do Ensino à Distância, 1985.

A aplicação do Cálculo das Probabilidades de Diogo Pacheco d'Amorim (1914)

Rui Santos[1]
Escola Superior de Tecnologia e Gestão, Politécnico de Leiria,
CEAUL – Centro de Estatística e Aplicações

Diogo Pacheco d'Amorim (1888–1976) propõe uma construção para a Teoria da Probabilidade na sua tese de doutoramento defendida em 1914 na Universidade de Coimbra. A sua construção é concebida com base no conceito de escolha, à sorte, de um elemento do espaço amostra sob as hipóteses do fenómeno padrão, supondo que somos nós os agentes da escolha, de forma a garantir a aleatoriedade, e que possuímos total conhecimento do espaço amostra, através do qual podemos deduzir a possibilidade de cada elemento. É com base nestas duas hipóteses, bem como em J. Bernoulli e nos principais autores da escola francesa de Probabilidades (sobretudo Laplace, Bertrand, Borel e Poincaré), que o autor constrói a sua visão do Cálculo das Probabilidades, evitando, deste modo, recorrer ao polémico princípio da razão insuficiente de J. Bernoulli e Laplace.

Na Conclusão da sua tese, o autor analisa à luz das leis limites (Lei dos Grandes Números e Teorema Limite Central) os casos onde as hipóteses subjacentes ao fenómeno padrão não se verificam, expondo, assim, a sua visão sobre as aplicações da Probabilidade, isto é, a sua conceção de Estatística.

Deste modo, começa por dividir o campo de análise de um fenómeno em três grupos que caracterizam o agente da escolha (nós, por um agente semelhante a nós e por um agente de outra natureza) e, como tal, qualificam a primeira condição inerente ao fenómeno padrão. Cada grupo é depois dividido em dois sub-grupos que correspondem à tiragem à sorte de um elemento de uma classe (número finito de modalidades) e ao lançamento de um ponto numa região (caso contínuo). Finalmente, cada sub-grupo será dividido em três casos que descrevem o nosso grau de conhecimento sobre o fenómeno em estudo, relativamente ao conhecimento qualitativo (campo de existência, i.e. o seu suporte) e quantitativo (lei de probabilidade, i.e. a sua distribuição) de forma a ser analisada a segunda hipótese do fenómeno padrão. No primeiro caso temos o conhecimento qualitativo e quantitativo do fenómeno (hipótese subjacente ao fenómeno padrão), no segundo caso

[1]Este trabalho foi financiado por Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, no âmbito dos projetos UIDB/00006/2020 e UIDP/00006/2020.

temos conhecimento qualitativo mas desconhecimento quantitativo do fenómeno (conhecemos o suporte mas desconhecemos a sua distribuição) e, por fim, temos o desconhecimento qualitativo e quantitativo do fenómeno. O objetivo é analisar as condições que nos permitem reduzir todas as situações ao fenómeno padrão, de forma a podermos utilizar a teoria que desenvolveu nos capítulos precedentes para modelar os fenómenos em análise, pois "todo o fenómeno, para que possa fazer parte do estudo desta ciência, deve poder reduzir-se a este" (fenómeno padrão).

Para justificar estas transformações, o autor fundamenta-se nas Leis de Bernoulli e análogas, considerando que estas nos permitem, sob determinadas condições, passar todas estas situações para o fenómeno padrão, uma vez que estas leis garantem que, se fixarmos um erro máximo ε para a distância entre o valor observado numa amostra, de um qualquer fenómeno, e o seu valor teórico (isto é, o valor desse fenómeno na população), então a probabilidade de cometermos um erro superior ao fixado vai convergir para zero à medida que aumentamos a dimensão da amostra. Por conseguinte, desde que possamos obter uma amostra de grande dimensão conseguimos sempre obter um resultado aproximado e provável. Assim, Pacheco d'Amorim salienta que este resultado, além de aproximado, é provável, pois, apesar de podermos garantir que o erro máximo cometido é ε com determinada probabilidade p, por mais que a probabilidade p se aproxime da unidade nunca podemos garantir *a priori*, com total certeza, esta majoração do erro.

Apesar deste "hiato que separa a probabilidade da certeza", o autor considera que esta aproximação provável é suficiente para modelar os fenómenos aleatórios, sendo a Cálculo das Probabilidades a Ciência que nos deve guiar na tomada de decisão sob incerteza. Pacheco d'Amorim considera ainda que, caso não sejamos nós os agente da escolha, se o fenómeno se comportar em harmonia com as Leis de Bernoulli e análogas podemos considerá-lo como se fosse proveniente de uma escolha feita por nós próprios e, consequentemente, estaremos nas condições de aplicabilidade das mesmas metodologias para o seu estudo.

Refira-se que, nesta visão, Pacheco d'Amorim inclui algumas ideias sobre testes de hipóteses e de significância, desenvolvidos sobretudo por Jerzy Neyman e Egon S. Pearson por volta dos anos 30, e propõe testar se uma sequência de observações, independentemente da sua origem, pode ser considerada como aleatória (ideia presente na utilização de números pseudo-aleatórios na simulação).

Em 1929, Manuel dos Reis, numa tese de doutoramento igualmente dedicada ao estudo dos alicerces da Teoria da Probabilidade, apesar de mostrar discordância com alguns aspetos da construção de Pacheco d'Amorim, testemunha a importância da sua visão no ensino e na investigação desta área em Coimbra. Mesmo passados mais de 40 anos, na sebenta utilizada durante o ano letivo 1956–1957, Pacheco d'Amorim mantém a mesma visão sobre o Cálculo das Probabilidades e as suas Aplicações, apesar de apresentar uma fundamentação distinta da inicial, baseada em conceitos da Teoria da Medida inexistentes em 1914. A sebenta a que tivemos acesso está manuscritamente corrigida e aumentada pelo próprio autor, visando uma publicação definitiva da sua construção do Cálculo das Probabilidades que não chegou a ocorrer.

Referências

[1] J. Bernoulli, *Ars Conjectandi*, Basle, 1713.

[2] J. Bertrand, *Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1888.

[3] É. Borel, *Éléments de la Théorie des Probabilités*, Albin Michel, Paris, 1909.

[4] É. Borel, *Le Hasard*, Librairie Félix Alcan, Paris, 1914.

[5] A. Cournot, *Exposition de la Théorie des Chances et des Probabilités*, Librairie de L. Hachette, Paris, 1843.

[6] S. Lacroix, *Traité Élémentaire du Calcul des Probabilités*, Bachelier, Paris, 1816.

[7] P. Laplace, *Théorie Analytique des Probabilités*, Courcier, Paris, 1812.

[8] D. Pacheco d'Amorim, "Elementos de Cálculo das Probabilidades", Tese de Doutoramento, Universidade de Coimbra, 1914.

[9] D. Pacheco d'Amorim, "Cálculo das Probabilidades", Universidade de Coimbra, 1956–57.

[10] H. Poincaré, *Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1896.

[11] H. Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, Flammarion, Paris, 1902.

[12] M. Reis, "Cálculo das Probabilidades", Tese de Doutoramento, Universidade de Coimbra, 1929.

O algoritmo de Gago Coutinho para o cálculo da altitude

António Costa Canas[1,2]*, Magda Ramires Marabujo*[1]*, Teresa Sousa*[1,3]
[1]Escola Naval - CINAV, [2]CH-ULisboa
[3]Centro de Matemática e Aplicações (CMA), FCT, UNL

Em 1922, Gago Coutinho e Sacadura Cabral completaram a primeira travessia aérea do Atlântico Sul desde Lisboa até ao Rio de Janeiro. O sucesso da travessia deveu-se ao facto de terem desenvolvido os primeiros métodos científicos de navegação aérea. Para a sua aplicação, tornava-se necessário determinar a altitude da aeronave, de modo a estimar, com rigor, a sua posição. *"O cálculo da posição, por meio de observações dos astros, exige o conhecimento aproximado da nossa altitude [...]."* [1]

O único instrumento disponível à data era o altímetro, no entanto, este instrumento não apresentava valores suficientemente rigorosos e poderia introduzir erros nos cálculos, comprometendo o sucesso da viagem. Assim sendo, Gago Coutinho procura uma solução que lhe permita resolver este problema com o rigor necessário aos seus objetivos.

"Com ceu claro, e com o sol a mais de 30 graus de altura, a sombra do avião sobre a superfície do mar é suficientemente nítida para ser medida a sextante ou a binóculo telemétrico. E é elementar ter, [...], uma pequena tabela, calculada com o comprimento das azas do avião, que dá o coeficiente K da fórmula.

$$altitude = K\,ctg.angulo\ da\ sombra$$

Fórmula que nos dará a altitude com um êrro de poucos metros, [...]" [1]

O requisito da altura do Sol ser superior a 30° é essencial, pois caso contrário a sombra da aeronave é deformada e projetada para muito longe, dificultando assim a sua medição com o rigor desejado. Para determinar o valor da constante K Gago Coutinho utiliza um processo geométrico e algumas fórmulas trigonométricas. Apresentaremos de seguida uma breve descrição deste processo, remetendo o leitor para [2] para um estudo mais detalhado.

A aeronave utilizada era um biplano, ou seja, uma aeronave com duas asas verticalmente opostas. Em primeiro lugar, observemos que a distância vertical entre as duas asas irá incrementar o comprimento da sombra da aeronave na superfície do mar por um valor, que denotaremos por x, e que depende apenas da altura do Sol. (Figura 1(a))

Denotemos por P a distância vertical entre as duas asas, por e a envergadura da aeronave, por a_s a altura do Sol e por s o comprimento da sombra da aeronave na superfície do mar. Tem-se $s = e + x$, onde $x = P\cot(a_s)$. De seguida iremos determinar a constante K, tendo em conta o diagrama apresentado na Figura 1(b).

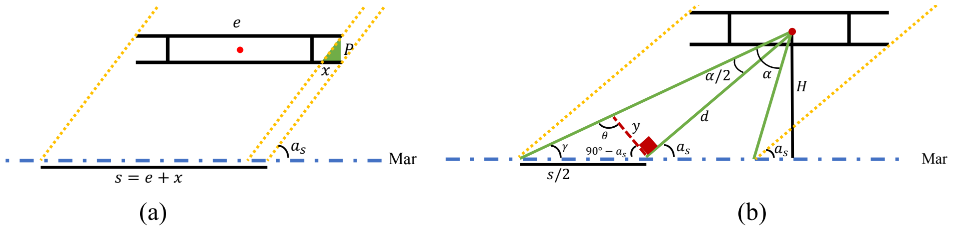


Figura 1: (a) Incremento da sombra do biplano na superfície do mar. (b) Diagrama para determinar a altitude. (Fonte: Elaborado pelos autores.)

Em primeiro lugar, observemos que o valor de α é pequeno. Este valor foi estimado pelos autores utilizando um modelo planar do problema em causa, tendo concluído que o seu valor será inferior a 15°. Deste modo, tem-se $d = y\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \approx 2y\cot(\alpha)$. Por outro lado, para o ângulo θ marcado na Figura 1(b) temos $\theta = 90° + \alpha/2 \approx 90°$. Logo,

$$\cos(90° - a_s) = \frac{y}{s/2} \Leftrightarrow y = \frac{s}{2}\cos(90° - a_s) \Leftrightarrow y = \frac{s}{2}\sin(a_s).$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} H &= d\sin(a_s) \approx 2y\cot(\alpha)\sin(a_s) \approx s\sin^2(a_s)\cot(\alpha) \\ &\approx (e + P\cot(a_s))\sin^2(a_s)\cot(\alpha) \\ &\approx (e\sin^2(a_s) + P\cos(a_s)\sin(a_s))\cot(\alpha) \end{aligned}$$

ou seja, fazendo $K = e\sin^2(a_s) + P\cos(a_s)\sin(a_s)$ temos

$$H = K\cot(\alpha). \tag{1}$$

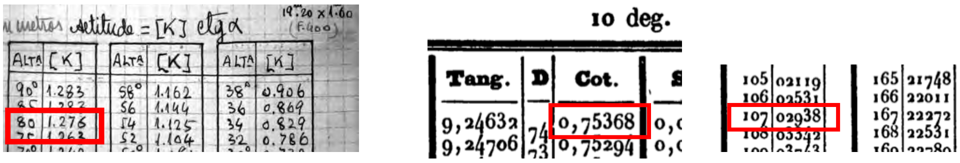
Observemos que e e P são valores fixos para uma determinada aeronave. No caso particular do biplano usado na travessia do Atlântico Sul temos que $e = 19{,}2$ metros e $P = 1{,}6$ metros. Logo, o valor da constante K é dado por

$$K = 19{,}2\sin^2(a_s) + 1{,}6\cos(a_s)\sin(a_s)$$

ou seja, o seu valor depende apenas de a_s, ou seja, da altura do Sol. Gago Coutinho constrói uma tabela com os valores de $\log K$ para valores de a_s a variar entre 20° e 90°. Todos os logaritmos considerados são logaritmos de base 10. (Figura 2(a))

Na prática, para determinar a altitude da aeronave durante o voo era apenas necessário medir, com um sextante, o ângulo da sombra das asas do biplano na superfície do mar. Suponhamos que o ângulo medido é de 10° e que a altura do Sol no instante da medição é de 80°. Consultando a tabela da Figura 2(a) para 80° obtém-se $\log K = 1{,}276$. De seguida Gago Coutinho consultaria a *Table de Logarithmes*, de J. Hoüel [3] para determinar o valor de log(cot(angulo da sombra)). Neste caso particular $\log(\cot(10°)) = 0{,}75368$ (Figura 2(b)).

Pela equação (1) tem-se $\log \text{Altitude} = \log K + \log(\cot(10°)) = 2{,}029$, ou seja, $\text{Altitude} = 10^{2{,}029}$. Para terminar o processo bastaria determinar o valor de $10^{2{,}029}$, ou seja, procurava-se nas tábuas de logaritmos o valor entre 100 e 1000, neste caso mais próximo de 100, que melhor aproximaria 029. O valor em causa seria 107 (Figura 2(c)), concluíndo-se que a altitude da aeronave seria de 107 metros.



(a) (b) (c)

Figura 2: (a) Extracto da tabela com os valores de $\log K$ (fonte: [4] p. 312). (b) Valor de $\log(\cot(10°))$. (c) Valor de $10^{2{,}029}$ (fonte: [3], p. 51, p. 2).

Agradecimentos: Teresa Sousa foi parcialmente financiada por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., no âmbito do projeto UIDB/00297/2020 (Centro de Matemática e Aplicações).

Referências

[1] S. Cabral e G. Coutinho, "A Navegação Aérea", *Anais do Clube Militar Naval*, Vol. 10–12 (1922), pp. 301–422.

[2] A. C. Canas, M. R. Marabujo e T. Sousa, "Coutinho's Method for the Altitude", *The Journal of Navigation*.

