33.º ENCONTRO DO SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

spm
SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA
SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

30 E 31 OUTUBRO 2020

ENCONTRO REALIZADO ONLINE
COM RECURSO À PLATAFORMA ZOOM

CONFERENCISTAS CONVIDADOS

UGO BALDINI
Università degli Studi di Padova

JOSÉ CHABAS
Universidade Pompeu Fabra de Barcelona

Encontro acreditado pelo Conselho Científico-Pedagógico da Formação Contínua de Professores como 12 horas de formação para os grupos 230 e 500

spm SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA
POLITÉCNICO DE LEIRIA

Câmara Municipal de Leiria www.cm-leiria.pt
MUSEU DE LEIRIA
CIM CENTRO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA
CENTRO DE DIÁLOGO INTERCULTURAL LEIRIA

www.sites.ipleiria.pt/snhm33

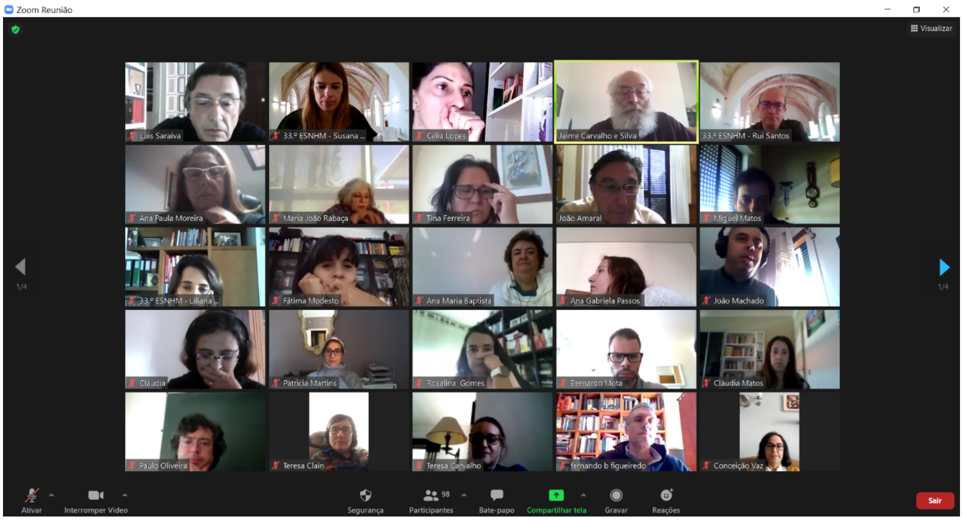
SUMÁRIO (continuação)

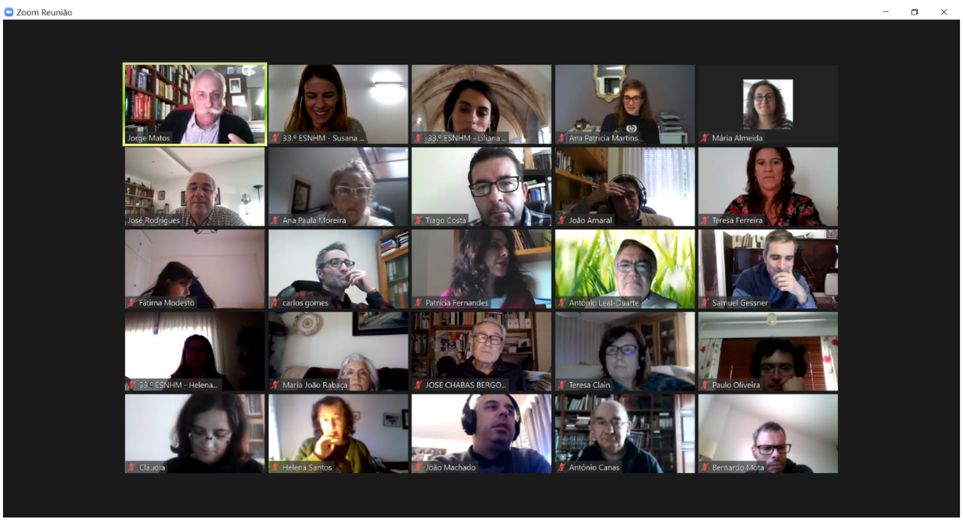
(continua no verso)

SUMÁRIO (continuação)

33.º Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática

Politécnico de Leiria
Encontro realizado online na plataforma Zoom
30 e 31 de Outubro de 2020





Alguns participantes do encontro.

Alguns participantes do encontro.

Rui Santos com Anabela Graça (Vereadora da Educação e da Cultura de Leiria) na Sala do Capítulo no Museu de Leiria durante a Sessão de Abertura do Encontro.

Introdução

Luis Saraiva[1]
(Coordenador Nacional do SNHM, CIUHCT, DM da FCUL)

A realização de um Encontro do SNHM em Leiria esteve inicialmente prevista para 2019. Esse encontro foi no entanto adiado para 2020 devido a em 2019 se celebrar o matemático José Monteiro da Rocha, nos 200 anos do seu falecimento, tendo o 32.º Encontro sido realizado em Marco de Canaveses, local do nascimento do referido matemático.

Infelizmente a pandemia que começou no início de 2020, e que ainda está longe de estar controlada, impediu a realização presencial deste Encontro, e este teve lugar online por uma plataforma Zoom. Pela primeira vez conseguiu-se que o Encontro fosse creditado pelo Ministério da Educação, o que resultou niuma elevada participação de professores, tendo o número total de inscrições ultrapassado a centena. Este foi o primeiro Encontro do SNHM realizado online, mantendo todas as características e estrutura dos Encontros do Seminário, e podemos dizer que correu muito bem, embora, claro, não se pudesse realizar algo que é inerente aos encontros presenciais e é parte da sua mais valia, o contacto directo entre participantes, as conversas fora da sala de conferências, o viver conjuntamente durante dois dias um projecto comum, incluindo a habitual tarde social, com a visita guiada pelos organizadores a locais de interesse da região. Para compensar de algum modo esta impossibilidade, fez-se a projecção de um filme que mostrou alguns dos aspectos relevantes de Leiria.

Tivemos dois conferencistas convidados, cuja vinda a Portugal esteve equacionada até se verificar a impossibilidade de um Encontro presencial, e que apresentaram conferências plenárias.

O Professor José Chabás, da Universidade Pompeu Fabra, de Barcelona, apresentou uma comunicação sobre os primeiros livros de astronomia impressos em Portugal, e sobre o cruzamento de tradições astronómicas que revelam, centrando-se em três livros: o *Almanach Perpetuo*, o *Regimento do Estrolabio* e o *Reportorio dos Tempos.*

O *Almanach Perpetuum*, de Abraham Zacuto, impresso em Leiria, foi o primeiro que surgiu em Portugal. Este livro é uma versão de outro escrito por Zacuto em hebreu, *Ha-Ḥibbur ha-Gadol.* Nele são utilizadas extensivamente as *Tabelas Afonsinas.* Nem todas as tabelas deste livro foram integradas no *Almanach Perpetuum,* a maioria das que não foram colocadas no *Almanach*

[1]Agradecimentos institucionais são devidos à *Fundação para a Ciência e a Tecnologia* de Portugal no âmbito do projeto UIBD/00286/2020.

são relativas ao calendário judaico. Uma outra tradição é visível no livro de Zacuto: as suas tabelas para conjunções e oposições são baseadas num conjunto de tabelas de Jacob ben David Bonjorn, elaboradas um século antes, relativas ao período 1361 a 1391, mas incluindo um procedimento para as calcular fora desse período temporal, Deste modo este livro partilha uma tradição de cálculo dos astrónomos judaicos da Península Ibérica e do Sul de França. Zacuto não foi o único que as utilizou, José Chabas dá o exemplo de Bernat de Granollachs no seu livro em catalão *Lunari.*

O *Regimento do Estrolabio* foi publicado em Lisboa pelo alemão Hermann Kempis no início do século XVI. É conhecido em duas versões: o *Regimento de Munique*, por haver um exemplar na Biblioteca Pública de Munique, e o *Regimento de Évora,* por haver uma cópia na Biblioteca Pública de Évora. Este segundo exemplar é mais tardio e mais completo que o de Munique. Estes dois documentos foram extensivamente estudados pelos historiadores portugueses de navegação. As suas tabelas são muito menos precisas que as do *Almanach*, o que é indicativo de diferentes públicos e usos: o *Almanach* seria destinado a astrónomos e, eventualmente, astrólogos, enquanto que o *Regimento* seria para uso de pilotos e marinheiros.