[3] J. Hoüel, *Tables de Logarithmes a Cinq Décimales pour Les Nombres et les Lignes Trigonométriques*. Gauthier-Villars, Paris, 1987.

[4] J. M. Pereira, "Os Céus de Gago Coutinho e Sacadura Cabral", *Memórias 2012, Academia de Marinha*, Lisboa, Vol. 42 (2015), pp. 263–321.

34.º Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática

Auditório Municipal António Chainho, Santiago do Cacém
Encontro realizado presencialmente e online na plataforma Zoom
3 e 4 de Dezembro de 2021

Introdução

Luis Saraiva[1]
(Coordenador Nacional do SNHM, CIUHCT, DM da FCUL)

A realização deste Encontro do SNHM teve para o Seminário o desafio de realizar pela primeira vez um Encontro que teria simultaneamente participantes presenciais e online, estes utilizando a plataforma Zoom.

Temos de louvar a acção da equipa técnica da Câmara de Santiago do Cacém, coordenada por Rui Gonçalves, e incluíndo Carlos Gonçalves, Rui Teixeira e Bruno Moreira, que garantiram o bom decorrer de todo o Encontro, incluindo a monitorizacão do som e da luz das sessões, e possibilitando a quem estava online não só ter uma visão dos conferencistas e dos seus power points, mas igualmente uma visão de conjunto da sala onde decorreram as sessões, permitindo-lhes uma maior proximidade virtual dos participantes presenciais.

Foi o nosso primeiro Encontro presencial desde 2019, e podemos dizer que decorreu em completa normalidade, sempre com as devidas precaucões inerentes à pandemia — só se aceitaram inscrições presenciais para quem tivesse um certificado de vacinação, e mantendo-se as precauções básicas ao longo do Encontro. Deste modo regressámos aos ambientes usuais dos Encontros do SNHM, com as trocas de impressões dentro e fora da sala de conferências, o conviver como grupo durante os dois dias do Encontro, algo que nos fez sentir como parte de um projecto coletivo comum.

Queremos também agradecer a toda a Comissão Organizadora local, e muito especialmente à sua coordenadora, Dra. Ana Maria Vieira, o empenho que colocaram na realização do Encontro em todos os seus pormenores e na recepção aos participantes. É sempre muito tocante constatar essa genuína intenção de fazer o melhor possível, que nos fez sentir a todos o especial que foram os dois dias deste Encontro. Tivemos no seu início uma curta exibição de dança contemporânea por alunos do Agrupamento de Escolas de Santiago do Cacém; após o excelente jantar do Encontro houve uma sessão de cantares alentejanos pelo agrupamento de Cercal do Alentejo; e no sábado de manhã tivemos uma interessante e esclarecedora visita guiada ao centro histórico de Santiago, que incluiu o Castelo e o Jardim da Tapada do Palácio dos Condes de Avillez.

Estendemos os nossos agradecimentos à Câmara Municipal de Santiago do Cacém, e ao seu presidente, Dr. Álvaro Beijinha, ao Agrupamento de

[1]Agradecimentos institucionais são devidos à *Fundação para a Ciência e a Tecnologia* de Portugal no âmbito do projeto UIBD/00286/2020.

Escolas de Santiago do Cacém, na pessoa do seu Director, Dr. Manuel Mourão, que desde o início apoiaram esta iniciativa, permitindo-nos a utilização do Auditório Municipal António Chainho, disponibilizando os técnicos que garantiram, quanto ao som, luz e informática, o bom decorrer das sessões. Tivemos igualmente a colaboração de um grupo de alunos e ex-alunos do Agrupamento de Escolas de Santiago do Cacém, que contribuiram para que tudo corresse bem. A todos agradecemos os contributos dados, e muito em especial a Rui Filipe Sousa Santos, que nos acompanhou de perto em todas as sessões, dando todo o apoio pedido.

Houve ainda todo um conjunto de instituições da zona de Santiago do Cacém que apoiaram o Encontro e a quem são devidos os nossos agradecimentos: União das Freguesias de Santiago do Cacém, Santa Cruz e São Bartolomeu da Serra; Casa do Povo de Cercal do Alentejo; Cafés Delta; Herdade do Cebolal; Hotel Dom Nuno e Restaurante Mercado à Mesa.

"Last, but not least", como dizem os ingleses, queremos igualmente agradecer aos nossos colegas da Comissão Científica, João Caramalho Domingues e Fernando Figueiredo, que contribuiram de forma decisiva para o êxito desta realização do SNHM. De referir também que o Encontro foi acreditado pelo Conselho Científico Pedagógico da Formação Contínua, como Acção de Formação para professores Professores de Matemática do Ensino Básico e Secundário (Grupos 230, 500).

Aproveitando a possibilidade que nos deu o Zoom, tivemos entre nós seis ilustres convidados, todos com um notável currículo em história da Matemática:

Dois *Prémios Kenneth O. May*, a mais importante distinção em História da Matemática, atribuída de 4 em 4 anos pela *Comissão Internacional de História da Matemática* (ICHM): Jens Høyrup (2013) e Eberhard Knobloch (2017); o actual presidente da *Sociedade Canadiana de História e Filosofia da Matemática* e presidente entre 2009 e 2017 da ICHM, Craig Fraser; o editor das obras completas de D'Alembert e Professor Emérito da Sorbonne, Christian Gilain; o antigo presidente da *Sociedade Espanhola de História das Ciências e das Técnicas* entre 1999 e 2005, Luis Español González; e o Presidente do GEHMAT-Brasil, *Grupo Associado de Estudos e Pesquisas em História da Educação Matemática*, Wagner Valente.

Todos eles já estiveram em Portugal em realizações de História da Matemática. Os Professores Christian Gilain e Craig Fraser visitaram Lisboa em 2001, participando no Encontro Internacional sobre a História das Equações Diferenciais que teve lugar no então Complexo Interdisciplinar da Universidade de Lisboa (CIUL). O Professor Gilain voltou em 2009 a Lisboa para realizar conferências no CIUL e no Departamento de Matemática da FCUL. O Professor Eberhard Knobloch foi o convidado do 11.º Encontro do SNHM, em Aveiro, em 1999, e do 23.º Encontro, em Évora, em 2010. O Professor Jens Høyrup participou em Coimbra, em 2002, no 15.º Encontro do SNHM, integrado na Conferência Internacional "Pedro Nunes e a Ciência do seu Tempo". O Professor Wagner Valente foi conferencista convidado do 26.º Encontro do SNHM, realizado em Aveiro em 2013. Finalmente o Professor Luis Español foi conferencista no 2.º Encontro Ibérico de História da Matemática, realizado no Museu da Ciência da Universidade de Coimbra em 2016.

Duas outras conferências foram apresentadas por Zoom, de Helena Sousa Melo e Maria do Carmo Martins, e a de Luis Miguel Carolino. Por diferentes razões estes conferencistas não puderam deslocar-se a Santiago. A conferência de Luis Miguel Carolino foi feita em inglês por deferência com os convidados que não falam o português. Igualmente por este motivo a conferência de Fernando Figueiredo, embora falada em português, tinha um power point em inglês.

As comunicações abrangeram um vasto leque de temas da História da Matemática e do Ensino da Matemática, indo de temas desde a Antiguidade Grega ao século XX. Foram faladas figuras significativas da história matemática mundial, como Arquimedes, Benedetto de Firenze, Johannes Kepler, Giovanni Paolo Lembo, Gottfried Wilhelm Leibniz, Jean le Rond D'Alembert, Antonio Rosell Viciano e Henri Poincaré; foram analisadas questões da história matemática portuguesa, em particular sobre a navegação astronómica e sobre observatórios da Universidade de Coimbra no último terço do século XIX. A descrição de instrumentos antigos utilizados no traçado de curvas especiais foi assunto de uma das conferências e houve igualmente várias palestras sobre temas da história do Ensino da Matemática no século XX.

Como é costume terminarmos esta introdução, esperamos que a publicação destes resumos seja útil a todos os que os consultarem, que aumente a curiosidade de saberem mais sobre alguns destas questões, e que constitua um estímulo para futura participação em outros encontros do SNHM, quer como palestrantes quer como assistentes.

O Seminário está aberto a todos e de todos precisa.

Programa

3 de Dezembro

09.00 *Entrega de pastas*

09.30 Abertura do Encontro. Mesa: Luis Saraiva, Dr. Manuel Mourão, Diretor do Agrupamento de Escolas de Santiago do Cacém, Dr. Álvaro Beijinha, Presidente da Câmara Municipal de Santiago do Cacém, Professora Ana Jacinta Soares (via Zoom), em representação da Sociedade Portuguesa de Matemática.

09.50 *Exibição de dança contemporânea por alunos do Agrupamento de Escolas de Santiago do Cacém com o poema "Lágrima" de Amália Rodrigues, música de Carlos Gonçalves e cantado por Dulce Pontes.*

10.00 Christian Gilain (Sorbonne Université – Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche) — D'Alembert: Mathematics and the Enlightenment

11.00 *Café*

11.30 Jens Høyrup (Emeritus, Section for Philosophy and Science Studies, Roskilde University) — Benedetto da Firenze's gradual creation of symbolic linear algebra with four to five unknowns – and why he did not see the new technique as an important innovation

12.30 Luís Miguel Carolino (ISCTE - Instituto Universitário de Lisboa) — The legacy of Clavius: Giovanni Paolo Lembo and the telescopic novelties of 1610

13.00 *Almoço*

15.00 Wagner Rodrigues Valente (Universidade Federal de São Paulo, GHEMAT Brasil) — A Matemática do Ensino como Saber Profissional do Professor de Matemática

16.00 Luis Saraiva (CIUHCT, DM da FCUL, SNHM) — Lembrando Ubiratan D'Ambrósio (1932–2021)

16.30 Pedro Medeiros (Universidade de Aveiro) — O planisfério azimutal de João Carlos de Brito Capello

17.00 *Café*

17.30 Helena Sousa Melo e Maria do Carmo Martins (Dep. de Matemática e Estatística, da F. Ciências e Tecnologia, CEHu, Universidade dos Açores) — Instrumentos antigos para a construção de curvas: Lemniscata de Bernoulli

18.00 Mária Almeida (Centro Interdisciplinar de Ciências Sociais (CICS.NOVA), FCT da Universidade Nova de Lisboa) — Reforma da Matemática Moderna em Portugal: subsídios da imprensa

3 de Dezembro

(cont.)

18.30 Alexandra Rodrigues (Instituto de Gouveia – Escola Profissional, UIED) e José Manuel Matos (UNL, UIED) — Matemática Recreativa na Folha Informativa dos professores do 1.º grupo

20.00 *Jantar do Encontro*
22.00 *Sessão de Cantar Alentejano com o grupo de Cercal do Alentejo*

Programa

4 de Dezembro

09.00 Luis Español González (Professor Honorífico da Universidade de La Rioja, Departamento de Matemáticas y Computación) — Sobre *Instituciones Matemáticas* (1785) de Antonio G. Rosell Viciano (ca. 1748–1829). Formación matemática del autor y fuentes usadas para la obra.
10.00 Ana Teorgas Queirós (Escola Naval) — Latitude por duas alturas do Sol — Proposta de Cornelis Douwes

10.30 *Café*

11.00 *Passeio Social, com visita ao centro histórico de Santiago do Cacém*

13.00 *Almoço*

15.00 Eberhard Knobloch (Berlin University of Technology and Berlin-Brandenburg Academy of Sciences and Humanities) — Mathematical rigour, mathematical creativity, and the transgression of limits
16.00 Craig Fraser (Institute for the History and Philosophy of Science and Technology, University of Toronto) — Hamilton-Jacobi Theory 1860–1910
17.00 Fernando Figueiredo (DM-FCTUC/CITEUC) — A visita do Imperador do Brasil Pedro II ao Observatório Meteorológico e Magnético da Universidade de Coimbra: contribuições para uma arqueologia de um espaço científico
17.30 António Costa Canas (Escola Naval/CINAV, CHULisboa) — Cálculos de navegação astronómica usando o cronogoniómetro

18.00 Encerramento do Encontro

D'Alembert: Mathematics and the Enlightenment

Christian Gilain
Sorbonne Université
(Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche)

The mathematician and philosopher Jean le Rond d'Alembert (1717–1783), coeditor of the *Encyclopédie*, is a central figure of the Enlightenment. As a scientist, he worked in the various fields of "pure" and "mixed" mathematics. In this talk, we present a few of his research topics in the realm of pure mathematics (see [1]): the integral calculus with algebraic methods (integration of rational or irrational functions, of linear differential systems; beginning of the theory of partial differential equations); the imaginary quantities and the proof of the fundamental theorem of algebra; the foundation of infinitesimal analysis with the concept of limit.

In the light of this study, we examine d'Alembert's conception of mathematics, which is far removed from the utilitarian view often attributed to him by the historiography. Whereas some of d'Alembert's works on the integral calculus are to be situated directly in a framework of pure mathematics, other parts of his work originated in the search for solutions to mechanical problems. However, in these latter cases, d'Alembert, at a certain moment, develops a study of pure analysis with its own logic.

Moreover, for him, mathematics can play an important role in the promotion of the Enlightenment and the emancipation of society, as he argues in the article "Géomètre" of the *Encyclopédie, remarkable plea for the cultural and humanist value of mathematics* (see [2]).

References

[1] *Œuvres complètes de Jean le Rond d'Alembert*, volume I/4a, *Textes de mathématiques pures (1745–1752)*, C. Gilain (éd.), Paris : CNRS Editions, 2007.

[2] C. Gilain, « Les Lumières dans l'historiographie des mathématiques », in F. Salaün & J.-P. Schandeler (dir.), *Enquête sur la construction des Lumières*, Ferney-Voltaire : Centre international d'étude du XVIIIe siècle, 2018, p. 167–179.

Benedetto da Firenze's gradual creation of symbolic linear algebra with four to five unknowns – and why he did not see the new technique as an important innovation

Jens Høyrup
Section for Philosophy and Science Studies, Roskilde University

At an earlier occasion I have pointed to the appearance of first-degree rhetorical algebra with two unknowns in a number of sources from Fibonacci's *Liber abbaci* (1202/1228) until Luca Pacioli's *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalità* (1494), and mentioned that Benedetto da Firenze supports the argument by means of rudimentary symbolic algebra in his *Trattato di praticha d'arismetricha*.

Further analysis of Benedetto's *Praticha* reveals a number of problem solutions making use of symbolic first-degree algebra with up to five unknowns. We know the *Praticha* from Benedetto's autograph (and beyond that from two incomplete copies, which leave out what interests us here). The autograph is Benedetto's working copy, as revealed by a large number of calculations made before the verbal descriptions were written down. This allows us to see how Benedetto gradually develops and hones the technique.

The first problem of interest deals with four men finding a purse with *denari*.