O *Reportõrio dos Tempos* foi publicado em 1518 em Lisboa por Valentim Fernandes. Anuncia-se como tradução, mas não indica a fonte. José Chabas indica-a como sendo o *Reportorio de los Tiempos,* de Andres de Li, publicado em castelhano em Saragoça em 1492. Contém tabelas de conjunções e oposições que, em última instância, passando por Andres de Li e Granollachs, derivam das de Bonjorn, e outras tiradas da obra de Zacuto, conjugando assim a tradição judaica com a afonsina.

Ugo Baldini, da Universidade de Pádua, depois de dar uma perspectiva geral das diferenças de evolução da ciência entre a Europa Ocidental e Central por um lado, e a Europa Oriental, por outro, deu conta do modo de penetração das escolas jesuitas na Europa Oriental e as consequências que tiveram no evoluir da ciência nessa regiões.

Quando se fala em Ciência Ocidental quer-se significar ciência da Europa Ocidental ou da Europa Central. De facto a Europa Oriental (que Baldini define em termos geográficos) não aompanhou a síntese cultural ocorrida no fim da Idade Média no Ocidente, e não tinha um sistema estruturado de escolas e universidades, nem uma tradição própria de ensino da matemática e disciplinas afins. Quem quisesse seguir o ensino superior tinha de vir para universidades ocidentais, principalmente na Alemanha e na Itália. São sugeridos dois motivos essencialmente para estas diferenças: por um lado, a sociedade da Europa Oriental não esteve envolvida nas grandes movimentações comerciais do Mediterrâneo, e manteve um sistema feudal e dos grandes agrários, pelo que não foi sentido, como no Ocidente, a necessidade de conhecimentos técnico-científicos especializados; por outro a divisão religioso-cultural: a Igreja Ortodoxa, dominante a Oriente, era muito diferente da Ocidental. A instrução bizantina não saiu do esquema clássico do *trivium* e do *quadrivium*. Como os estudos superiores eram orientados para fins religiosos, estavam centrados em tópicos dogmáticos ou sobre os escritos dos religiosos mais relevantes, pelo que os temas científicos só eram considerados na medida em que estavam de algum modo ligados àquelas áreas. Baldini inumera outros fatores igualmente relevantes para a diferença verificada, entre os quais a utilização do alfabeto cirílico e a não existência de ensino nem de línguas ocidentais nem de latim, a língua franca do Ocidente.

A partir de 1565/70 deve-se unicamente à Companhia de Jesus a divulgação a oriente de um sistema escolar de tipo ocidental, com a criação de um cada vez mais elevado número de escolas. O seu sucesso levou as escolas protestantes já existentes e as ortodoxas a adoptar os seus programas e os seus compêndios. Baldini detalha o conteúdo ensinado bem como as suas fontes. Devido à ausência de professores de matemática, os primeiros professores das escolas jesuitas eram alemães ou formados pela escola de Clavius em Roma . Durante os primeiros 50 anos a produção matemática limitou-se aos manuscritos das aulas. Depois a situação modificou-se, quer com o ensinamento pós-curricular de matemática avançada a futuros professores, quer com o envio dos melhores estudantes para universidades ocidentais, verificando-se um progresso em áreas como a matemática pura (o cálculo leibniziano), a arquitectura militar, a balística, a engenharia e a astronomia.

Baldini terminou a sua apresentação com uma constatação que dá que pensar: a matemática ocidental chegou à Europa Oriental trazida pelos jesuítas como parte da cultura da Companhia de Jesus, num momento em que esse mesmo conhecimento estava a entrar em colapso no Ocidente, colapso este atribuído ao raciocínio matemático-quantitativo, visto como algo radicalmente oposto àquela cultura.

A terceira e última conferência plenária foi de José Francisco Rodrigues, do Departamento de Matemática da FCUL e do CMAFCIO, sobre a espiral de Pedro Nunes e a sua influência na pré-história do Cálculo Infinitesimal.

Pedro Nunes, no *Tratado da Esfera*, publicado em 1537, conceptualiza a linha de rumo, que veio a ser designada por *linha loxodrómica*, tendo aperfeiçoado o conhecimento deste conceito na sua *Opera*, publicada em 1566. Os progressos da navegação fora do Mediterrâneo, em grande parte devidos aos portugueses, determinaram a globalização da influência europeia a partir do século XVI e tiveram correspondência em grandes progressos em áreas diversas, da Geografia e Ciências Naturais às Ciências Físicas e Astronomia.

José Francisco Rodrigues mostra como as linhas de rumo, através das suas profundas relações com a cartografia e a navegação, são exemplo de um problema prático que foi essencial na história da expansão europeia e teve importância na evolução do cálculo diferencial.

A teria de Pedro Nunes sobre as linhas de rumo foi essencial na teoria matemática da linha loxodrómica e na cartografia. Como exemplo, apresenta a linha quebrada (formada por arcos de círculo) com que Pedro Nunes aproxima a linha loxodrómica, e a que chama *noniodromia*, que utiliza para a construção de uma tábua de rumos aproximada. Isto pode ser visto como o que, dois séculos mais tarde, em 1768, Euler utilizou para a rwesolução de uma equação diferencial de 1ª ordem. Sabemos bem da importância de Mercator na cartografia. José Francisco Rodrigues mostra que Pedro Nunes, três anos antes de Mercator o ter utilizado no seu *Mapa Mundi* de 1569, já tinha criado um método para a rectificação da linha loxodrómica no plano. Sabia-se que Mercator conhecia as obras de Nunes, mas só recentemente se conseguiu estabelecer que foi através de uma tabela de rumos que elaborou a primeira projecção cilíndrica conforme num mapa. Mais tarde, em 1599, o matemático Edward Wright apresentou a primeira descrição rigorosa da regra matemática implicada naquela projecção. Rodrigues diz que se trata de facto da apresentação da primeira integração numérica. Discorre ainda sobre manuscritos de Thomas Harriot e uma publicação de Edmond Halley de 1696 para reafirmar a importância da contribuição de Pedro Nunes no que se pode chamar a pré-história do Calculo Infinitesimal.

As restantes comunicações percorrem a História da Matemática desde a pré-história até ao século XX.

Jaime Carvalho e Silva analisa algumas evidências de actividade matemática na pré-história, referindo-se em especial a trabalhos nesta área de Manoel de Campos Almeida. Daniel Pinto trabalha a *Óptica* de Euclides, em particular analisa a Proposição 15 no seu enunciado e na sua demonstração.Samuel Guessner examina a dificuldade que os astrónomos do século XV tiveram de enfrentar quando tentaram descrever geometricamente os cálculos obtidos por meio das tábuas da astronomia afonsina. Guessner e Bernardo Mota evidenciam aspectos do *De compositione astrolabii* de Andaló di Negro, um dos mais antigos textos do mundo latino sobre projeção estereográfica. Jorge Semedo de Matos analiza o *Almanach Perpetuum*, de

Abraham Zacut, publicado em 1496, e indica como os primeiros guias náuticos portugueses utuilizaram as suas tabelas para obter os valores da declinação do sol, o que era essencial para se obter a latitude do lugar. Teresa Clain apresenta o *Tratado da Pratica d'Arismetica*, de Gaspar Nicolas, o primeiro tratado de aritmética prática de autor português publicado em Portugal, fez 500 anos em Novembro de 1519. Carlota Simóes e Pedro Casaleiro referem os autores das primeiras ilustrações de observações da Lua: entre outros William Gilbert, Thomas Harriot, Galileu Galilei e Cristovão Borri, sendo as deste último feitas quando esteve em Coimbra. Os autores refeem que a gravura que incluiu em *Collecta Astronomica* (1631) é possivelmente a mais antiga imagem da Lua derivada de uma observação astronómica publicada em Portugal.

Cinco comunicações têm como tema o ensino e a divulgação da matemática. Fernando Figueiredo analisou o modo como a reforma da Universidade Portuguesa de 1772 pretendia que a história da Ciência fosse utilizada nos seus cursos de "Sciencias Naturaes". Mária Almeida apresenta um levantamento dos problemas de matemática incluídos em várias publicações periódicas entre 1859 e 1936, caracrerizando-os quanto ao seu conteúdo matemático e à sua relação com a vida corrente, propondo ainda possíveis aplicações na sala de aula. Helena Sousa Melo e Maria do Carmo Martins apresentam um quadro da variação dos conteúdos matemáticos dados no ensino liceal entre 1836 e 1888, referindo ainda alguns outros desenvolvimentos posteriores, e nesse quadro referem o modo como eram ensinados os números e as operações com inteiros. Alexandra Rodrigues deu uma visão global do modo como se processavam as aulas de matemática em épocas passadas a partir da interpretação de imagens encontradas em livros didácticos e em jornais, começando com uma gravura no *Tratado da pratica d'arismetica* de Gaspar Nicolas, de 1519, até imagens do século XX. Vitor Bonifácio estuda as dinâmicas de divulgação e instrução populares no século XIX, contextualizando o surgimento da *Bibliotheca do Povo e das Escolas*, a qual, iniciando-se em 1881, ao longo de 33 anos vai publicar 237 números.

Ainda relativo ao século XIX, Ana Patrícia Martins analisa um artigo oferecido por Daniel Augusto da Silva à Academia das Ciências de Lisboa em 1852 no que poderia ser uma contribuição para a História da Teoria dos Conjuntos. Pedro José da Cunha, em artigo de 1927 tinha considerado este distinto matemático um percursor da teoria dos conjuntos. A análise feita por Ana Patrícia leva-a a não validar a afirmação de Pedro José da Cunha.

Temos três palestras relativas ao século XX. Rui Santos analisa a visão da aplicação do Cálculo das Probabilidades feita por Diogo Pacheco de Amorim na sua tese de doutoramento datada de 1914. José Paulo Berger expõe os enormes avanços feitos na artilharia durante a primeira guerra mundial, onde a matemática era essencial, não só na construção e aplicação dos materiais de artilharia mas igualmente no que diz respeito à balística, como , por esxemplo, o cálculo da trajetória dos projecteis. Por último, Teresa Sousa (apresentação), António Canas e Magda Marabujo apresentaram o algoritmo desenvolvido por Gago Coutinho para determinar a altitude de um avião durante o voo de modo rápido e expedito, e de modo mias rigoroso que o que dava o altímetro, bem como um exemplo prático da sua aplicação.

Como é costume terminarmos esta introdução, esperamos que a publicação destes resumos seja útil a todos os que os consultarem, e que seja um estímulo para futura participação em outros encontros do SNHM, quer como palestrantes quer como assistentes. O Seminário está aberto a todos e de todos precisa.

Programa

30 de Outubro

09.10 Abertura (Luis Saraiva, Representante do Politécnico de Leiria, Representante da Câmara de Leiria, Representante da SPM, Diretor da ESTG)

09.30 José Chabas (Universidade Pompeu Fabra, Barcelona) — Early astronomical printing in . Portugal: a crossroad of traditions

10.30 Samuel Gessner (Observatoire de Paris-PSL / SYRTE, ALFA) — Entre aritmética e geometria: diferentes meios de expressão na explicação do movimento das estrelas fixas (séculos XIV e XV)

11.00 *Café*

11.30 Bernardo Mota e Samuel Gessner (F. Letras de Lisboa e Observatoire de Paris-PSL / SYRTE, ALFA) — A edição do *De compositione astrolabii* de Andaló di Negro (ca. 1330): um trabalho entre filologia e história da geometria projetiva

12.00 Daniel M. Pinto (DM da FCTUC) — A Proposição 15 da Óptica de Euclides

12.30 Jaime Carvalho e Silva (DM da FCTUC) — A Matemática Pré-Histórica através de artefactos milenários

13.00 *Almoço*

15.00 José Francisco Rodrigues (CMAFCIO) – A Espiral de Nunes e a sua influência na pré-história do Cálculo Infinitesimal

16.00 Jorge Semedo de Matos (Escola Naval) — Zacuto e os Guias Náuticos Portugueses do início do século XVI: Os primeiros passos da Navegação Astronómica em Portugal

16.30 Teresa Costa Clain (GHMEM, CIDMA, U. de Aveiro) — Os 500 Anos do Primeiro Tratado de Aritmética Prática Impresso em Portugal

17.00 José Paulo Berger (Gabinete de Estudos Arqueológicos da Engenharia Militar) — O canhão que bombardeou Paris em 1918

17.30 *Filme sobre Leiria*

Programa

31 de Outubro

09.00 Ugo Baldini (Universidade de Pádua) — The Jesuit «Drive to the East» (Lithuania-Poland-White Russia-Ukraine-Transylvania), and the role of their schools in Eastern Europe's scientific history (1570 to ca. 1700)

10.00 Carlota Simões (CFisUC) e Pedro Casaleiro (CITEUC) — Borri e Galileu: Observações Astronómicas em Coimbra

10.30 *Café*

11.00 Fernando Figueiredo (DM-FCTUC/CITEUC) — A história da ciência como ferramenta didáctico-pedagógica nos curricula das faculdades de *Sciencias Naturaes* na nova Universidade de Coimbra (1772)

11.30 Helena Sousa Melo e Maria do Carmo Martins (Dep. de Matemática e Estatística, da F. Ciências e Tecnologia, CEHu, Universidade dos Açores) — Os números e as operações com inteiros nos fins do século XIX em Portugal

12.00 Mária Almeida (UIED-FCT-UNL/ANQUEP) — Problemas de Matemática em imprensa periódica portuguesa (1859–1936)

12.30 Alexandra Rodrigues (Instituto de Gouveia − Escola Profissional, UIED) e José Manuel Matos (UNL, UIED) — A matemática na aula, um estudo histórico iconográfico

13.00 *Almoço*

15.00 Ana Patrícia Martins (Escola Superior de Educação de Viseu / CIUHCT) — Daniel Augusto da Silva, um precursor da teoria dos conjuntos?

15.30 Vitor Bonifácio (DF da UA) — A *Bibliotheca do Povo e das Escolas* e os seus precursores

16.00 Rui Santos (ESTG, Politécnico de Leiria, CEAUL) — A Aplicação do Cálculo das Probabilidades de Diogo Pacheco d'Amorim (1914)

16.30 Teresa Sousa, Magda Marabujo e António Canas (Escola Naval e CINAV, Centro de Matemática e Aplicações da UNL) — O Algoritmo de Gago Coutinho para o Cálculo da Altitude

17.00 Encerramento do Encontro

Early astronomical printing in Portugal: a crossroad of traditions

José Chabás
Universitat Pompeu Fabra, Barcelona, Spain

In this presentation we review the early editions on computational and observational astronomy printed in Portugal during the fifteenth century and first decades of the sixteenth century. Special attention is given to the first scientific book ever issued by a Portuguese printing press, the *Almanach perpetuum* by Abraham Zacut. This incunable edition dated 1496 was soon to be followed by other texts on astronomical instruments and navigational science, the *Regimento do estrolabio* and the *Reportorio dos tempos.* As will be shown, these three early editions are heir to specific astronomical traditions that were alive in the Iberian Peninsula.