> Four have denari, and walking on a road they found a purse with denari. The first and second say to the third, if you give us the purse we shall have 2 times as much as you. The second and third men say to the fourth, if we had the denari of the purse we should have 3 times as much as you. [and so on cyclically] It is asked how much each one had, and how many *denari* there were in the purse.

After having written the statement Benedetto starts calculating in a margin that soon spreads into the text column, using current standard abreviations for 1st, 2nd, 3rd, 4th and *borsa*. He writes down four equations, a process for which he introduces a technical term. Replacing Benedetto's standard abbreviations by Greek letters we may write them thus:

$$\begin{aligned}
\gamma &= \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}b,\\
\delta &= \tfrac{1}{3}\beta + \tfrac{1}{3}\gamma + \tfrac{1}{3}b,\\
\alpha &= \tfrac{1}{4}\gamma + \tfrac{1}{4}\delta + \tfrac{1}{4}b,\\
\beta &= \tfrac{1}{5}\alpha + \tfrac{1}{5}\delta + \tfrac{1}{5}b.
\end{aligned}$$

(addition is indicated in the manuscript by juxtaposition, equality by enlarged distance). Stepwise, Benedetto then eliminates three of the unknowns. That brings him back to a situation he has already dealt with, a system with 2 unknowns q (for *quantità*) and b (for *borsa*). The writing is somewhat disorderly, the various sections of the calculation being separated by curved lines representing the "chambers" of a "castelet".

Benedetto appears not to regard his new technique as revolutionary, and from his own perspective he is right. The problem is borrowed from Fibonacci's *Liber abbaci*, where it is solved by a purely verbal argument following the same lines. We may suspect Fibonacci to have used a line diagram as basis for his thought (he shows them elsewhere, but only in borrowed problems), and Benedetto may have had the same suspicion. He therefore had good reasons to regard the advance as marginal.

Marginal or not, Benedetto was still aware to have produced something new. Sligthly later comes a problem about four men buying a horse which none of them can afford on his own. Benedetto states that "there are many ways to solve such cases. I shall take the most convenient, or let us say the least tedious" — and that turns out to be his new metod. The calculation is still not quite orderly, but now a technical term for the elimination is introduced.

In another horse-buying problem, the same technique is used, now getting the name "by equation" — and now the calculations are as orderly as could be asked from a modern mathematics teacher calculating on the blackboard. And in yet another horse-buying Benedetto only explains how to produce the first equation, for the rest referring the reader to the symbolic calculation for which he has prepared space on the page — unfortunately forgetting to fill it out. But at least we see that now he supposes his reader to be better served by the symbolic than by the rhetorical exposition. The cake is baked and ready to be eaten. And Benedetto leaves matters there for his readers.

It appears, however, that his readers either did not look carefully at that part of his extensive treatise, or did not find it worthwhile to learn and emulate. Next times something similar turns up is (to my knowledge) in Stifel's *Arithmetica integra* from 1544. Stifel introduces principles that allow naming of unknowns ad libitum and even of their powers and products. Stifel appears not to know about what Benedetto had done and instead generalizes from Cardano's and Rudolff's use of two unknowns *thing* and *quantity*. Stifel's examples, however, are trivial, which may explain that even he remained uninfluential (a possible exception being Buteo, who in 1559 did something similar to what Benedetto had done while using symbols that may come from Stifel).

We may wonder at these repeated dead ends. But we probably shouldn't. Benedetto had used his technique to attack classical recreational problems where it was not really needed, as Benedetto says himself. What Stifel and Buteo offered was not qualitatively different. A leap only appeared in the the intellectually competitive context of the 17th century. Here, mathematicians had to prove their valour on problems inspired by Archimedes, Apollonios and Pappos. In order to tackle *these*, as Viète as well as Descartes point out, a *new* kind of algebra was needed. That brought about the end of dead ends.

Bibliography, chronologically ordered:

Benedetto's manuscript is Siena, Biblioteca degl'Intronati, L.IV.21.

Michael Stifel, *Arithmetica integra.* Nürnberg: Johan Petreius, 1544.

Joannes Buteo, *Logistica.* Lyon: Guillaume Rovillé, 1559.

Høyrup, "Reinventing or Borrowing Hot Water? Early Latin and Tuscan Algebraic Operations with Two Unknowns". *Gaṇita Bhārati* **41** (2019, published 2021), 115–159.

The legacy of Clavius: Giovanni Paolo Lembo and the telescopic novelties of 1610

Luís Miguel Carolino
Iscte – Instituto Universitário de Lisboa, CIES

In the last edition of his *Commentarius in sphaeram Ioannis de Sacrobosco*, published in 1611, Christoph Clavius urged astronomers to work out an astronomical solution that integrated the ground-breaking Galilean novelties of 1610. As the Collegio Romano mathematics professor stated, "since this is so, astronomers ought to see how the celestial orbs may be arranged in order to save the phenomena". What was the real meaning of Clavius's plea? This paper approaches this question by analysing the astronomical work of the Jesuit Giovanni Paolo Lembo.

Lembo was an accomplished telescope maker and astronomical observer, having played a crucial role in the telescopic observations carried out at the Collegio Romano between 1610 and 1611. In April 1611, Clavius himself acknowledged the central role played by Lembo in these telescopic observations. In a letter addressed to Cardinal Robert Bellarmine, who had asked the Collegio Romano mathematicians for their opinion on the new celestial phenomena observed through the telescope, Clavius made Lembo sign the letter together with him, Christoph Grienberger and Odon van Maelcote. In this missive, the four Jesuit astronomers responded affirmatively to each of the five queries previously put by Bellarmine. They thereby recognized how telescope observations had revealed that there were indeed a great number of stars in the nebulas of Cancer and Pleiades, though it remained not entirely clear whether the Milky Way was made up of minute stars; that Saturn was not round like Jupiter and Mars although they were unable to clearly depict three distinct stars; that Venus did actually wax and wane although they said nothing about its potential cosmological implications; that the Moon's surface did appear uneven even though Clavius attributed this appearance to variations in the density of the Moon's body; and finally, that there were four stars moving quickly and in almost a straight line around Jupiter.

Furthermore, Lembo was one of the closest collaborators of Clavius and an advocate of his astronomical ideas. He endorsed Clavius's traditional ideas of celestial solidity and perfection.

The question is, then, how could he stand for these traditional ideas and simultaneously incorporate the output of telescopic observations? Lembo circumvented this difficulty by putting forward a partially geo-heliocentric planetary system, which differed radically from that of Tycho Brahe. Based upon the principle of celestial solidity and the astronomical evidence regarding the phases of Venus and Mercury, the Italian astronomer argued that Venus and Mercury moved around the Sun in epicycles with their centres coinciding with the Sun's centre. Thus, the Sun, Venus and Mercury occupied a shared and solid orb: "having shown and proven this [the phases of Venus and Mercury], who would disagree in placing the Sun, Venus and Mercury in the same orb, excluding at least two orbs from the number traditionally recognized so far [...]?" (Lembo, *Tratado da Esfera*, Arquivo Nacional da Torre do Tombo, Lisbon, Manuscrito da Livraria 1770, fol. 36r.). The Sun, together with the remaining planets (Moon, Mars, Jupiter and Saturn) and the fixed stars, were supposed to move inside solid orbs concentric to the Earth. Three further celestial spheres were factored in order to account for the precession of the equinoxes (firmament), the two oscillatory movements and diurnal motion (Primum mobile). The Empyrean heaven thus acted to seal the universe.

In putting forward this planetary system, Lembo came to terms with the telescopic novelties and particularly with the brand new observations of the phases of Venus and Mercury. Furthermore, he did this without jeopardizing the traditional Aristotelian-Ptolemaic cosmology then endorsed by Clavius and the majority of Jesuit mathematicians and philosophers. In fact, while arguing that Venus and Mercury moved around the Sun in a common orb, he maintained the cosmological postulate of the solidity of the heavens and maintained the explanation of the dynamics of celestial bodies dynamics as resulting from the motions of the spheres.

These two principles stemmed from the foundations of his Aristotelian-Ptolemaic worldview, and particularly from the need to comply with Aristotle's postulate stipulating heavenly bodies experienced one single, regular and circular motion around a unique cosmic centre. Thus, it would seem highly plausible that Lembo's astronomical solution aligned with an appropriate understanding of Clavius's plea when the German Jesuit urged astronomers to rearrange the "celestial orbs" (*orbes coelestes*) so that the Galilean novelties could be successfully integrated. From this point of view, Lembo's system configured a sort of conservative and yet updated response to the Galilean telescopic novelties. Other Jesuit astronomers, not directly connected to Clavius's team at the time of the Collegio Romano telescopic observations, took different understandings of this plea. In subsequent years, these astronomers were then to push for the official adoption of Tychonism by the Jesuit authorities.

Bibliography

BALDINI, Ugo, "Giovanni Paolo Lembo's lessons in Lisbon: a partial content analysis", in Luís Saraiva (org.), *Proceedings of the International Conference History of Astronomy in Portugal, Institutions, theories, practices*, Porto, Sociedade Portuguesa de Astronomia, 2014, pp. 123–181.

CAROLINO, Luís Miguel, "Between Galileo's Celestial Novelties and Clavius's Astronomical Legacy: The Cosmology of the Jesuit Giovanni Paolo Lembo (1615)", *Galilaeana. Studies in Renaissance and Early Modern Science*, 17 (2020), pp. 193–217.

LATTIS, James M., *Between Copernicus and Galileo. Christoph Clavius and the Collapse of Ptolemaic Cosmology*, Chicago and London, The University of Chicago Press, 1994.

LERNER, Michel-Pierre, "L'entrée de Tycho Brahe chez les jésuites ou le chant du cygne de Clavius", in Luce Giard (ed.), *Les Jésuites à la Renaissance. Système éducatif et production du savoir*, Paris, Presses Unversitaires de France, 1995, pp. 145–185.

REEVES, Eileen and VAN HELDEN Albert, "Verifying Galileo's discoveries: telescope-making at the Collegio Romano", in Jürgen Hamel and Inge Keil (eds.), *Der Meister und die Fernrohre: das Wechselspiel zwischen Astronomie und Optik in der Geschichte*, Frankfurt am Main, H. Deutsch, 2007, pp. 127–141.

A matemática do ensino como saber profissional do professor de matemática

Wagner Rodrigues Valente
Universidade Federal de São Paulo / GHEMAT Brasil

Por que considerar como tema de pesquisa o saber profissional do professor? A resposta à pergunta vem sendo dada, ao que parece, desde a década de 1960. Um dos primeiros teóricos a enfatizar a necessidade de investigações sobre o assunto é Lee Shulman (FERNANDEZ, 2015). A partir de seus estudos, vai sendo reafirmada a necessidade de caracterização de um saber específico para a docência, um saber que distingue a profissão docente das demais profissões.

O esforço de caracterização da docência como profissão acentua-se, no entanto, a partir da década de 1980, onde o foco dos estudos, com vistas à profissionalização, atém-se ao saber, numa "tentativa de reformular e renovar os fundamentos epistemológicos do ofício de professor e de educador, assim como da formação para o magistério" (TARDIF, 2000, p. 13). Intenta-se a construção de um repertório de saberes próprios ao ensino.

O pioneirismo de Lee Shulman resultou num verdadeiro paradigma para a pesquisa sobre o saber profissional do professor. Haja vista que, depois dele, uma multiplicidade de autores vem construindo variadas tipologias, como propôs inicialmente Shulman. As tipologias sobre as quais embasam suas pesquisas, levam os autores a considerar, por meio delas, a singularidade do saber profissional da docência, comparativamente a saberes ligados a outros campos de trabalho (HOFSTETTER; VALENTE, 2017).

Um tanto diferente do paradigma que considera uma variada gama de tipos de saberes, estabelecidas por Shulman, iremos reter a caracterização dada por Hofstetter; Schneuwly (2017) que apontam haver, para o saber profissional da docência, tão somente dois tipos: os saberes a ensinar e os saberes para ensinar. Tal caracterização, mesmo sendo datada dos dias atuais, poderá ser mobilizada para análise de tempos passados, tendo em vista que, em qualquer época, estão em discussão os temas do ensino e da formação de professores. E um dos aspectos centrais dessa discussão refere-se ao saber. O saber que referencia o ensino e aquele que integra a formação do futuro professor. Assim, sem correr o risco do anacronismo, pode-se, historicamente, tratar o saber disposto para ser ensinado como um saber a ensinar. Tal saber refere-se ao saber como objeto de ensino: aquilo que está consolidado como saber para o professor ensinar a seus alunos. Também é plausível considerar o saber de formação do professor, considerado

Suplemento do Boletim da SPM 79, Dezembro 2021, pp. 193–195

como um saber para ensinar, que diz respeito às ferramentas que o professor deverá ter para o exercício da docência de um dado saber a ensinar, numa dada época. Desse modo, objeto de ensino e ferramentas para o ensino constituem aparato conceitual que poderá ser utilizado na análise de épocas passadas com o fim de caracterizar um dos ingredientes do ensino, quiçá o mais importante deles: o saber (VALENTE et al., 2021). E, ainda, tendo em consideração o saber a ensinar e o saber para ensinar, torna-se possível a análise da articulação desses dois saberes, em cada tempo que, por hipótese teórica, constitui a representação do saber profissional do professor.

Isto posto, ainda cabe levar em conta que, no caso dos estudos ligados à matemática, poderemos tratar de uma matemática a ensinar, objeto de ensino do professor; e de uma matemática para ensinar, ferramenta que o professor deverá mobilizar para o ensino da matemática. Também, a articulação entre objeto de ensino e ferramenta para o ensino caracteriza teoricamente o saber profissional do professor. Tal saber denominamos de matemática do ensino. Isto é, a relação estabelecida entre a matemática a ensinar e a matemática para ensinar identifica o objeto teórico de pesquisa ao qual tratamos por matemática do ensino. Tal matemática revela o saber profissional do professor que ensina matemática (BERTINI; MORAIS; VALENTE, 2017).

A pesquisa histórica sobre o saber profissional do professor que ensina matemática, a matemática do ensino, deve ser entendida como uma construção teórica oriunda de sistematizações das experiências docentes realizadas numa dada época escolar. O saber profissional não representa um dado empírico, algo a ser apenas e tão somente nomeado, coletado do mundo fenomenológico. Na investigação do saber profissional, o posicionamento epistemológico trata o real, o que se quer conhecer, como um objeto a ser teoricamente construído. “Ou seja, o real a ser conhecido não é o real na sua plenitude de aparência, mas é o real que aparece teoricamente, que é construído no pensamento” (BORBA; VALDEMARIN, 2010, p. 26). Em específico, trata-se da construção de um objeto histórico pelo historiador, “já que o passado nunca é um objeto que já está ali” (CHARTIER, 2009, p. 16).

Sob essa perspectiva de análise, sendo a matemática do ensino tomada como objeto de conhecimento, o processo de sua construção deverá promover uma abstração a partir das experiências docentes, intentando, num dado tempo, verificar como tratá-las como conhecimento e, posteriormente, verificar a possibilidade desse conhecimento ser considerado como um saber.

Referências bibliográficas

BERTINI, L. F.; MORAIS, R. S.; VALENTE, W. R. *A matemática a ensinar e a matemática para ensinar — novos estudos sobre a formação de professores*. São Paulo: L F Editorial, 2017.

BORBA, S.; VALDEMARIN, V. T. A construção teórica do real: uma questão para a produção do conhecimento em educação. *Currículo sem Fronteiras*, 2010, v. 10, n. 2, p. 23–37, jul./dez.

CHARTIER, R. *A história ou a leitura do tempo*. Belo Horizonte, MG: Autêntica Editora, 2009.

FERNANDEZ, C. Revisitando a base de conhecimentos e o conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK) de professores de ciências. *Revista Ensaio*. Belo Horizonte, 2015, v. 17, n. 2, p. 500–528.

HOFSTETTER, R.; VALENTE, W. R. (Orgs.) *Saberes em (trans)formação: tema central da formação de professores*. São Paulo: L F Editorial, 2017.

HOFSTETTER, R.; SCHNEUWLY, B. Saberes um tema central para as profissões do ensino e da formação. In R. Hofstetter; W. R. Valente. *Saberes em (trans)formação — tema central da formação de professores*. São Paulo: L F Editorial, 2017.

TARDIF, M. Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários. Elementos para uma epistemologia da prática profissional dos professores e suas consequências em relação à formação para o magistério. *Revista Brasileira de Educação*. 2000, jan./abr., no. 13.

VALENTE, W. R. (Org.) *Ciências da Educação, Campos Disciplinares e Profissionalização: saberes em debate para a formação de professores*. São Paulo: L F Editorial, 2020.

VALENTE, W. R. et al. (Orgs.) Experts — *saberes para o ensino e para a formação de professores*. L F Editorial, 2021.

Lembrando Ubiratan D'Ambrosio (1932–2021)

Luis Saraiva
CIUHCT, DM da FCUL/Universidade de Lisboa

Nesta comunicação demos uma perspectiva global sobre a vida e obra de Ubiratan D'Ambrosio, com especial relevo para o seu trabalho em História da Matemática e da Ciência, e em particular a sua ação no que se refere à comunidade luso-brasileira de História da Matemática. Realçou-se igualmente a imensa qualidade humana do Professor.

Começou a sua actividade como professor em 1952, no Estado de S. Paulo. Terminou em 1955 o Curso de Matemática na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de S. Paulo (USP), e concluiu o seu doutoramento em Ciências Matemáticas na Escola de Engenharia de S. Carlos (USP) em 1963. Em 1961 passou a leccionar no curso de Matemática da então recém-criada Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Rio Claro, aí permanecendo até à sua ida para os Estados Unidos, para realizar uma especialização pós-doutoramento na Universidade de Brown. Devido à situação criada no Brasil em 1964, com a ditadura militar, Ubiratan ficou nos Estados Unidos cerca de nove anos, leccionando na Brown University (1964–65), na Universidade de Rhode Island (1966–68), e na State University of New York (1965–66 e 1968–72). Em 1970 doutora-se o seu primeiro orientado americano, T. K. Puttaswamy. Só regressa ao Brasil em 1972, a pedido do Professor Zeferino Vaz, reitor da então recém-criada Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), para ser o Director do Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, cargo que exerceu até 1980, tendo sido um dos responsáveis pelas contratações feitas para o instituto, que lhe vão dar reputação internacional em todos os seus campos. É um dos fundadores do Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência (CLE) na UNICAMP, em 1977, e nesse ano há o primeiro doutoramento de um seu orientado no Brasil, Rodney Bassarezzi. É coordenador de Institutos na UNICAMP (1982–86), e Pró-Reitor do Desenvolvimento Universitário (1986–90). Aposenta-se em 1992. É Professor Emérito da UNICAMP em 1995.

Muitas foram as áreas e as organizações em que colaborou, quer brasileiras quer internacionais. Foi consultor da UNESCO – *United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization* (1970–90). Foi Diretor do Projeto Multinacional para a Melhoria do Ensino de Ciências e de Matemática da *Organização dos Estados Americanos* (OEA) (1974–83). Foi membro do Conselho Executivo das *Pugwash Conferences on Science and*

World Affairs entre 1980 e 1986. A esta organização foi atribuído o Prémio Nobel da Paz em 1995, em conjunto com Joseph Rotblat. Entre 1998 e 2002 foi membro do *Institut for Information Technologies in Education* da UNESCO, instituto criado em 1997.

Desenvolveu trabalho importante em História da Matemática e em História da Educação Matemática, tendo recebido nas duas áreas as distinções mais importantes nessas áreas: o *Prémio Kenneth O. May* em 2001, atribuído pela *Comissão Internacional de História da Matemática* de quatro em quatro anos, e a *Medalha Felix Klein* em 2005, distinção da *Comissão Internacional de Instrução Matemática* (ICMI), comissão da *União Matemática Internacional* (IMU), e que é atribuída de 2 em 2 anos.

Foi elemento fundador do HPM – *International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics*, e seu presidente (1984–88); Presidente da *Sociedade Latino-Americana da História das Ciências e da Tecnologia* (1988–92); membro do Comité Executivo da *International Comission on the History of Mathematics* (1989–97); fundador da *Sociedade Brasileira de História da Ciência* em 1991 e seu Presidente (1991–93); fundador da *Sociedade Brasileira de História da Matemática* (SBHMat) em 1999, e seu presidente entre 1999 e 2007; membro do Conselho Consultivo da *Associação de Filosofia e História da Ciência no Cone Sul* entre 2000 e 2004.

O meu primeiro contacto com Ubiratan foi feito durante o Colóquio Internacional realizado em Lisboa em 1987 para comemoração do distinto matemático José Anastácio da Cunha (1744–1787), onde o Professor D'Ambrosio apresentou uma comunicação. Desde então mantivemo-nos sempre em contacto. O Colóquio proporcionou uma reunião dos muitos que se interessavam pela história da Matemática Portuguesa, constatou-se um vazio na investigação nessa área e foi criado o *Seminário Nacional de História da Matemática* (SNHM) no início de 1988. O Professor Ivor Grattan-Guinness, também participante daquele Colóquio Internacional, deu-nos uma ajuda importante para fixar as linhas gerais do que devia ser o funcionamento do SNHM. Uma das regras (que tem sido sempre observada) é ter um convidado não português em todos os Encontros do SNHM. No 1.º Encontro, realizado em 1988 na U. do Minho, foi o Professor D'Ambrosio o nosso primeiro convidado. Esteve também nos Encontros 8.º (1996), 9.º (1997) e 19.º (2006).

Para além de ter sido fundamental a sua ação aglutinadora e de desenvolvimento da comunidade brasileira de historiadores da matemática e do ensino da matemática, Ubiratan foi igualmente importante na criação dos

Encontros Luso-Brasileiros de História da Matemática e a sua actividade em Portugal. Em 1990 o SNHM, consciente da necessidade de ter o contacto de especialistas estrangeiros em História da Matemática, organizou uma Escola de Verão em Évora em 1990. O Professor Ubiratan, sempre atento ao que se passava nesse domínio, aconselhou o seu aluno Sergio Nobre, que estava a preparar doutoramento em Leipzig em História da Matemática sob a orientação de Hans Wussing (Prémio Kenneth O. May em 1993), a assistir a esta Escola. Foi aí que se começou uma relação mais intensa com os investigadores brasileiros, com a criação dos Encontros Luso-Brasileiros de História da Matemática (o 1.º na Universidade de Coimbra em 1993), Encontros esses que se têm vindo a realizar regularmente, com a edição das respectivas Actas[1], oito até hoje, o 9.º está marcado para Outubro deste ano em Setúbal.

Alguma Bibliografia

Ubiratan D'Ambrosio – Para uma história da Etnomatemática ou a matemática dos não-matemáticos – Actas do IV Encontro Luso Brasileiro de História da Matemática, Natal, SBHMat, 2005, pp. 199–213

Ubiratan d'Ambrosio – Um estudo de história institucional da matemática no Brasil do pós-guerra – Actas do 5.º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática, Castelo Branco, CM de Castelo Branco, 2011, pp. 111–122

Sergio Nobre e Luís Saraiva – Ubiratan D'Ambrosio (1932–2021) In Memoriam – *International Archive of the History of Sciences*, Vol. 71, n.º 187, 2021, pp. 177–200.
(inclui uma lista das publicações de Ubiratan nas páginas 187-200)

[1] Uma excepção: o 3.º Encontro, havendo ainda esperança de publicação das suas Actas.

O Planispherio Azimuthal de João Carlos de Brito Capello

Pedro Medeiros, *Vitor Bonifácio* e *Paulo Lopes*
Departamento de Física, Universidade de Aveiro

Este trabalho pretende dar a conhecer um instrumento náutico, o Planisfério Azimutal, inventado, na década de 1860, pelo oficial de marinha João Carlos de Brito Capello (1831–1901). O dispositivo permitia obter com rapidez o azimute, A, verdadeiro de um astro, sendo conhecidas a latitude do local de observação, ϕ, e a declinação, δ, e altura, h, do astro.

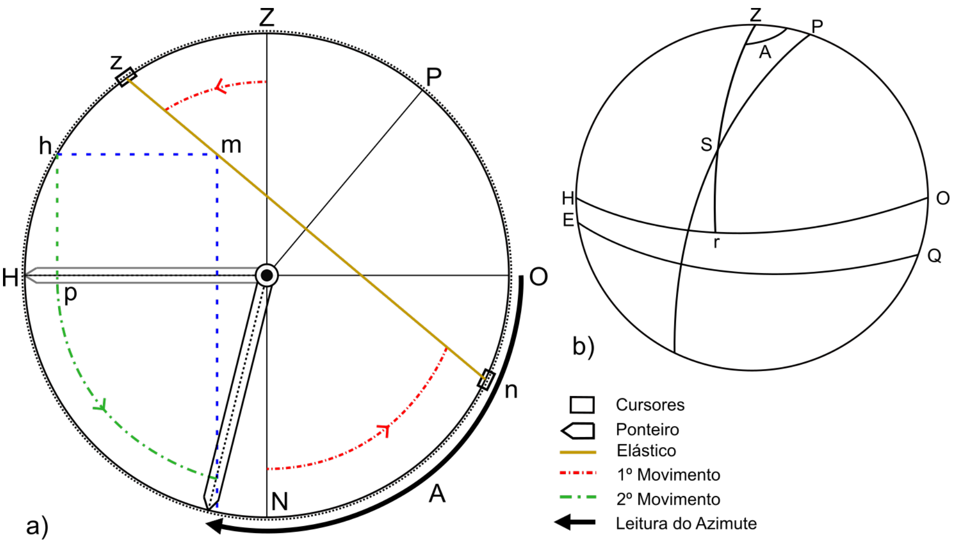


Figura 1: Face simplificada do planisfério azimutal (a) e da esfera celeste (b). Para a definição dos símbolos consulte-se o texto.

O instrumento possuía forma circular, 25 cm de diâmetro, continha dois cursores, um elástico e um ponteiro transparente graduado no valor dos cossenos de 0 a 90 graus. O semi-círculo superior (HZO) da face do instrumento correspondia ao semi-plano do meridiano do lugar, em que Z é o zénite. Este incluía linhas verticais e horizontais de grau em grau, enquanto que o semi-círculo inferior era atravessado pelo prolongamento das linhas verticais presentes na metade superior (não representadas na figura 1). As linhas horizontais representam a interceção entre os planos do meridiano e dos almicantarados, isto é os círculos menores paralelos ao horizonte. Os dois cursores deslocam-se a partir do zénite, Z, e do nadir, N, correspondendo o elástico que os une à interceção dos planos do meridiano e do paralelo de declinação do astro. O semi-círculo inferior (HNO) corresponde, na leitura do azimute, ao rebatimento do semi-plano do horizonte sobre o plano do meridiano local. No exemplo ilustrado na figura 1, P corresponde ao pólo Norte Celeste, H e O aos pontos cardeais Sul e Norte, respetivamente, e a curva EQ ao equador celeste. Para determinar o azimute marca-se primeiro a altura, h do astro. Movem-se, depois, os cursores para os pontos correspondentes aos ângulos z e n em que $z = \phi - \delta$ e $n = \phi + \delta$. As marcações horizontais e verticais permitem determinar os pontos m do elástico e p do ponteiro quando este se encontra na horizontal. Rodando o ponteiro, a interseção de p com a linha vertical que passa por m determina, neste exemplo, o azimute, A [1, 3].

O Planisfério Azimutal permitia resolver, de forma gráfica, um triângulo esférico. Na situação ilustrada na figura 1b, isto correspondia a resolver a equação

$$\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{ZS+PS+ZP}{2}\right) \times \sin\left(\frac{ZS+PS+ZP}{2} - PS\right)}{\sin(ZP) \times \sin(ZS)} \qquad (1)$$

em que A é o azimute do astro, ZS a distância zenital $(90° - h)$, PS a distância polar $(90° - \delta)$ e ZP a colatitude $(90° - \phi)$, sem consultar tabelas de logaritmos. O planisfério azimutal substituía, assim, a leitura de cinco logaritmos nas tabelas e de algumas operações aritméticas pelo cálculo dos ângulos z e n, a manipulação do instrumento e a leitura do resultado. Note-se que o instrumento pode requerer manipulações diferentes noutras combinações de latitude e declinação [1].

A referência mais antiga encontrada que refere o planisfério data de 1869. No dia 7 de junho o diretor do Observatório da Marinha, Filippe Folque (1800–1874), enviou um parecer favorável para o Ministério da Marinha em consequência do qual se determinou, por portaria de 22 do mesmo mês publicada no Diário do Governo, "que o referido planispherio azimuthal seja adoptado na armada nacional, e que o seu inventor, o primeiro tenente da armada, João Carlos de Brito Capello, seja muito especialmente louvado por ter conseguido com este seu novo trabalho scientifico dotar a marinha com mais um instrumento que facilita extremamente os usos da navegação" [6]. Na década de 1890 o Planisfério Azimutal ainda fazia parte do conjunto de instrumentos a bordo dos navios da armada Portuguesa. "Seria ocioso dar aqui a descripção do planispherio de Capello, porque é bem conhecida e, alem disso, existe publicada n'um pequeno folheto de trez paginas que é distribuido a todos os navios" [7, p. 117], e era ensinado na 1.ª cadeira da

Escola Naval [5]. O Planisfério Azimutal teve, ainda, alguma visibilidade internacional. João Brito Capello levou-o, em 1874, à Conferência Marítima de Londres [2]. No ano de 1876, o Planisfério esteve exposto na "South Kensington Instrument Exhibition", uma das iniciativas realizadas com o objetivo de melhorar o ensino das ciências no Reino Unido [4].