1. The *Almanach perpetuum* was the first book on exact sciences to be printed in Portugal. It was published in February 1496 in Leiria at the printing house of Samuel d'Ortas, a printer who had previously issued several books in Hebrew. The *Almanach perpetuum* consists of a large set of astronomical tables and a text explaining their use. The name of the author is given in the title, at the head of the text: *Canones tabularum celestium motuum astronomi rabi Abraham zacuti ordinatisime felici sidere incipiunt.* Actually, two different versions of this book came out in Leiria: one with the text in Castilian, in 23 chapters, and another with the text in Latin, in 12 chapters. The set of tables, with titles and headings in Latin, is the same in both versions.[1]

The book published in Leiria was a version of a work originally written in Hebrew called *Ha-Ḥibbur ha-Gadol* (*The Great Composition*) authored by Abraham Zacut. This scholar was born in Salamanca most probably in 1452 and worked in his hometown until the Jews were expelled from Castile in 1492. He then settled in Portugal where he entered the service of King João II until 1495 when the king died, and later worked for King Manuel, until the Jews in Portugal were forced to convert or leave the country. Zacut moved to North Africa. Numerous scholars are explicitly mentioned by Zacut in his

[1]See J. Chabás and B. R. Goldstein 2000. *Astronomy in the Iberian Peninsula: Abraham Zacut and the Transition from Manuscript to Print.* Transactions of the American Philosophical Society, 90.2. Philadelphia.

work, and among them is Judah Ben Verga, an astronomer active in Lisbon from about 1455 to 1480.[2]

A few tables in Zacut's *Ḥibbur* were not integrated into the *Almanach perpetuum*, mostly those concerning the Jewish calendar. The tables in the book printed in Leiria deal with the usual problems addressed by practitioners of astronomy at the time, and their main purpose is to provide the true positions of the Sun, the Moon, and the planets at regular intervals (daily for the two luminaries) as well as the times of syzygies (conjunctions and oppositions of the Sun and the Moon) in order to determine the circumstances of solar and lunar eclipses. The tables are computed for the meridian of Salamanca and many of them have year 1473 as epoch. Among the most significant tables is one displaying the true daily positions of the Sun at noon in Salamanca, for a period of 4 years, where the entries are given in zodiacal signs, degrees, minutes and seconds. This table was used by sailors, together with a table for solar declination, also extant in the *Almanach perpetuum*, to determine the geographical latitude at sea. All tables for the positions of the celestial bodies, including that for the solar position, rest on periods of revolution different for each planet, after which the planets return to about their initial position. Algorithms to extend their use beyond the first cycle were also provided, conferring this set of tables their perpetual characteristic evoked in the title.

The tables for positions, mean motions, and other quantities associated with the planets in the *Almanach perpetuum* were compiled in the framework of Alfonsine astronomy, that is, they derive from the Alfonsine Tables, originally compiled in Toledo under the patronage of King Alfonso X of Castile and León (reigned: 1252–1284) and recast in Paris in the first decades of the fourteenth century. This set came back to Spain, in particular to Salamanca, in about 1460, and was extensively used by Abraham Zacut in his tables in the *Ḥibbur*. Besides this Alfonsine tradition, the *Ḥibbur*, and thus the *Almanach perpetuum*, shares another tradition developed by Jewish astronomers in the Iberian Peninsula and Southern France.

2. The Jewish tradition is clearly illustrated in Zacut's tables for true syzygies. They were based on another set of tables for conjunctions and oppositions computed by Jacob ben David Bonjorn more than a century earlier.

[2]See B. R. Goldstein, "Preliminary remarks on Judah ben Verga's contributions to astronomy", in L. Saraiva and H. Leitão (eds.), *The Practice of Mathematics in Portugal: Papers from the International Meeting held at Óbidos [Portugal], 16–18 November 2000.* Coimbra: Coimbra University Press, 2004, pp. 63–90. See also B. R. Goldstein "The astronomical tables of Judah ben Verga", *Suhayl* 2 (2001), 227–289.

This astronomer, in the service of Pere el Cerimoniòs (1319–1387), King of Aragon and Catalonia, drew tables for the meridian of Perpignan, listing all true conjunctions and oppositions in a period of about 31 Julian years and 2 days, ranging from 1361 to 1391, and tables for determining the circumstances of solar and lunar eclipses. It is worth noting that, for the derivation of his tables Bonjorn followed closely a previous work on mean syzygies and a value for the length of the mean synodic month by the well-known Jewish scholar, Levi ben Gerson (1288–1344), working in Southern France. Levi based his tables for the motion of the Moon on his own observations and his own lunar model in the framework of Ptolemaic astronomy, totally independent of Alfonsine astronomy.[3]

Bonjorn's tables were definitely most successful in manuscript and they were diffused widely in Hebrew, Latin, Catalan, and Greek, although they were never printed as such. Probably part of this success was due to the fact that the tables also include a procedure to extend the use of the tables for years before 1361 and after 1391. This scheme was certainly used by Zacut to adapt Bonjorn's tables to his own time.

3. In the early 1500s the German printer established in Lisbon, Hermão de Campos (Hermann Kempis), published the *Regimento do estrolabio*. The full title is more explicit on its purpose: *Regimento do estrolabio & do quadrante pera saber ha declinaçam & ho logar do soll em cada huũm dia & asy pera saber ha estrella do norte.*[4] This text is known as Regiment of Munich, because it is preserved in the public library in Munich. A later and more developed version of it is extant in the Public Library in Évora, and has been called Regiment of Evora. These two documents have been extensively studied by Portuguese historians of navigation.[5]

The *Regimento* consists of a rather short text and a long table. The text provides a series of rules for nautical astronomy to be used for determining

[3]For Jacob ben David Bonjorn, see J. Chabás 1991. "The Astronomical Tables of Jacob ben David Bonjorn", *Archive for History of Exact Sciences*, 42: 279–314; see also J. Chabás 2019, *Computational Astronomy in the Middle Ages.* Madrid, pp. 277–283. For Levi ben Gerson, see B. R. Goldstein 1974. *The Astronomical Tables of Levi ben Gerson.* Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences, 45. New Haven. For Levi's determination of the length of the mean synodic month, see B. R. Goldstein 2003, "Ancient and medieval values for the mean synodic month", *Journal for the History of Astronomy*, 34: 65–74.

[4]A facsimile edition with a commentary in French was published by J. Bensaude in 1924 as *Regimento do estrolabio e do quadrante*. Imprimerie Nationale. Lisbon.

[5]L. Mendonça de Albuquerque 1965. *Os guias náuticos de Munique e Évora.* Junta de Investigações do Ultramar. Lisbon.

latitude from the solar altitude at noon. The text also includes a number of worked examples corresponding to observations north, south, and on the equator, as well as a list of geographical latitudes of places along the Atlantic coast of Africa north of the equator.

In addition to the text, there is a long table presented as a daily calendar in 12 monthly subtables, with no indication of the year for which it is valid. For each day of the year we are given the corresponding saint's name, the position of the Sun at noon, and the solar declination. It is worth noting that the solar position is only given to degrees, whereas it was displayed to seconds in the *Almanach perpetuum.* This lack of precision makes it almost impossible to identify with confidence its source. In the Evora version, the equivalent table for the daily solar positions covers 4 years, not just one as in the Munich version. It has been claimed that this table is valid for years 1517-1520 and depends on Zacut's corresponding table. As for the other tabulated quantity, the solar declination, it is readily seen that it reaches its maximum value (23;33°), that is, the obliquity of the ecliptic, in June 11-14. This is also a crude approximation in relation to more precise values in use at the time. In a more general way, the low precision used in the *Regimento,* as compared with other contemporary astronomical works, indicate that we are dealing with quite a different readership, as well as different uses. Zacut's tables are addressed to astronomers and possibly astrologers, while the *Regimiento do estrolabio* is intended to appeal to pilots and sailors.

The volume printed in Lisbon includes a second work, which is an abridged first translation into Portuguese of Sacrobosco's known treatise, under the title: *Tractado da Spera do mundo tyrada de latim em linguoagem com ha carta que huũm grande doutorale man mando va orey de purtugall dom Joham el Segundo.* The volume ends with a letter dated 1493, written by Hieronymus Münzer to King João II, proposing a voyage to Cathay, i.e., China.

4. Zacut was not the only scholar to take advantage of Bonjorn's tables for syzygies. In 1485, Bernat de Granollachs, *mestre en arts y en medicina dela inclita ciutat de Barçelona*, published in Catalan a book called *Lunari.* It provides a list of all new and full moons, specifying the month, day, hours, and minutes of each of them, presented on a yearly basis, from 1485 to 1550. For each year we are also given information on the dates of Easter, Corpus Christi, and other movable feasts, as well as the time and magnitude of each eclipse visible at the latitude of Barcelona. The numerical information for all syzygies derives from Bonjorn's tables. The *Lunari* became a bestseller

in the early ages of printing and had no less than 42 incunabula editions, mostly in Latin, but also in Italian, Catalan, and Castilian.[6]

In many of these editions, the work by Granollachs is inserted, with no mention of the name of the author, in a *Reportorio de los Tiempos*, signed by Andrés de Li, first published in Zaragoza in 1492. Andrés de Li completed his book with a miscellaneous text including comments on the division of time, definitions of the year, month, day, etc., explanations of the properties of the zodiacal signs and planets, a calendar specifying the saints' days, medical information on humors, bloodletting, etc., and a short list of localities, with an indication of the time one has to add or subtract to make the table valid for the user's own city. The entry for Barcelona is 0;0h, clearly indicating where the original table was computed.

5. In 1518, a German printer coming from Moravia, Valentim Fernandes, published in Lisbon a volume entitled *Reportorio dos tempos em lingoagem portuguez com as estrellas dos signos.* The title refers to a translation into Portuguese that was made by Valentim Fernandes himself, but does not specify the original language nor the text from which it was translated. Nevertheless, it is not difficult to recognize that the original text is the *Reportorio de los Tiempos,* first published in Castilian in 1492, as mentioned above. As was the case with its Castilian homologue, the book translated and printed by Valentim Fernandes had a remarkable success for it was printed at least eight times until the 1570s. Most of the editions were made by German Galhard, a printer of French origin also working in Lisbon.[7]

The *Reportorio dos tempos* contains a list of true conjunctions and oppositions, from 1518 to 1550, borrowed from the *Reportorio* by Andrés de Li, in turn derived from Granollachs's *Lunari*, as explained above, and ultimately built on Bonjorn's table of syzygies. The *Reportorio dos tempos* also displays a table for the daily positions of the Sun, of which we are told that it was "tirada puntualmente del Zacuto pello honrrado Gaspar nicolas mestre sufficiente en esta arte".

In short, the *Reportorio dos tempos* first printed in 1518 gathers multiple astronomical traditions: the Alfonsine tradition represented by Abraham Zacut's computation of solar positions and the Jewish tradition represented

[6]For a facsimile edition with a commentary, see J. Chabás and A. Roca 1985. *El "Lunari" de Bernat de Granollachs.* Fundació Vives i Casajuana. Barcelona. See also J. Chabás and A. Roca 1998. "Early Printing of Astronomy: The *Lunari* of Bernat de Granollachs", *Centaurus*, 40: 124–134.

[7]A. Fontoura da Costa 1983. *A Marinharia dos Descubrimientos.* Edições Culturais da Marinha, Lisbon.

by the list of true syzygies based on a quite different foundation and first computed by Jacob ben David Bonjorn. This tabular material was complemented with a text providing practical and basic information originated in Granollachs's *Lunari* and Andrés de Li's *Reportorio de los tiempos*.

It can thus be concluded that early printed books on astronomy in Portugal offer therefore a nice example of the complexity of the transmission of astronomical knowledge and the mixture of components on which it is based, facilitated by the development of print.

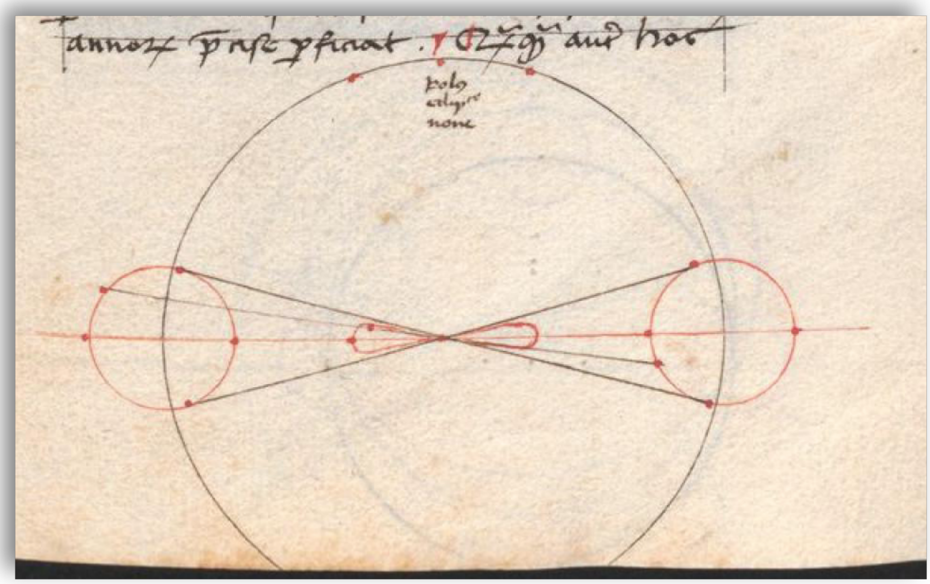
Entre aritmética e geometria: diferentes meios de expressão na explicação do movimento das estrelas fixas (sécs. XIV e XV)

Samuel Gessner
Observatoire de Paris, ALFA, ERC grant 723085

A atribuição de um movimento duplo à oitava esfera (a esfera das estrelas fixas) constitui uma das marcas da astronomia Afonsina que dominou progressivamente a prática astronómica europeia a partir de 1320. Segundo essa doutrina, a precessão dos equinócios resultaria da sobreposição de um movimento de 'trepidação' e de um movimento uniforme. As Tábuas Afonsinas divulgadas a partir da Universidade de Paris ilustram essa teoria de forma clara e simples: a soma daquelas duas componentes, ambas funções do tempo, permitia obter a variação em longitude das estrelas fixas ao longo dos séculos.

Tomando como exemplo Regulus, a estrela mais brilhante da constelação Leo, o catálogo ajustado pelos astrónomos do rei Afonso para a era T_1 tem a longitude α *Leonis* $(\mathrm{T}_1) =$ Leo $19^\circ\,38'$, onde T_1 corresponde ao meio dia local em Toledo, do dia 31 de Maio de 1251. A maioria dos astrónomos dos séculos XIV até XVI usavam as tábuas Afonsinas para prever a longitude da mesma estrela noutros tempos. Por exemplo, o astrónomo Johannes Werner quando observou a mesma estrela na era T_2, isto é, às 4.30 da manhã em Nuremberga, dia 1 de Dezembro de 1514, pôde constatar a diferença, fazendo o cálculo, como está relatado no seu tratado *De motu octavae sphaerae* (1522). A componente uniforme acumulada neste espaço de tempo é dado pelas tábuas em $1^\circ\,56'\,9''$. Para obter a componente que pertence ao movimento de trepidação, calcula-se a diferença das 'equações' $\mathrm{q}(\mathrm{T}_\mathrm{i})$ do movimento da oitava esfera (colhidas na tábua tradicionalmente apelidada 'Tabula equationum motus accessus et recessus 8e spere' com os máximos de $\pm 9^\circ$): $\mathrm{q}(\mathrm{T}_2) - \mathrm{q}(\mathrm{T}_1) = 45'\,13''$. A nova longitude da estrela é assim obtida: $\alpha\,$Leo $(\mathrm{T}_2) =$ Leo $19^\circ\,38' + 1^\circ\,56'\,9'' + 45'\,13'' = 22^\circ\,19'\,22''$. (Werner, no entanto, por observação, obteve uma longitude de Leo $23^\circ\,42'$.)