Foi assim, com surpresa, que não conseguimos encontrar um exemplar do instrumento. Quais as razões que levaram ao seu abandono? Desenvolvimento de instrumentos mais precisos? Aparecimento de métodos mais práticos para a determinação do Azimute? Não o sabemos. Fontes coevas referem "um tão util apparelho e tão simples que qualquer o póde executar por suas mãos com a maior facilidade" [7, p. 120].

Com este trabalho pretendemos relembrar a existência de um instrumento de navegação de invenção portuguesa e reflectir sobre a necessidade de preservar e valorizar o património instrumental, nomeadamente o de construção mais frágil.

Referências

[1] J. Capello, *Planispherio Azimuthal*, Imprensa Nacional, Lisboa, 1869.

[2] J. Capello, "Conferencia meteorologica e marítima", *Diario do Governo*, No. 263 (1874), pp. 1893–1895.

[3] J. Capello, *Azimuthal Planisphere*, Imprensa Nacional, Lisboa, 1876.

[4] V. Bonifácio e I. Malaquias, "Portugal and the 1876 South Kensington Instrument Exhibition", *Quaderns d'História de l'Enginyeria*, Vol. XIII (2012), 115–131.

[5] P. Carvalho, "Programma da primeira cadeira da Escola Naval", *Diario do Governo*, No. 275 (1895), pp. 3257.

[6] J. Coelho, "Direcção Geral da Marinha, 1ª Repartição", *Diario do Governo*, No. 139 (1869), pp. 768.

[7] V. Costa, "Algumas reflexões aobre o methodo para resolver graphicamente o triangulo espherico determinativo da posição de um astro", *Anais do Club Militar Naval*, Vol. XXIII. No. 4 (1893), 115–122.

Instrumentos antigos para a construção de curvas: Lemniscata de Bernoulli

Helena Sousa Melo, *Maria do Carmo Martins*
Faculdade de Ciências e Tecnologia e Centro de Estudos Humanísticos, Universidade dos Açores

No Museu de História Natural e Instrumentação Científica da Universidade de Modena e Reggio Emília, fundado em 1990, podemos encontrar uma coleção, com mais de 200 peças, de reconstruções artesanais dos instrumentos antigos, de acordo com as descrições contidas na literatura científico-técnica, numa ligação entre a matemática e a mecânica, e consoante as propriedades específicas de cada uma das curvas que as distinguem como lugares geométricos. Como um exemplo desses instrumentos, iremos destacar aquele que permite traçar a Lemniscata de Bernoulli.

Jacob I nasceu na Basileia em 6/01/1655 e faleceu em 16/08/1705 na mesma cidade. Influenciado pelos pais, estudou Filosofia e Teologia, tendo obtido o Mestrado em Filosofia na Universidade de Basileia em 1671 e, cinco anos mais tarde, a licenciatura em Teologia. Contra a vontade dos pais, estudou também Matemática e Astronomia, vindo a lecionar Matemática na mesma universidade até à sua morte. Em parceria com o seu irmão Johann I, estudou e difundiu o cálculo de Leibniz na Europa, deixando vários artigos publicados em jornais científicos da época e uma obra incompleta intitulada *Ars Conjectandi*. Na área da matemática e da física, a família Bernoulli destacou-se por ter dado ao mundo, durante um século, oito eminentes matemáticos.

Jacob era fascinado por curvas matemáticas e pelo cálculo diferencial. Em setembro de 1694, Bernoulli introduziu a lemniscata, como uma modificação de uma elipse, apresentando-a na página 336 da revista científica mensal alemã *Acta Eruditorum*, fundada entre 1682 e 1782. A lemniscata foi então descrita, como semelhante a uma fita com laço e sendo o lugar geométrico dos pontos do plano cujo produto das distâncias a dois pontos fixos é constante e igual ao quadrado da metade da distância entre esses dois pontos.

A Lemniscata de Bernoulli é uma curva algébrica de quarto grau, sendo um caso especial da Oval de Cassini, uma curva estudada pelo matemático e astrónomo italiano Giovanni Domenico Cassini (1625–1712). Esta, por sua vez, é o lugar geométrico dos pontos do plano cujo produto das distâncias a dois pontos fixos é uma constante. A realçar que tal curva já tinha sido estudada pelo matemático grego Eudoxo de Cnido (390–337 a. C.) aquando do movimento da Terra vista a partir do seu centro, sendo então conhecida por "hipópeda". A palavra Lemniscata deriva do latim "lēmniscātus" que significa "decorado com fitas" e do grego "λημνίσκος", que significa "fita".

O instrumento que constrói a Lemniscata de Bernoulli é da autoria do engenheiro mecânico escocês, James Watt (19/01/1736–25/08/1819), responsável pelo desenvolvimento da máquina a vapor. O mecanismo de Watt consiste de uma série de três hastes, duas longas e de igual comprimento nas extremidades da cadeia, ligadas por uma terceira haste curta no meio. As extremidades são fixas em relação uma à outra, e as três hastes são livres para girar em torno das articulações onde elas se encontram. Assim, considerando a ligação do comprimento fixo entre as extremidades, a invenção de Watt é um exemplo de um mecanismo de quatro barras. Esse instrumento não gera um movimento em linha reta, mas uma curva em forma de oito, denominada curva de Watt. Quando os comprimentos das suas hastes e da sua base são escolhidos para formar um paralelogramo cruzado, obtemos a Lemniscata de Bernoulli.

Watt, em 1784, ao estudar a curva que descreve o lugar geométrico do ponto médio, M, do segmento de reta $[AB]$ da articulação de um quadrilátero entrecruzado $[ABF_2F_1]$, no caso particular em que $\overline{AB} = 2a$, e considerando os pontos fixos F_2 e F_1 tais que $\overline{F_1F_2} = 2a$, bem como $\overline{F_1A} = \overline{F_2B} = a\sqrt{2}$, observou que obtinha a Lemniscata de Bernoulli (Figura 1).

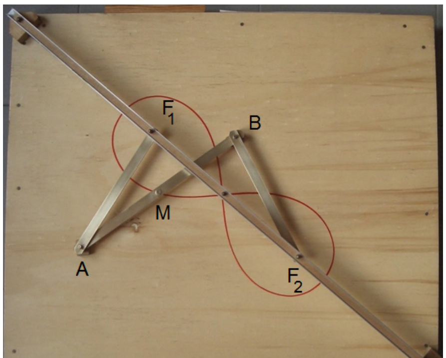


Figura 1: Instrumento de Watt

Através da Geometria Euclidiana, e em específico a teoria relativa à semelhança e congruência entre triângulos, demonstramos, de acordo com as considerações anteriormente apresentadas, a condição da referida curva, ou seja, $\overline{F_1M} \times \overline{F_2M} = a^2$.

Bibliografia

Lockwood, E. H. (1961). *A Book of curves.* Cambridge University Press.

Yates, R. C. (1947). *A Handbook on Curves and their properties.* Edwards Brothers, Inc., Michigan. U. S. A.

http://www.macchinematematiche.org/

Reforma da Matemática Moderna em Portugal: subsídios da imprensa

Mária Cristina Almeida[1]
Centro Interdisciplinar de Ciências Sociais (CICS.NOVA),
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

O movimento da matemática moderna em Portugal tem sido estudado recorrendo essencialmente a documentação oficial, a textos publicados em revistas da especialidade, a materiais de arquivo ou a testemunhos de participantes. Este trabalho pretende alargar as fontes estudadas, integrando artigos publicados em jornais diários de grande circulação, permitindo aceder a documentação dirigida ao grande público e, portanto, com um olhar e uma intencionalidade diferente da dos textos académicos, redigida por pessoas, jornalistas na sua maioria, exteriores ao corpo educativo. O objetivo deste texto é, pois, através do estudo de artigos sobre matemática moderna publicados em diários lisboetas, alargando o conhecimento sobre o modo como a reforma se desenvolveu. Os diários trazem-nos um ponto de vista próximo do quotidiano e da "pequena história", dão-nos a visão do exterior da comunidade educativa trazida pelos jornalistas e ocasionalmente publicam textos dos próprios atores da reforma. Como veremos, nas palavras dos jornalistas, em especial nos títulos, a reforma é associada à modernidade, ao progresso e ao desenvolvimento. Mas veremos também a preocupação dos responsáveis com mudanças demasiado radicais. Observamos ainda, da parte de alguns matemáticos e educadores, o gradual desencanto à medida que se vai compreendendo o desajuste das novas propostas curriculares à realidade escolar. As outras fontes — artigos em revistas educacionais ou manuais escolares — omitem a descrição do quotidiano, ou as intenções dos reformadores. No caso destas reportagens quer pela arte dos jornalistas, quer pela inteligência dos entrevistados, o essencial das ideias norteadoras da reforma parece ter sido publicado recorrendo precisamente a entrevistas.

Em 6 de março de 1963, o jornal *Diário Popular* inicia uma série de quatro artigos da autoria do jornalista Corregedor da Fonseca com o título genérico "Revolução no ensino" em que se refere uma nova conceção da Matemática e se propõe uma reforma para o ensino da disciplina (Fonseca, 1963a, 1963b, 1963c, 1963d). Após num primeiro artigo, desenvolver as

[1]Este trabalho foi parcialmente financiado por fundos portugueses através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I. P., no contexto do projeto PTDC/CED-EDG/32422/2017.

ideias que circulam internacionalmente, no segundo artigo (1963b), Corregedor da Fonseca vai entrevistar Sebastião e Silva. Este justifica a necessidade de "modernização" dos conteúdos da Matemática nos liceus, com a enorme expansão científica e tecnológica que se deu após a 2.ª Guerra Mundial, e, adaptando para Portugal os argumentos empregues pelos defensores do movimento internacional, realça o papel da matemática na ciência, na técnica, na indústria, na economia e, na cultura dos países mais desenvolvidos. Pretendia uma nova matemática nas escolas e, por isso, defendia a atualização dos conteúdos ensinados e uma renovação dos métodos de ensino. Quando observamos as palavras de Sebastião e Silva, ressalta uma preocupação em temperar os entusiasmos em relação à reforma. Várias vezes ele se refere à cautela, à necessidade de dar passos curtos, mas certeiros, procurando evitar que as suas palavras sejam interpretadas como propondo alterações radicais do *status quo*. Prosseguindo, Fonseca menciona algumas iniciativas nesse sentido, a primeira, um conjunto de conferências de Gustave Choquet, no Liceu Pedro Nunes e nas Faculdades de Ciências de Lisboa, Porto e Coimbra, ocorrera em 1963. A segunda iniciativa mencionada era um curso de atualização de professores dos liceus iniciado em novembro de 1962 e que ainda estava a decorrer na Faculdade de Ciências de Lisboa, promovido pelo Centro de Estudos Matemáticos do Instituto de Alta Cultura, dirigido por Sebastião e Silva e com a colaboração de João dos Santos Guerreiro. Neste curso abordaram-se lógica matemática, teoria dos conjuntos, álgebra abstrata, geometrias, topologia geral, entre outros temas. No dia seguinte, o terceiro artigo de Corregedor da Fonseca (1963c) é baseado numa entrevista a Jaime Leote, metodólogo de Matemática do Pedro Nunes. Leote desenvolvendo a visão de que a matemática moderna permite ao aluno aperfeiçoar o seu pensamento através de abstrações a partir de situações concretas. Após elencar os diferentes materiais e métodos didáticos usados no Liceu, vai insistir na necessidade de atualização dos professores, especialmente a científica, que considera indispensável para o sucesso da introdução da "matemática nova" no ensino. Leote considera mesmo que essa vertente é mais importante que uma atualização dos conteúdos curriculares. A nova abordagem apresentava a Matemática de uma forma unificada, apoiando-se na linguagem dos conjuntos, dando especial destaque às estruturas algébricas e à lógica, mas a preparação científica que uma licenciatura em Matemática proporcionava aos futuros professores estava desfasada. O último artigo (Fonseca, 1963d) aborda as experiências levadas a cabo por João Nabais no seu colégio do ensino primário envolvendo o uso de múltiplos materiais, em especial o material Cuisenaire. O início da reforma curricular norteada pelas ideias do movimento acontece após a nomeação em julho de 1963 pelo então Ministro Galvão Telles de uma Comissão encarregada da atualização dos programas da disciplina de Matemática do 3.º ciclo do ensino liceal.

Quase cinco anos depois da experiência se iniciar, o *Diário de Notícias* entrevista Sebastião e Silva. Num artigo que tem as honras de primeira página, o professor retoma temas que já tinha discutido noutros jornais e, na parte final, faculta algumas informações sobre o decurso dos trabalhos, nomeadamente que, a partir do ano letivo de 1965–66 o projeto de modernização do ensino de matemática nos liceus passou a ser executado por intermédio do Gabinete de Estudos e Planeamento da Ação Educativa. Segundo ele, trata-se de uma obra que irá certamente exigir grande esforço financeiro e o trabalho intenso de muitos professores. Mas é, em qualquer caso, uma obra que se impõe, embora tenha de vir a ser realizada com tempo e com prudência, num alargamento progressivo do que já se fez (Alves, 1968). Já depois do alargamento a outros níveis de ensino, existem indícios de que o apoio à reforma não era unânime, como é o caso do artigo da autoria de João Ilharco (1969) que questiona os conteúdos de um dos livros utilizados no CPES.

> O primeiro ano do Ciclo Preparatório é, na sua generalidade, frequentado por alunos de dez anos de idade e que, dentro do que é natural e normal, só muito excepcionalmente poderão compreender a série de abstrações com as quais são postos em contacto nas primeiras semanas de aula. (Ilharco, 1969, p. 1)

Um aprofundamento deste tema poderá ser encontrado no livro *A matemática moderna nos jornais diários de Lisboa* da Editora Livraria da Física.

Fontes

Alves, A. D. (1968). Às portas dum novo mundo. Amanhã a matemática "comanda" a humanidade. *Diário de Notícias*, 23/01/1968, 1, 5.

Fonseca, C. (1963a). Revolução no ensino — (1) Uma nova concepção da Matemática inteiramente diferente da tradicional principia a ser conhecida no nosso país. *Diário Popular*, 6/3/1963, 6.

Fonseca, C. (1963b). Revolução no ensino — (2) A introdução das matemáticas modernas no ensino secundário e a sua necessidade. *Diário Popular*, 7/3/1963, 7.

Fonseca, C. (1963c). Revolução no ensino — (3) A formação do professor de liceu (mais do que a elaboração de novos programas) é indispensável para o rejuvenescimento do ensino secundário — afirma o dr. Jaime Leote, metodólogo de Matemática. *Diário Popular*, 8/3/1963, 13.