A situação tornou-se menos clara a partir do momento em que os astrónomos do século XV começaram a examinar as implicações geométricas da doutrina implícita no cálculo utilizando tábuas. As dificuldades eram várias e serão mencionadas aqui apenas duas. O *Almagesto* de Ptolemeu descreve a precessão uniforme como o resultado do movimento da esfera das estrelas fixas sobre os polos da eclíptica. Ainda que os Afonsinos adoptem uma outra



Peurbach, *Theoricae novae planetarum*, Viena, ÖNB, Cod. 5203, fol. 22r

taxa, esta geometria adequa-se à componente uniforme da precessão. Também para a componente oscilatória existia uma interpretação geométrica no *De motu octave spere* atribuido a Thābit ibn Qurra. Esta obra explica o movimento da esfera das estrelas fixas em conjunto com uma 'eclíptica móvel' produzido pela rotação sobre pequenos círculos de dois pontos da esfera (chamados 'cabeças de Carneiro e de Balança') em redor dos pontos equinoxiais fixos da esfera do movimento diúrno. As duas tábuas Afonsinas com os títulos 'motus octavi circuli' e 'tabula equationum...' pareciam corresponder bem a esta configuração. No entanto a configuração geométrica não está completamente determinada pela expressão tabelar dos movimentos. Assim, Nicolaus Comes de Comitibus, no seu *De triplici motu octavae sphaerae* (1450) imagina que os pontos solsticiais da eclíptica móvel sempre se encontram a deslizar ao longo da eclíptica média. Em contraste, a célebre *Theoricae novae planetarum* (1453) de Georg Peurbach insiste que as duas eclipticas têm pontos de intersecção fixos nos pontos solsticiais da eclíptica média. Por consequência, os pontos solsticiais móveis seguem umas curvas 'quasi conoidales', semelhantes a lemniscatas.

Peurbach, no entanto, tem o mérito de apontar para uma problemática mais fundamental ainda, sem a resolver: se os pequenos círculos do movimento de trepidação se deslocarem ao longo da eclíptica sob o efeito da componente uniforme, então o equinócio 'real', isto é o ponto em que a eclíptica móvel interseta o equador, não (ou apenas muito raramente) coincide com o ponto equinocial adoptado como origem das coordenadas eclípticas. Por outras palavras, com esta interpretação geométrica a precessão obtida pelo cálculo tabular não mede o arco da eclíptica a partir do ponto equinocial 'real'. Peurbach nas suas *Theoricae novae* não dá o assunto da oitava esfera como concluido. Na verdade, as edições subsequentes do tratado incluem apresentações das diferentes teorias e parámetros, incluíndo a de Ptolemeu e de Pseudo-Thābit. Em suma, o esforço dos astronomos para conceber geometricamente a mudança em longitude que sabiam calcular acabou por revelar uma 'imperfeição' da doutrina que, por consequência, levantava dúvidas sobre a veracidade do método tabular.

Desde o final do século XV observa-se a construção de esferas armilares complexas com o objectivo de representar o movimento de trepidação, hoje designadas por 'esferas de trepidação'. Contam-se hoje dezoito destas esferas oriundas dos séculos XV até XVII. Em comparação com as esferas armilares comuns elas são muito raras e todas diferentes. Apresentam variações por vezes importantes nas suas configurações. A maioria delas inclui uma materialização dos dois pequenos circulos de trepidação colocados nos pontos equinociais da 'nona esfera'. O exemplo da esfera datada de 1605, fabricada por Ch. Schissler em Augsburgo, hoje no Maximilianmuseum (no. inv. 3432), permite ilustrar as implicações de uma representação tridimensional. Quando o raciocínio geométrico de Peurbach revelou uma 'inconsistência' entre configuração das esferas e valores tabuladas, os modelos materiais do tipo da esfera de Schissler permitia descobrir ainda outro aspecto do problema.

A esfera em Augsburgo está conforme com a descrição de Peurbach: no interior da esfera principal de rotação diurna (esfera armilar comum) encontra-se um anel graduado que representa a eclíptica da nona esfera, no plano da ecliptica principal. Esse anel ajusta-se por deslisamento para produzir o efeito da componente uniforme da precessão, deslocando assim os pontos equinociais da nona esfera relativamente aos pontos respectivos da esfera principal. Montados no interior deste anel, precisamente nos pontos equinociais, encontram-se duas rodas graduadas. Na periferia destas duas pequenas rodas prendem-se os eixos diametralmente opostos de um anel que representa a ecliptica da oitava esfera. Os dois eixos materializam as 'cabeças de Carneiro e de Balança' acima mencionadas. Estes pontos podem ser fixados nas pequenas rodas, reproduzindo assim a trepidação ao longo da periferia de dois pequenos círculos. O anel correspondente à ecliptica da oitava esfera encontra-se assim num plano diferente do plano da ecliptica da nona esfera e a da principal. Este movimento corresponde à componente oscilatória do movimento.

Além de ser uma imagem simbólica e didáctica da geometrização de Peurbach, a esfera de Schissler, com as suas partes correctamente proporcionadas e cuidadosamente graduadas, apresenta a possibilidade de ajustar o instrumento com precisão em função de uma época certa. Assim, o movimento médio da oitava esfera, isto é a deslocação das cabeças de Carneiro e Balança, obtem-se da tábua acima mencionada do 'motus octavi circuli'. Em 1514, os pontos encontravam-se em $78° 7' 10''$ a contar do ponto mais afastado da ecliptica da nona, levando a ecliptica da oitava esfera a uma posição perto da coplanar à ecliptica da nona. Só faltaria agora ajustar a componente uniforme do movimento obtida pelo deslisamento da ecliptica da nona esfera. Acontece que a tábua do movimento médio das estrelas fixas fornece a velocidade desta componente, mas não há indicação nenhuma sobre a posição *inicial* dos pontos equinociais relativamente à ecliptica principal. Desta forma, a manipulação do instrumento de Schissler acaba por evidenciar que a doutrina da oitava esfera, tal como é expressada nas tábuas, não permite determinar inteiramente a configuração geométrica do movimento que se calcula.

Este episódio da história da astronomia ilustra o impacto que pode ter o meio de expressão utilizado para descrever um fenómeno astronómico. Enquanto a expressão tabular basta perfeitamente para obter resultados numéricos das posições planetárias e estelares, uma descrição da situação geométrica, fosse ela por prosa, por diagramas ou por modelos tridimensionais, revela que as tábuas por si só não se podem transpôr em uma configuração geométrica que seja congruente em todos os pormenores com o cálculo tabular.

Bibliografia

1. E. J. Aiton. 1987. "Peurbach's *Theoricae Novae Planetarum*: A Translation with Commentary", *Osiris*, vol. 3, n. 1, p. 4–43.

2. M-M. Saby. 1987. *Les canons de Jean de Lignères sur les tables astronomiques de 1321: édition critique, traduction et étude*, thesis, Ecole des Chartes.

3. D. A. King. 1993. "177 Armillarsphäre", in U. Müller ed., *450 Jahre Copernicus 'De revolutionibus', Astronomische und mathema-*

tische Bücher aus Schweinfurter Bibliotheken, Veröffentlichungen des Stadtarchivs Schweinfurt, n. 9, p. 362–364.

4. C. Ph. E. Nothaft. 2019. "An Alfonsine universe: Nicolò Conti and Georg Peurbach on the threefold motion of the fixed stars", *Centaurus*, vol. 61, p. 91–110.

A edição do *De compositione astrolabii* de Andaló di Negro (*ca.* 1330): um trabalho entre filologia e história da geometria projectiva

Samuel Gessner
Observatoire de Paris, ALFA, ERC grant 723085

Bernardo Mota
Centro de Estudos Clássicos da Faculdade de Letras da Univ. de Lisboa

Até muito recentemente, o *De compositione astrolabii*, de Andaló di Negro, não estava acessível aos estudiosos, apesar de constituir um dos mais antigos textos do mundo latino sobre projeção estereográfica. O trabalho de edição crítica e tradução deste texto agora concluído preencheu esta lacuna, ao mesmo tempo que identificou e resolveu uma série de problemas de interpretação do texto que conjugavam questões filológicas, historiográficas e de história da geometria.

Andaló di Negro nasceu em Génova *ca.* 1260 e faleceu em Nápoles no ano de 1334. Membro de uma família genovesa de embaixadores e mercadores com direitos senhoriais na Ligúria, Chipre, Arménia e Síria, viajou pelo espaço mediterrânico e estabeleceu laços de amizade com Hugo IV de Lusignan, Rei de Chipre e Jerusalém. Tendo obtido o cargo de embaixador da República de Génova no Oriente, ficou encarregue das negociações de paz com o Imperador de Trebizonda em 1314. Depois desta data, perde-se o seu rasto, mas sabe-se que permaneceu na corte do Roberto I de Nápoles, também conhecido como Roberto de Anjou, durante alguns anos. Foi nesse ambiente de corte que Andalò, já septuagenário, ensinou astronomia e astrologia ao poeta Bocaccio. Um documento de Nápoles com a data de 9 de Junho de 1334 refere a sua morte.