Fonseca, C. (1963d). Revolução no ensino — (conclusão) É preciso que atinjam a escola primária os novos métodos didáticos da matemática. *Diário Popular*, 9/3/1963, 7.

Ilharco, J. (1969). Ácerca do ensino da Matemática no Ciclo Preparatório. *República*, 18/1/69, 1, 8.

Matemática Recreativa na *Folha Informativa dos professores do 1.º grupo*[1]

Alexandra Rodrigues, *José Manuel Matos*
Centro Interdisciplinar de Ciências Sociais (CICS.NOVA), Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, UIED – Portugal

A *Folha Informativa dos Professores do 1.º Grupo (E. T. P.)* era um periódico mensal português, dirigido aos professores de Matemática no Ensino Técnico, cuja primeira edição foi publicada em janeiro de 1967. O seu Diretor foi o professor de Matemática e autor de livros de texto, Aires Biscaia, e até março de 1972 são publicadas 66 edições e 9 suplementos. Cada edição era constituída por um conjunto de folhas A4 (entre 5 e 37 páginas que dependia do número de colaboradores em cada edição), numeradas e impressas em stencil numa das faces na Escola Industrial e Comercial de Sintra, no Cacém, próximo de Lisboa, onde Biscaia era Diretor.

As primeiras edições encontram-se organizadas em rubricas, cuja notação, a redação só esclarece na *Folha Informativa*, n.º 4 (1967). As rubricas iniciais seriam: AGM – Aprendizagem Geral da Matemática; MM – Matemática Moderna; MR – Matemática Recreativa; EFQ – Elementos de Física e Química; TI – Tradução de Inglês; FR – Física Recreativa (surge a nomenclatura na *Folha Informativa, n.º 7*, 1967) e PA – Problemas de Almanaque. As rubricas assinalavam o início das páginas, tendo a redação afirmado que esta organização permitiria o arquivo, não por edição da *Folha* mas por temática.

Nesta comunicação iremos mostrámos quais os temas trabalhados na rubrica *Matemática Recreativa*, que teve início por iniciativa de Adriano Joaquim Vaz Velho Júnior, licenciado em Ciências Matemáticas pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Após um percurso profissional diversificado, tendo sido professor do ensino particular em vários colégios, diretor, durante três anos, do Colégio Portugal, na Parede; professor do ensino técnico oficial, na escola Comercial Veiga Beirão de Lisboa e na Escola Industrial Marques de Pombal. Na data da publicação das *Folhas* exercia o cargo de professor-diretor da escola Industrial e Comercial de Montemor-o-Novo.

[1]Este trabalho foi financiado por fundos portugueses através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I. P., no âmbito dos projetos UIDB/04647/2020 e UID/CED/02861/2016 do CICS.NOVA – Centro Interdisciplinar de Ciências Sociais da Universidade Nova de Lisboa.

Os problemas apresentados no âmbito da Matemática Recreativa nas Folhas Informativas são muito atuais e perfeitamente enquadráveis para aplicação na aula de matemática contemporânea ou em clubes de matemática nas escolas, tais como “Se dou \$70 a cada um dos pobres que estão à minha porta, ficarei com \$24. Se quiser dar a cada um \$90, faltar-me-ão \$32. Qual o número de pobres e que dinheiro tenho eu? (28 pobres e 220\$00)” (S/ Autor, 1967).

Veja-se um exemplo de uma curiosidade Matemática, publicada em maio de 1967, na Folha Informativa n.º 7, onde se explicava o algoritmo da multiplicação usado pelos árabes.

> Num retângulo, como o indicado na figura, escreve-se o primeiro fator da esquerda para a direita (5472), sobre o lado BC. O segundo fator, (248) sobre AB. Em cada casa escreve-se o produto dos algarismos multiplicando pelo multiplicador. Exemplo: $8 \times 5 = 40$, colocando o algarismo das dezenas o espaço esquerdo e o das unidades à direita; $8 \times 4 = 32$, etc.
>
> Somam-se à maneira ordinária, da direita para a esquerda por fim, o total dos produtos parciais, segundo as colunas limitadas pelas linhas ponteadas.

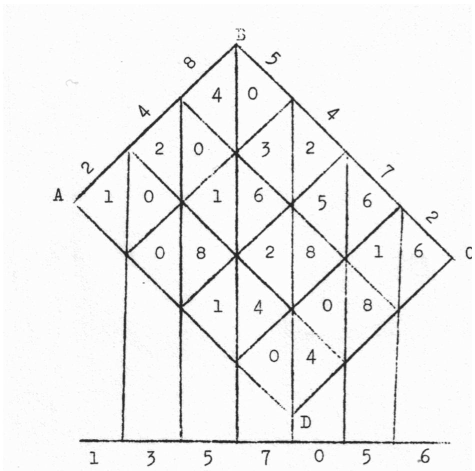


Figura 1: Algoritmo da multiplicação árabe.
Fonte: Velho, 1967, p. 11

Referências

Matos, J. M.; Novaes, B. W. D. & Gabriel, L. M. C. (2009). Recompondo a cultura da matemática escolar: a intervenção da Folha Informativa dos professores do 1.º Grupo (E. T. P.). *Atas do XX SIEM – Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 228–238). Viana do castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Matos, J. M., & Rodrigues, A. S. C. (2021). A folha informativa do ensino técnico: uma ferramenta de partilha de experiências. *REAMEC – Rede Amazônica De Educação Em Ciências E Matemática*, 9(3), e21091. `https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.13019`

Rodrigues, A.; Novaes, B. W. D. & Matos, J. M. (2016). A cultura escolar em conflito: ensino técnico e matemática moderna em Portugal, *Revista Diálogo Educacional*, v 16, n. 48. (pp. 381–402). Curitiba.

Velho, A. V. (1967). Matemática Recreativa. *Folha Informativa dos professores do 1.º Grupo (E. T. P.)*, n.º 7, 11.

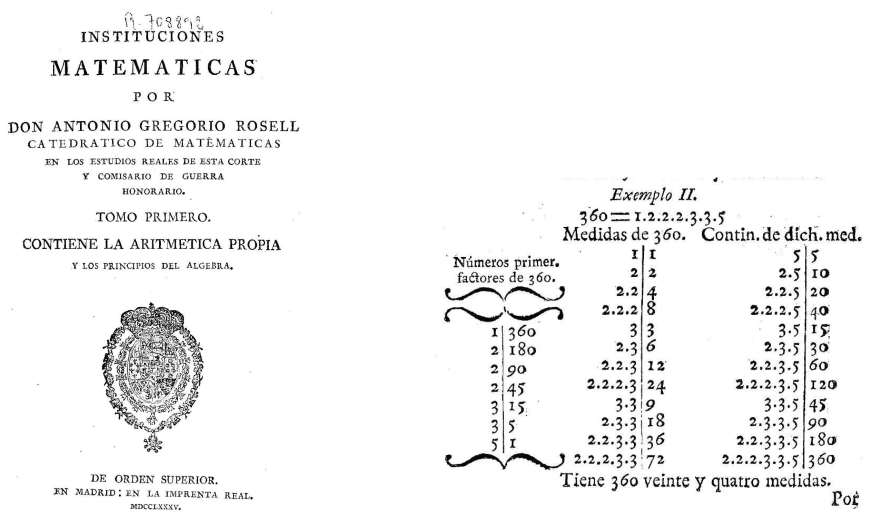
S/ Autor. (1967). Problemas de Almanaque. *Folha Informativa dos professores do 1.º Grupo (E. T. P.)*, n.º 8, 7–8.

Sobre *Instituciones Matemáticas* (1785) de Antonio G. Rosell Viciano (ca. 1748–1829). La formación del autor y sus fuentes

Luis Español González
Universidad de La Rioja (Logroño, España)

Juncal Manterola Zabala
UPV/EHU (Donostia-San Sebastián, España)

Nuestro interés por Rosell y su obra matemática surgió durante los preparativos de la tesis doctoral [2], de la que los autores de estas páginas fuimos, por orden alfabético, codirector y autora (ver también [3]). Estudiamos con detalle *Instituciones Matemáticas* porque el autor quiso escribir un texto de «matemática pura» dirigido a «matemáticos de profesión». La obra quedó incompleta, de los dos tomos previstos solo publicó el primero sobre aritmética y álgebra, lo que hace que su importancia disminuya. No obstante, prestamos atención al espíritu reformador que Rosell transmitía al planificar su libro de texto y la huella de dicho propósito en el primer y único tomo publicado [1].


INSTITUCIONES
MATEMATICAS
POR
DON ANTONIO GREGORIO ROSELL
CATEDRATICO DE MATEMATICAS
EN LOS ESTUDIOS REALES DE ESTA CORTE
Y COMISARIO DE GUERRA
HONORARIO.
TOMO PRIMERO.
CONTIENE LA ARITMETICA PROPIA
Y LOS PRINCIPIOS DEL ALGEBRA.
DE ORDEN SUPERIOR.
EN MADRID: EN LA IMPRENTA REAL.
MDCCLXXXV.

Exemplo II.

360 = 1.2.2.2.3.3.5

Números primer. factores de 360.		Medidas de 360.		Contin. de dich. med.	
		1	1	5	5
		2	2	2.5	10
		2.2	4	2.2.5	20
		2.2.2	8	2.2.2.5	40
1	360	3	3	3.5	15
2	180	2.3	6	2.3.5	30
2	90	2.2.3	12	2.2.3.5	60
2	45	2.2.2.3	24	2.2.2.3.5	120
3	15	3.3	9	3.3.5	45
3	5	2.3.3	18	2.3.3.5	90
5	1	2.2.3.3	36	2.2.3.3.5	180
		2.2.2.3.3	72	2.2.2.3.3.5	360

Tiene 360 veinte y quatro medidas.
Por

Figura 1: De *Instituciones*: Portada y tabla de divisores de 360. Ejemplar de la Biblioteca Nacional de España.

Rosell fue Bachiller en Filosofía (1768) y Maestro en Artes (1769) por la Universidad de Valencia. Carlos III había expulsado de sus dominios a los jesuitas en 1767, poniendo fin al Colegio Imperial de esta orden religiosa en Madrid. En su lugar, fue creado en 1772 un centro público y laico llamado Reales Estudios de San Isidro. Rosell ganó por oposición una de las dos cátedras de matemáticas que se convocaron para este nuevo centro y la regentó hasta que fue cesado en 1794 a causa de una enfermedad con síntomas de demencia que empezó a manifestarse en 1783. Se había formado en Valencia estudiando *Elementa matheseos universae* (1713–1715) de Ch. Wolff y utilizó esta obra como manual para sus enseñanzas en los primeros años de catedrático en los Reales Estudios. El mismo año en que se inauguró este centro empezó a publicarse la obra *Elementos de Matemáticas* (1772–83), 11 volúmenes que B. Bails compuso con amplio apoyo oficial. En 1776 apareció un extracto en 3 volúmenes titulado *Principios de Matemáticas* para facilitar su uso como manual para estudiantes, que pasó a ser el texto de los Reales Estudios. Pero Rosell tenía un enfoque diferente para enseñar matemáticas puras formando matemáticos de profesión y no ingenieros. Su libro de texto salió de la imprenta en 1785 con casi cuatrocientas páginas de naturaleza doctrinal precedidas por unas cuarenta ideológicas en las que expone su visión de las matemáticas y de su enseñanza,

El contenido doctrinal responde al título «De los principios de la Aritmética Universal», y está dividido en: «Parte primera: De la Aritmética numérica» (pp. 5–188) y «Parte segunda: De los principios del Álgebra» (pp. 189–392). A lo largo del desarrollo doctrinal, Rosell no menciona a los autores que tomó como fuente de inspiración para su trabajo, nuestra investigación en curso debe encontrarlos comparando *Instituciones* con los textos que su autor tuvo a mano con seguridad o con probabilidad. Decimos esto con una sola excepción, la teoría de límites que forma parte del álgebra de cantidades variables; allí (nota al pie de p. 286) Rosell se proclama seguidor de d'Alembert al afirmar que «los infinitesimales acarrean inexactitud y contradicciones que promovieron disputas entre los partidarios de Newton y los de Leibniz, con las que ha terminado d'Alembert mediante los límites, alternativa a las fluxiones y los infinitesimales».

Es en las páginas iniciales de contenido ideológico donde Rosell relaciona o contrapone su trabajo con el de otros autores. En el «Prólogo» (pp. I–XXIV) rechaza las obras que plantean la matemática pura como mero trámite para explicar la mixta o aplicada. Se distancia de la aritmética y el álgebra tal como fue expuesta por E. Bézout, el inspirador en estas materias de Bails, a quien no menciona. Respecto al título «Aritmética Universal», lo identifica con la obra homónima de Newton (1707) en cuanto considera la aritmética numérica como parte del álgebra, comprendiendo ambas bajo el nombre de aritmética universal «según lo hizo el Caballero Newton».

Sostiene Rosell que pasó el tiempo de los *Elementos* tal como fueron formulados por Euclides, ahora la matemática se ha de basar toda ella en el lenguaje algebraico, empezando por la aritmética y el álgebra. Por eso critica el «Curso completo» (1774) del Abate Sauri que usa distintos lenguajes en cada parte de la matemática. En un enfoque filosófico del papel que juegan en la matemática la lógica, la dialéctica análisis-síntesis y el lenguaje algebraico, Rosell no se opone a la *Logique* (1780) de B. de Condillac pero matiza algunas de sus propuestas. Por otra parte, expresa reconocimiento «al Abate Bossut, y al Brigadier Don Carlos Lemaur», por procurar en sus obras una exactitud similar a la que él pretende.

A fin de exponer una matemática pura que forme matemáticos profesionales versados en la exactitud conceptual, en la «Instrucción proemial» (pp. XXV–XLII) Rosell vuelve la mirada a los *Elementos* de Euclides que antes ha rechazado por su lenguaje geométrico ya desfasado, y lo hace en busca de modelo para una teoría bien elaborada con estructura lógica deductiva: axiomas, definiciones, teoremas…; pero que él no empieza por la geometría sino con unos axiomas tipo las nociones comunes de Euclides que dan paso a las razones de cantidades o de números, con las que elabora la aritmética numérica y el inicio del álgebra hasta llegar a la teoría de las proporciones. Este es el aspecto más destacado de su enfoque, desarrollado con aciertos y errores, pero dejando la gran incógnita de cómo habría sido su continuación en el segundo volumen inédito. Lo sabremos si algún día aparece el manuscrito que tenía elaborado, según afirmaron algunos contemporáneos.

Referencias

[1] L. Español y J. Manterola, "Antonio Gregorio Rosell Viciano (ca. 1748–1829): *Instituciones Matemáticas* (1785)", *Cuadernos dieciochistas*, Vol. 22 (2021), pp. 133–169.