Entre as obras escritas por Andaló, contam-se várias dedicadas ao astrolábio. Algumas destas foram impressas em 1475, integrando assim o primeiro volume alguma vez impresso sobre esse tópico. De fora dessa edição, contudo, ficou o tratado *De Compositione, que se* destaca dos demais pelo teor essencialmente teórico. Muito mais do que um texto clássico sobre o método de construir geometricamente as escalas num astrolábio, o *De Compositione* expõe os conceitos de base envolvidos nas várias etapas de construção do instrumento e elucida, em cada passo, o resultado da projeção de uma esfera num plano, ainda que não apresente demonstrações euclidianas. Com base nos cinco testemunhos manuscritos mais relevantes, é possível reconstituir-se a seguinte sequência de capítulos, que não vêm explicitamente indicados na obra:

1. Dos coluros (De coluris)
2. Do círculo equinocial (De circulo equinoctiali)

   Dos círculos paralelos de Câncer e de Capricórnio (De circulis parallelis cancri et capricorni)

   Da descrição da esfera (De descriptione spere)
3. Como a esfera é cortada e comprimida (Qualiter spera secatur et deprimitur)

   Do desenho dos círculos (De figuratione circulorum)
4. Das linhas meridiana, da meia-noite, oriental e ocidental (De lineis meridiana, medie noctis, orientalis et occidentalis)

   Da formação dos círculos com os quais se fazem os almucantares (De formatione circulorum cum quibus fiunt almucantarath)

   Da reconstrução do mesmo (De refectione eiusdem)
5. Do almucantar (De almucantarath)

   Do zénite da cabeça (De cenith capitis)
6. Da aurora (De aurora)
7. Do azimute (De azimute)
8. Das horas (De horis)
9. Da grandeza e brevidade dos dias (De magnitudine et brevitudine dierum)
10. Da eclíptica e dos signos do zodíaco (De ecliptica et signis zodiaci)
11. Do local e posição das estrelas fixas (De loco et situ stellarum fixarum)
12. Do polo do zodíaco (De polo zodiaci)

Ao editar o texto de cada um deles, foram propostas soluções para vários problemas identificados numa edição anterior (Cesari 1984a), incluindo a correcção de pequenos erros de leitura dos manuscritos, a inclusão de pequenas passagens que existem nos testemunhos que agora sabemos serem os mais importantes, e a eliminação de algumas dificuldades de interpretação de conteúdo.

Depois do trabalho realizado, é possível afirmar que os vários breves desenvolvimentos de natureza teórica incluídos no tratado mostram que a prática instrumental não deve ter sido a sua principal finalidade. Um exemplo que atesta este facto é o capítulo 4, que se debruça sobre a construção dos círculos de altitude constante chamados almucantares. Nele, sobressai o facto de os pontos do coluro solsticial com declinação meridional não serem construídos directamente como uma projecção estereográfica de uma esfera com raio dado R_1; antes pelo contrário, para obter as imagens desses pontos no plano do equador, Andalò prefere usar os pontos correspondentes com declinação septentrional numa esfera de raio maior R_2 igual ao raio da projecção do trópico de Capricórnio, e projectados pelo polo desta esfera maior. Isso equivale, em notação moderna, à aplicação da seguinte igualdade:

$$R_1 \tan\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right)\right) = R_2 \tan\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon+\delta\right)\right) \tag{1}$$

para toda declinação $\delta \in [0, \varepsilon]$, quando a razão dos raios das esferas projectadas, R_1 e R_2, é $\frac{R_2}{R_1} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Esta propriedade (1) é utilizada sem se apresentar qualquer justificação da validade do procedimento, como, de resto, era típico da época, mas está correcta. Também os capítulos 8 e 9, dedicados ao traçado das linhas das horas, apresentam um desenvolvimento original sobre os casos-limite dessa operação que se verificam na preparação de tímpanos de astrolábio para latitudes terrestres extremas (perto do círculo ártico, no próprio círculo ártico e além desse mesmo círculo). Estes pequenos desenvolvimentos de natureza teórica e especulativa sugerem que o pequeno tratado de Andalò di Negro explora o potencial heurístico de um género da literatura científica medieval que poderia parecer, à primeira vista, um mero texto procedimental.

Bibliografia

Andalò di Negro, ed. Fornaciari and Faracovi. 2005. *Trattato sull'astrolabio di Andalò di Negro*, a cura di P. E. Fornaciari e O. P. Faracovi. Pubblicazione del Comune di Livorno in occasione della "Primavera della Scienza a Livorno" (Ospedaletto: Pacini editore).

Cesari, A. M. 1984a. *L'astrolabio di Andalò di Negro*, Parte I, edizione critica. Milano: s. n.

Cesari, A. M. 1984b. *Practica Astrolabii di Andalò di Negro*, Parte I. Edizione critica. (Bergamo: Istituto Universitario di Bergamo).

Muccillo, M. 1991. "Di Negro, Andalò". *Dizionario Biografico degli Italiani* 40: 126–131.

Dominique Raynaud, Samuel Gessner, Bernardo Mota, "Andalò di Negro's *De compositione astrolabii*: a critical edition with English translation and notes", *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 73, 2019, p. 551–617.

A Proposição 15 da Óptica de Euclides

Daniel Pinto
Universidade de Coimbra – CMUC
Departamento de Matemática

Sem a relevância histórica dos *Elementos*, a *Óptica* de Euclides está longe de ser uma obra menor, constituindo-se como uma das mais antigas e influentes no campo da óptica geométrica. Apesar das imperfeições do texto, e de algumas incertezas quanto à autoria, poucos contestam a sua preponderância no desenvolvimento das modernas teorias da visão. Diversas cópias do manuscrito foram elaboradas ao longo dos séculos, tendo chegado até nós versões em grego, árabe e latim (algumas delas agora também traduzidas para outras línguas como o inglês, o francês, o italiano e o português). A partir dos manuscritos em grego, foram editadas, em 1895, por J. L. Heiberg, duas versões que ficaram conhecidas como Heiberg A e Heiberg B [4]. A construção da versão A teve por base manuscritos descobertos no séc. XIX, e foi apresentada por Heiberg como sendo a mais próxima do texto original, enquanto a versão B corresponderia a uma versão modificada, no séc. IV, por Teão de Alexandria. Apesar de bem recebida na altura e durante grande parte do séc. XX, esta é uma tese que, hoje em dia, não recolhe consenso [6].

De todos os conceitos que Euclides introduz logo nas primeiras definições (nas quais os raios visuais são apresentados como linhas rectas, e o olho implicitamente entendido como um ponto), o mais importante decorre da ideia de que é o ângulo de visão que determina o tamanho aparente do objecto. Essa separação entre *realidade* e *aparência* é bastante explícita na Proposição 8 da *Óptica*, na qual se prova que segmentos de igual comprimento e paralelos, se colocados a distâncias distintas do olho, não são vistos na proporção dessas distâncias. A demonstração da *Óptica* compara a razão entre amplitudes de ângulos (tamanhos aparentes) com a razão entre comprimentos de segmentos (distâncias reais), e chega à conclusão que estas não coincidem. Por outro lado, visitando algumas das versões do texto [1][2][3][5], percebe-se que a demonstração da Proposição 15 (bem como as das Proposições 16 e 17, variações daquela) centra-se sempre no comprimento dos segmentos, negligenciando o tamanho aparente dos objectos, que é o tema central da *Óptica.* Na versão de Francisco de Melo [1], matemático português do séc. XVI, a proposição 15 é enunciada da seguinte forma:

De grandezas colocadas por baixo do olho em que uma excede a outra, se o olho se aproximar da menor, aquilo que se vê por cima [dela] aparece *maior, se o olho se afastar da menor, [aquilo que se vê por cima dela] aparece menor.*

Mas mais interessante do que o texto da proposição é o início da prova elaborada por Francisco de Melo. Antes de apresentar a sua própria demonstração, Francisco de Melo reescreve o enunciado da proposição — que na formulação inicial acima apresentada (baseada na versão em latim de Zamberto, que terá usado um texto grego próximo da versão Heiberg B) inclui a referência às aparências — salientando que a comparação será feita entre comprimentos de segmentos e a diferença real entre as grandezas, que o autor denomina *excesso legítimo*. Recorrendo à notação da Figura 1, podemos dizer que o que Francisco de Melo conclui é que aquilo que é visto acima de CD (o segmento AG) é maior do que o *excesso legítimo* AF, e que o que é visto acima de ZK (o segmento AL) é menor do que AF.