[2] J. Manterola, "Las matemáticas en los estudios de náutica en España en el siglo XVIII: estudio comparativo de los libros de texto empleados en la formación de pilotos y guardiamarinas", Tesis de Doctorado, Universidad de La Rioja, España, 2016.

[3] J. Manterola e I. Ibáñez, "Noticia de algunos textos para la enseñanza de la náutica en España en el siglo XVIII", *Ciencia y técnica entre la paz y*

la guerra: 1714, 1814, 1914, SEHCYT, Vol. 1, 2016, Ed. F. A. González Redondo, pp. 155–162.

Latitude por Duas Alturas do Sol — Proposta de Cornelis Douwes

Ana Queirós
Escola Naval

A partir de finais do século XV, os pilotos passaram a determinar a latitude pela passagem meridiana do Sol. O processo utilizado, com cálculos bastante simples, tinha o inconveniente da necessidade de observação do astro no instante em que atingia a sua altura máxima. Caso não fosse possível, era necessário esperar pelo dia seguinte. Daí que diversos autores tenham sugerido soluções para determinar a latitude pela altura do Sol a qualquer hora do dia, tendo sido Pedro Nunes um dos primeiros a avançar com uma solução. Em 1740, o holandês Cornelis Douwes apresentou uma solução, divulgada pela tradução para inglês feita por Richard Harrison, em 1759. Segue-se a descrição do mesmo.

Para a resolução do seu método, Douwes criou as suas próprias tabelas de logaritmos (ver figura 1), para facilitar a obtenção dos valores necessários. Este método é iterativo, pelo que, para se efetuarem os cálculos, é necessário conhecer um valor estimado da latitude e, no final, o valor obtido deve ser comparado com o valor estimado e é avaliada a sua diferença (é aceite uma diferença de até dez minutos).

No método de Douwes, as incógnitas consideradas são as duas alturas observadas (h_1 e h_2) obtidas através de instrumentos próprios para o efeito (por exemplo, o sextante), o tempo para o meio dia das duas observações (t_1 e t_2) contabilizado aquando das observações, a declinação (D) cujo valor é retirado das tábuas de declinação e a latitude (L) que é o objetivo final do método.

Tendo em conta as incógnitas apresentadas, utilizam-se três equações base que resolvem, respetivamente, o triângulo de posição da primeira (1) e da segunda (2) observação e a diferença de ângulos no polo (3), ou seja, a diferença de tempo entre as observações:

$$\sin h_1 = \sin L \sin D + \cos L \cos D \cos t_1 \tag{1}$$

$$\sin h_2 = \sin L \sin D + \cos L \cos D \cos t_2 \tag{2}$$

$$\cos t_1 - \cos t_2 = 2 \sin \frac{t_1 + t_2}{2} \sin \frac{t_2 - t_1}{2} \tag{3}$$

Numa primeira etapa, subtrai-se as equações (1) e (2),

$$\sin h_1 - \sin h_2 = \cos L \cos D(\cos t_1 - \cos t_2) \tag{4}$$

substitui-se a diferença de ângulos no polo (3),

$$\sin h_1 - \sin h_2 = \cos L \cos D \left(2 \sin \frac{t_1 + t_2}{2} \sin \frac{t_2 - t_1}{2} \right) \tag{5}$$

e resolve-se em ordem a $2 \sin \frac{t_1+t_2}{2}$,

$$2 \sin \frac{t_1 + t_2}{2} = (\sin h_1 - \sin h_2) \sec L \sec D \csc \left(\frac{t_2 - t_1}{2} \right) \tag{6}$$

onde importa referir que $\frac{t_1+t_2}{2}$ representa a hora média e $\frac{t_2-t_1}{2}$ representa metade do intervalo de tempo, que são parâmetros que fazem parte da tabela de Douwes (ver figura 1).

Utiliza-se a equação (6) para obtenção dos valores de t_1 e t_2, da seguinte forma:

1. Entrar com o valor de metade do intervalo de tempo na tabela de Douwes, que devolve o valor do logaritmo da cossecante;
2. Somar os valores dos logaritmos das secantes de L e de D (tabelas de logaritmos);
3. Somar o logaritmo da diferença dos senos das alturas (tabelas de funções trigonométricas);
4. Procurar o valor obtido na coluna da "hora média" da tabela de Douwes, que corresponde ao valor do logaritmo do seno de duas vezes esse argumento — retirar o valor da hora média em horas, minutos e segundos;
5. Somar e subtrair à hora média o valor de metade do intervalo de tempo — obtém-se os valores de t_1 e t_2, respetivamente.

Obtidos os valores de t_1 e t_2, volta-se às equações (1) e (2) e seleciona-se a equação que utiliza o valor de t correspondente à observação da maior altura — para efeitos explicativos, assume-se que a maior altura foi observada em t_2, ou seja, $h_2 > h_1$. Então, do lado direito da equação (2), adiciona-se e subtrai-se $\cos L \cos D$ e resolve-se em ordem a $\cos(L - D)$:

$$\sin h_2 = \sin L \sin D + \cos L \cos D - \cos L \cos D + \cos L \cos D \cos t_2 \tag{7}$$

$$\Leftrightarrow \sin h_2 = \cos(L - D) - \cos L \cos D(1 - \cos t_2) \tag{8}$$

$$\Leftrightarrow \cos(L - D) = \sin h_2 + \cos L \cos D(1 - \cos t_2) \tag{9}$$

Douwes criou também o chamado $LogRising(x)$, que é equivalente ao $senoverso(x)$ e que corresponde a $1 - \cos(x)$. Inclusive, nas suas tabelas de logaritmos, criou uma coluna para o *Rising* (ver figura 1). Na equação (9), o valor de L do lado esquerdo da equação é o valor que se pretende obter, enquanto que o valor de L do lado direito da equação corresponde ao valor da latitude estimada. Recorrendo novamente às tabelas de logaritmos e à particularidade dos logaritmos transformarem multiplicações em somas, resolve-se facilmente a última equação, obtendo-se o valor da latitude. Tratando-se de um processo iterativo, avalia-se a proximidade entre os valores da latitude estimada e da latitude obtida e aceita-se o resultado, ou repete-se o processo, utilizando como latitude estimada o valor obtido na primeira iteração.

The New LOGARITHMIC SOLAR TABLES. 21

H	M	S	½ Elapsed Time.	Middle Time:	Rising.	H	M	S	½ Elapsed Time.	Middle Time.	Rising
1	36	20	0.38927	4.91176	3.93975	1	48	20	0.34172	4.95931	4.04003
1	36	30	0.38856	4.91247	3.94123	1	48	30	0.34110	4.95993	4.04134
1	36	40	0.38786	4.91317	3.94271	1	48	40	0.34048	4.96055	4.04265
1	37	00	0.38646	4.91457	3.94466	1	49	00	0.33925	4.96178	4.04526
1	37	20	0.38506	4.91597	3.95859	1	49	20	0.33803	4.96300	4.04786
1	37	30	0.38436	4.91667	3.95005	1	49	30	0.33742	4.96361	4.04916

Figura 1: Excerto da Tabela de Douwes, traduzida por Richard Harrison [1].

Este método, o primeiro que se conhece no qual se usaram logarítmos para o cálculo das equações, tem um interesse particular porque se tornou a base para os inúmeros métodos que se seguiram durante o século XVIII e ao longo do XIX, até ao aparecimento do Método de Marcq Saint-Hilaire, no final desse século.

Referências

[1] Richard Harrison, *A New Sett of Logarithmic Solar Tables, Calculated and Constructed for Determining the Latitude at Sea*, London, 1759.

Mathematical rigour, mathematical creativity, and the transgression of limits

Eberhard Knobloch
Berlin University of Technology
Berlin-Brandenburg Academy of Sciences and Humanities

Dignity and highest certainty are the characteristics of mathematics guaranteed by rigorous demonstrations. The Ancients or – to be more precise – Archimedes were and remained the touchstone for the legitimacy of mathematical methods, objects, proofs up to the times of Euler. In order to demonstrate the equality of two quantities the double *reductio ad absurdum* was usual and necessary. But his demonstrations were criticized because of their obscurity.

The talk consists of four parts.

1. The first part deals with Archimedes's letter to Eratosthenes, better known as *Perì tôn mechanikôn theoremáton éphodos* (Approach regarding the mechanical theorems). Therein Archimedes transgressed limits of legitimacy when he looked for the solution of problems. He used an analogy when he found the surface of the sphere. He violated methodological prescriptions. He used non-mathematical objects, that is indivisibles being non-quantities by definition. He violated the axiom named after him.

2. Later authors tried to replace his indirect demonstrations by affirmative demonstrations. In 1615 Johannes Kepler explained Archimedean theorems in his *New solid geometry of wine barrels* using geometrical transformations and analogies thus being able to surpass the results of the Greek author. In such a way he calculated the volume of a mathematical apple. Was he entitled to do that?

3. In 1641 Paul Guldin published his four books *On the centre of gravity.* He spoke of Kepler's new method of demonstrating. The essential reproach was that Kepler had not always looked after the purity and exactness of geometry, that he had assigned much to analogies and conjectures, and that he had obscurely presented all of his results. Guldin himself claimed to give clear and perspicuous demonstrations instead of the too obscure Archimedean demonstrations using his two principles, that is a rotation and the centre of gravity.

4. When in 1676 Gottfried Wilhelm Leibniz amply used infinitely small and infinite quantities in his *Arithmetical quadrature of the circle, the ellipse and the hyperbola*, he admitted that this might appear obscure, but he emphasized that they provide abbreviations of speaking, thinking, discovering, and demonstrating and that his method differs from the Archimedean style only by the expressions. He defined infinitely small quantities as quantities that are smaller than *any given* quantity, infinitely great quantities as such that are greater than *any given* quantity. Curves are polygons with infinitely many, infinitely small sides (principle of linearization).

In 1755, in his *Elements of the differential calculus*, Leonhard Euler tried to justify the use of these quantities in another way defining infinitely small quantities as quantities that are smaller than *any assignable* quantity. Such quantities must be equal to zero. Hence he was convinced that the highest geometrical rigour was observed like in the books of the Ancients.

Bibliography

E. Knobloch, “Leibniz’s rigorous foundation of infinitesimal geometry by means of Riemannian sums“, *Synthese*, vol. 133 (2002), pp. 59–73.

E. Knobloch, “From Archimedes to Kepler: Analogies and the dignity of mathematics“, *Sciences et techniques en perspective*, IIe série, vol. 18 (2016), pp. 20–34.

E. Knobloch, “On the relation between point, indivisible, and infinitely small in western mathematics“, *Mathematics of Takebe Katahiro and history of mathematics in East Asia*, Eds. T. Ogawa, M. Morimoto. Tokyo 2018, 39–58 (Advanced studies in pure mathematics vol. 79)

E. Knobloch, “The Hellenistic mathematician Archimedes and his renaissance admirer Kepler“, *Hellenistic Alexandria: Celebrating 24 centuries*, Papers presented at the conference held on December 13–15 2017 at Acropolis Museum, Athens. Oxford 2018, Eds. C. S. Zerefos, M. Vardinoyannis, pp. 242–247

Hamilton-Jacobi Theory and Canonical Transformations 1837–1907

Craig Fraser[*]
Institute for the History and Philosophy of Science and Technology, University of Toronto

The idea of a canonical transformation emerged in 1837 almost from nowhere in Carl Jacobi's researches, and became the subject of episodic investigation for the next fifty years. Significant figures at the middle of the century were Adolphe Desboves and William Donkin, while the delayed posthumous publication in 1866 of Jacobi's full dynamical corpus was a critical event. François Tisserand's doctoral dissertation of 1868 was devoted primarily to lunar and planetary theory, but placed Hamilton-Jacobi mathematical methods at the forefront of the investigation. Poincaré's lectures on celestial mechanics in the 1890s succeeded in making canonical transformations a fundamental part of dynamical theory. Poincaré offered a mathematical vision of the theory that differed fundamentally from Jacobi's and would become highly influential in subsequent research. Two prominent researchers around 1900 were Carl Charlier and Edmund Whittaker, and their books included chapters devoted explicitly to transformation theory.

The development of Hamilton-Jacobi theory from its inception up to 1910 was closely tied to celestial mechanics or what in the nineteenth century was sometimes called physical astronomy. The two most important figures in this history — Jacobi and Poincaré — were mathematicians first and foremost who also made fundamental contributions to planetary dynamics and the theory of perturbations.

Jacobi invented the idea of the canonical transformation, a mathematical advance not anticipated in earlier work of Hamilton or others. Jacobi's strength was his unparalleled grasp of algorithmic mathematics and his ability to find operational, formal solutions and methods. E. T. Bell (1986, 327) in his book *Men of Mathematics* fittingly titled his chapter on Jacobi, "The great algorist." In Jacobi's approach to the calculus of variations the formal, algorithmic aspect was paramount, although it is true that some of his innovations, for example the conjugate point, had geometric implications. While the subject of canonical transformations developed out of a part of dynamical analysis with strong roots in the calculus of variations, Jacobi's study

[*]Research and writing of the present paper was carried out by the author in collaboration with Michiyo Nakane of Seijo University, Tokyo.

of transformations was analytical and did not draw on notions involving continuous variational processes.

By contrast, variational processes were critical to Poincaré's approach and imparted a "topological" element to the theory. A key contribution consisted of his treatment in 1899 of Jacobi's transformation theorem, where a variational law provided a powerful structural tool in the derivation of this result. The contributions of Poincaré in this respect are highlighted by Gaston Darboux in his 1916 éloge:

> ... Jacobi had established a theory which appeared to be one of the most complete in dynamics. For fifty years we lived on the theorems of the illustrious German mathematician, applying them and studying them from all angles, but without adding anything essential. It was Poincaré who first shattered these rigid frames in which the theory seemed to be encased and contrived for it vistas and new windows on the external world. He introduced or used, in the study of dynamical problems, different notions: the first, which had been given before and which, moreover, is applicable not solely to mechanics, is that of variational equations, namely, linear differential equations that determine solutions of a problem infinitely near to a given solution; the second, that of integral invariants, which belong entirely to him and play a capital part in these researches.[1]

From its origins up until the early years of the twentieth century Hamilton-Jacobi theory was primarily of interest to mathematical analysts and researchers in celestial mechanics, the latter being active throughout this period. After 1910 the methods of Hamilton-Jacobi theory were adopted by atomic physicists in Germany. Prominent in this group were Arnold Sommerfeld and Max Born. Sommerfeld (1923, 555–556) wrote: "Up to a few years ago it was possible to consider that the methods of mechanics of Hamilton and Jacobi could be dispensed with for physics and to regard it as serving only the requirements of the calculus of astronomic perturbations and the interests of mathematics." As a result of the rapid development of quantum theory the situation had changed dramatically. Sommerfeld continued: " ... it seems [today] almost as if Hamilton's method was expressly created for treating the most important problems of physical mechanics." In subsequent history, canonical transformations became an integral part of the canon of mathematical physics, a fact that is reflected in various textbooks

[1] English translation in Bell (1986, 544–545)

in mechanics at the middle of the century. The subject of canonical transformations was also investigated by mathematicians, a notable contribution being Constantin Carathéodory's 1935 *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichingen erster Ordnung* (Chapter 6).

References

Bell, E. T. 1986. *Men of Mathematics*. Touchstone Press. New York et al. Reprint of the original 1937 edition.

Carathéodory, Constantin. 1935. *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung*. B. G. Teubner. Leipzig and Berlin.

Darboux, Gaston. 1916. "Éloge historique de Henri Poincaré". In Poincaré (1916), pp. vii–lxxi.

Jacobi, Carl Gustav. 1866a. *Vorlesungen über Dynamik von C. G. J. Jacobi nebst Fünf Hinterlassenen Abhandlungen Desselben*. Verlag Georg Reimer. Berlin.

Poincaré, Henri. 1899. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Volume 3. Paris : Gauthier-Villars.

——— 1916. *Œuvres de Poincaré*. Volume 2. Edited by Gaston Darboux in collaboration with N. E. Nörlund and Ernest Lebon. Gauthier Villars et Cie. Paris.

Sommerfeld, Arnold. 1923. *Atomic Structure and Spectral Lines*. Methuen & Co. Ltd. London. English translation of the 1922 third edition of the author's *Atombau und Spektrallinien*.

A visita do Imperador do Brasil, Pedro II, à Universidade de Coimbra e os Observatórios Astronómico e Meteorológico e Magnético à época (1872)

Fernando B. Figueiredo
DMUC, CITEUC, Universidade de Coimbra

A Reforma Pombalina da Universidade de Coimbra (1772), levada a cabo por D. José (1714–1777) e o seu todo-poderoso ministro Marquês de Pombal (1699–1782), inicia todo um processo de institucionalização das ciências em Portugal em moldes modernos, e muito em particular das ciências matemáticas e físico-matemáticas. São criadas, como sabemos, as novas Faculdades de Matemática e Filosofia Natural e vários estabelecimentos científicos, como é o caso do Observatório Astronómico e do Gabinete de Física. A Reforma marca desde logo, pelo menos estatutariamente, um tipo novo de instituição em que o ensino e a investigação deveriam ser dois compromissos fortes. Na verdade, esta ideia, de que a universidade, como centro de saber, tem que aliar o ensino e a investigação, reconhecemo-la hoje como um legado do filósofo e político alemão Friedrich Wilhelm von Humbolt (1767–1835) na criação da Universidade de Berlim, em 1810. Porém já Pombal e os seus reformadores se haviam antecedido cerca de 40 anos nesta visão bastante moderna e hoje marca identitária das nossas actuais universidades.

No campo da astronomia, o Observatório Astronómico iria constituir-se como um dos principais centros de investigação do país. Embora ligado à Universidade como uma instituição de ensino, foi concebido como um observatório nacional para calcular efemérides astronómicas e ajudar em questões cartográficas e de navegação. O seu programa científico colocou-o em sintonia com os demais observatórios nacionais estrangeiros, publicando periodicamente as Efemérides Astronómicas (1803), obra reconhecida na Europa pelo seu carácter inovador. A astrometria e a mecânica celeste foram o seu principal programa científico até às primeiras décadas do século XX, tendo sido um dos principais pólos da formação da nova geração de astrónomos no Portugal de Oitocentos.

Embora algumas observações meteorológicas fossem feitas no Observatório Astronómico, e sobretudo no Gabinete de Física, a verdade é que não existia em meados do século XIX um observatório meteorológico digno desse nome na Universidade. Porém, em Lisboa, ligado à Escola Politécnica, instituição criada na capital em 1837, funcionava desde 1853 o Observatório

Meteorológico D. Luis, com observações regulares de meteorologia e geomagnetismo. A Universidade de Coimbra, como única universidade do país, não podia ficar de fora destas novas áreas científicas em crescente desenvolvimento. A partir de 1860 a Faculdade de Filosofia intenta um conjunto de acções junto do governo para criar um estabelecimento científico que implementasse o desejado programa sistemático de observações meteorológicas e que colocasse a Universidade na vanguarda da investigação nas chamadas ciências da *physique du globe*. O Observatório Meteorológico e Magnético na Universidade de Coimbra seria então criado em 1864.

Em 1872, 1.º centenário da Reforma Pombalina, D. Pedro II (1825–1891), Imperador do Brasil, visita a Universidade e os seus vários estabelecimentos científicos. Pedro II era um particular entusiasta das ciências naturais, descrevendo-se como tendo "*nascido para se dedicar à cultura e à ciência*". Tivesse o acaso lhe reservado outro destino que não o de imperador, gostaria de ter sido professor, assim o escreveu várias vezes. Era membro de várias e prestigiadas academias e associações científicas mundiais, como a inglesa Royal Society, a Academia das Ciências da Rússia, a Academia Real para as Ciências e as Artes da Bélgica. Em 1875 seria eleito membro da Académie des Sciences francesa.

Uma visita à Universidade de Coimbra, a única em Portugal e com forte tradição no acolhimento e ensino das elites brasileiras que atravessaram o Atlântico para aí se licenciarem, seria um dos pontos de interesse da sua primeira viagem a Portugal nos anos 1871 e 1872. No dia 5 de Março, Pedro II faz uma longa e cuidada visita ao Observatório Meteorológico e Magnético da Universidade de Coimbra (OMMUC). Esta era uma das mais recentes instituições científicas portuguesas e a curiosidade do Imperador era grande, querendo saber tudo sobre a organização do observatório, o tipo e utilização dos instrumentos, a sua prática e programa científico. Jacinto de Sousa (1818–80), director do OMMUC, foi o anfitrião que ofereceu ao Imperador explicações e descrições detalhadas, tal como é relatado no livro a *Viagem dos imperadores do Brasil em Portugal* (1872).

A descrição da visita ao OMMUC é uma clara tentativa dos autores, um deles, Augusto Mendes Simões de Castro (1845–1932), sobrinho de Joaquim Augusto Simões de Carvalho (1822–1902), professor de Química da Faculdade de Filosofia e autor da *Memoria histórica da Faculdade de Philosophia* (1872), em promover a imagem de uma Universidade moderna e sintonizada com o que de mais avançado se fazia na Europa científica da altura. Talvez por isso mesmo o retrato que fazem da visita do Imperador ao Observatório Astronómico seja de uma visita fugaz, e que lhe terá despertado pouco interesse. Esta era uma instituição já bem firmada no panorama científico nacional e internacional e não precisava igual destaque. O que era preciso, e assim é feito, era destacar uma nova joia da coroa universitária, o novo Observatório Meteorológico e Magnético de Coimbra.

O relato da visita do Imperador à Universidade, juntamente com um conjunto de memórias descritivas de ambos os Observatórios, permite-nos não só compreender a evolução e organização destas instituições, mas também traçar um quadro da situação das ciências físico-matemáticas e de novas áreas do saber que se abriam ao ensino e investigação na Universidade. São na verdade instrumentos privilegiados para uma arqueologia das práticas científicas e para abordar questões mais gerais acerca das ciências da Terra e do espaço e das dinâmicas político-institucionais da segunda metade do século XIX português.

Bibliografia

Araújo, Ana Cristina (Coord.), O Marquês de Pombal e a Universidade. Coimbra: Imprensa da Universidade, Coimbra, Imprensa da Universidade de Coimbra, 2000

Carvalho, Joaquim Augusto Simões de; Memoria histórica da Faculdade de Philosophia [...]. Coimbra: Imprensa da Universidade, 1872.

Corte Real, José Alberto Homem da Cunha, Rocha, Antonio da Silva Rocha, Castro, Augusto Mendes Simões de. Viagem dos imperadores do Brasil em Portugal. Coimbra, Imprensa da Universidade, 1872

Freire, Francisco de Castro; Memoria Histórica da Faculdade de Mathematica [...]. Coimbra: Imprensa da Universidade, 1872

Schwarcz, Lilia Moritz,; As Barbas do Imperador. D. Pedro II, um monarca nos trópicos. Lisboa: Assírio & Alvim, 2003

Cálculos de navegação astronómica com o cronogoniómetro

António Costa Canas
Escola Naval—CINAV & CHist-UL

Em finais do século XVIII, passou a ser possível determinar com rigor a longitude no mar. Para determinar a hora num meridiano de referência podia usar-se o método das distâncias lunares, ou então um cronómetro. Bastava depois comparar essa hora com a do meridiano do observador, para se obter a longitude. Esta última hora era geralmente calculada usando um processo conhecido por "Time sight" (ou ângulo horário, em português). Os procedimentos de cálculo eram algo complexos para a época, pois consistiam na resolução de um triângulo esférico:

$$\cos P = \frac{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} \delta * \operatorname{sen} \varphi}{\cos \delta * \cos \varphi}$$

Onde P é o ângulo horário, que permite conhecer a hora; φ é a latitude; e δ é a declinação do astro. A resolução destas fórmulas fazia-se recorrendo a logaritmos, mas esta fórmula inicial ainda apresentava alguma complexidade. Para a simplificar, subtraíam-se de 1, ambos os termos:

$$1 - \cos P = \frac{\cos \varphi * \cos \delta + \operatorname{sen} \varphi * \operatorname{sen} \delta - \operatorname{sen} a}{\cos \varphi * \cos \delta}$$

$$1 - \cos P = \frac{\cos(\varphi - \delta) - \operatorname{sen} a}{\cos \varphi * \cos \delta}$$

$$1 - \cos P = (\cos(\varphi - \delta) - \operatorname{sen} a) * \sec \varphi * \sec \delta$$

"$1 - \cos P$" corresponde a uma função trigonométrica, o seno verso, para a qual também existiam tabelas de logaritmos, a qual facilita algumas simplificações das fórmulas de trigonometria esférica.

No final do século XIX, João de Brito Capelo, oficial de Marinha, inventou um instrumento, cronogoniómetro, com o qual se podia resolver o triângulo esférico e portanto calcular o ângulo horário. Curiosamente, as primeiras informações sobre o cronogoniómetro foram divulgadas nos *Anais do Clube Militar Naval*, graças a uma polémica entre outros dois oficiais de Marinha, Vitorino Gomes da Costa e Benjamim de Paiva Curado, que discutiram a validade dos processos gráficos e mecânicos para resolução de problemas matemáticos:

> Ha proximamente dois annos que tenho seguido minuciosamente o assumpto dos artigos publicados nos *Annaes do club*, e vi que sendo ali tratados com desenvolvimento differentes assumptos de navegação, havia a usencia de qualquer trabalho que tivesse por thema a solução graphica dos problemas nauticos. Ora sendo o estudo dos processos graphicos a questão do dia em navegação, sendo hoje raro o numero de qualquer revista maritima estrangeira que deixe de apresentar um trabalho d'aquelles, affirmando-se mesmo que no futuro a navegação graphica ha de fazer desapparecer o emprego das tábuas de logarithmos. . .[3]

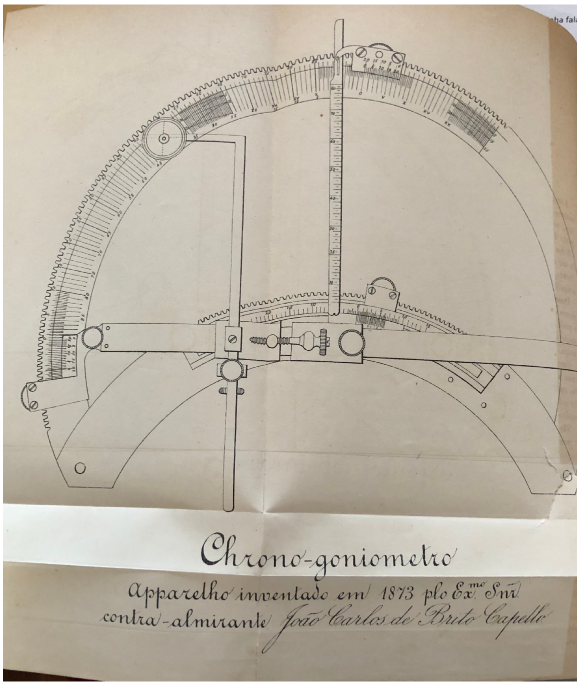


Figura 1: Representação do cronogoniómetro.

A polémica iniciou-se com a discussão sobre o valor do planisfério azimutal, um esquema gráfico, também proposto por João Capelo para resolver o triângulo esférico de posição. Nos artigos finais, a discussão centra-se em torno do cronogoniómetro, sendo afirmado que este resolvia de forma mecânica, aquilo que se resolvia graficamente com o planisfério:

> Foi então que vi que aquelle apparelho se fundava na mesma

> theoria do planispherio azimuthal, e reconheci a simplicidade do seu uso...[6]

Como se pode verificar na figura, o instrumento era composto por uma base com diversas escalas e por um conjunto de peças móveis. Estas peças eram deslocadas de modo a introduzir os valores das diferentes variáveis que entravam no cálculo do ângulo horário, sendo depois lido o resultado desse cálculo numa dessas escalas. O processo era relativamente fácil de executar, pois a bibliografia sobre o instrumento contém uma série de passos a executar para realizar o cálculo. Não foi possível encontrar uma explicação para o nome escolhido para o instrumento, mas provavelmente tem a ver com o resultado que se pretendia alcançar com o mesmo: ângulo horário (pois *gonio* está relacionado com ângulos e *crono* com tempo, ou horário). Do mesmo modo, o planisfério azimutal, foi concebido especificamente para calcular o azimute dum astro, que servia para calcular o desvio da agulha magnética. Apesar de cada um deles ter sido concebido para calcular um dado elemento do triângulo de posição, ambos serviam para calcular outros elementos, como se referiu anteriormente.

Referências

[1] Benjamim de Paiva Curado, "Processo para resolver graficamente o triângulo esférico determinativo da posição de um astro", *Anais do Clube Militar Naval*, 1893, pp. 5–9.

[2] Benjamim de Paiva Curado, "Construção e uso de um gráfico que substitui os planisférios", *Anais do Clube Militar Naval*, 1893, pp. 71–77.

[3] Benjamim de Paiva Curado, "Os problemas dos planisférios", *Anais do Clube Militar Naval*, 1893, pp. 189–193.

[4] Vitorino Gomes da Costa, "Algumas reflexões sobre o método para resolver graficamente o triângulo esférico determinativo da posição de um astro", *Anais do Clube Militar Naval*, 1893, pp. 115–122.

[5] Vitorino Gomes da Costa, "Os problemas dos planisférios", *Anais do Clube Militar Naval*, 1893, pp. 321–328.

[6] Vitorino Gomes da Costa, "Cronogoniómetro", *Anais do Clube Militar Naval*, 1894, pp. 339–344 e 419–430.