Este tipo de demonstrações, focadas na diferença real entre comprimentos, abre espaço ao exercício especulativo de tentar reformular a prova da Proposição 15, estabelecendo uma comparação entre tamanhos aparentes. Neste caso, recorrendo, entre outras ferramentas, à comparação entre ângulos inscritos numa circunferência, uma técnica fiel ao estilo da *Óptica* de Euclides, e que é utilizada abundantemente na segunda metade da obra. Considerando dois segmentos AB e GD (representando o maior e o menor objecto, respectivamente), e L e E duas posições distintas para o olho, tal como indicadas na Figura 2, é possível provar que o ângulo ALG tem amplitude maior do que o ângulo AEG, e que portanto o tamanho aparente daquilo que se vê por cima do objecto menor aparece maior se o olho se aproxima do menor (posição L) e aparece menor se o olho se afasta (posição E).

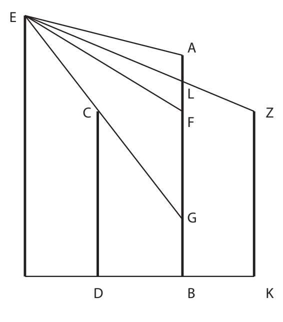


Figura 1: Demonstração da Proposição 15 proposta por Francisco de Melo.

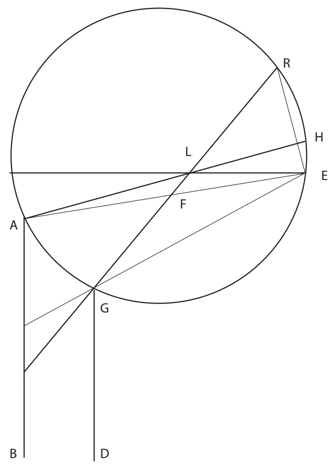


Figura 2: Demonstração alternativa da Proposição 15.

Referências

[1] Bernardo Mota, Henrique Leitão, *Francisco de Melo: Obras Matemáticas. vol. I: Texto Latino e Tradução*, BNP/CEC, 2014.

[2] Elaheh Kheirandish, *The Arabic version of Euclid's Optics*, Springer, 1999.

[3] Fabio Acerbi, *Euclide, Tutte le opere*, Bompiani, 2007.

[4] Harald Siebert, *Transformations of Euclid's Optics in late antiquity*, Nuncius 29 (2014), pp. 88–126.

[5] Harry David Burton, *The Optics of Euclid*, JOSA, 35(5) (1972), pp. 357–372.

[6] Wilbur R. Knorr, *On the Principle of Linear Perspective in Euclid's Optics*, 34 (1991), pp. 193–210.

A Matemática Pré-histórica através de artefactos milenários

Jaime Carvalho e Silva
Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra

A relevância social da Matemática é muito anterior à Matemática Grega, que muitos consideram o início da História da Matemática. Vários investigadores têm chamado a atenção para a relevância da atividade matemática em épocas remotas. Seidenberg defende que a "*geometria tem uma origem ritual (...) as origens vão até ao Leste mais antigo*." (Seidenberg, 1962) Como bem assinala Manoel de Campos Almeida, Van der Waerden defende "uma origem única, pré-histórica, para as principais correntes da matemática da antiguidade: grega, hindu, chinesa, babilônica e a dos construtores megalíticos." (Almeida, 2009)

Manoel de Campos Almeida chama a atenção para a "similaridade entre as ideias matemáticas e religiosas, além de outras, dos construtores megalíticos das Ilhas Britânicas, dos babilônios, dos gregos, dos hindus e dos chineses, que praticamente nos forçam a postular a existência de doutrina matemática comum, emergente do neolítico, da qual essas ideias se originaram." (Almeida, 2009, pg. 6)

Existem muitos artefactos com inscrições abstratas, de índole numérica ou geométrica dos tempos pré-históricos que não têm recebido muito atenção dos historiadores matemáticos, e, no entanto, eles são potencialmente relevantes para compreender melhor o uso da Matemática em tempos mais recuados. Claro que precisamos de uma noção de Matemática mais abrangente. Podemos seguir Manoel de Campos Almeida escolhendo "uma conceituação operacional que nos permita distinguir o que é matematizar das outras atividades cotidianas do ser humano, tais como comer, dormir, caçar, plantar, construir, fabricar, acender, etc." (Almeida, 2009)

Um dos artefactos pré-históricos mais conhecidos e estudados é o osso de Ishango, em exibição no Museu da Ciência de Bruxelas, cuja datação aponta para uma antiguidade de cerca de 20 000 anos; poderá constituir um calendário (há na realidade vários ossos descobertos em Ishango, mas um é mais completo e detalhado e tem atraído mais a atenção dos historiadores). O osso de Lebombo, considerado ainda mais antigo, não tem a mesma notoriedade e nem sequer está em exposição no museu da África do Sul, onde está depositado (Museu McGregor, Kimberley, Northern Cape). Estes e outros exibem marcações a espaços regulares, podendo representar registos de contagens ou mesmo calendários.

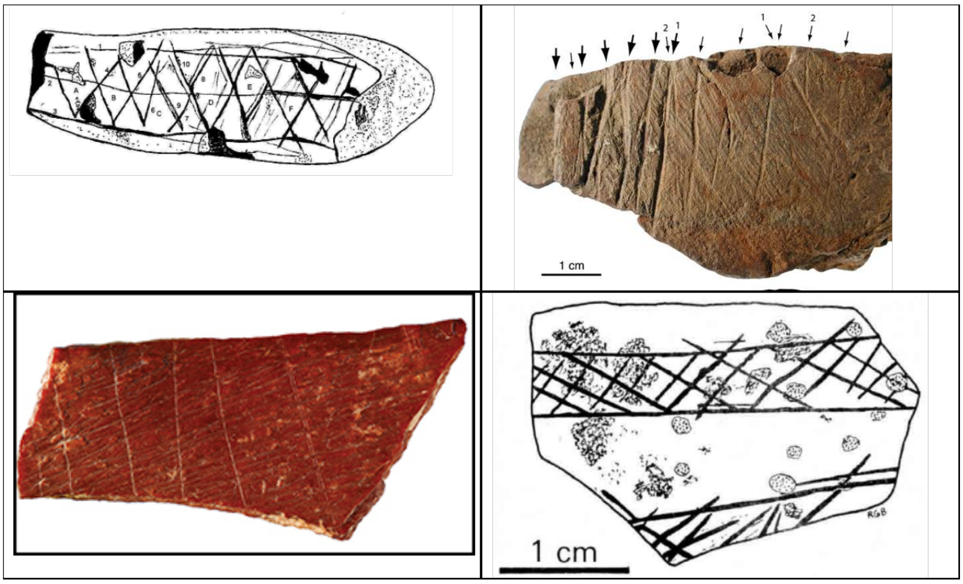


Figura 1: Ocre da caverna de Blombos (Africa do Sul), Ocre do Rio Klasies (Africa do Sul), Osso de Lingjing (China), casca de ovo de avestruz de Patne (Índia).

Muitas investigações arqueológicas têm feito aparecer outros artefactos pré-históricos em Africa e na Ásia, como os da caverna de Blombos, das cavernas do Rio Klasies, ambos na Africa do Sul, dos ovos de avestruz de Patne na Índia ou dos ossos da região de Linjing na China, mas o seu estudo e interpretação está essencialmente por fazer. Todos estes artefactos têm sido datados com dezenas de milhares de anos, podendo ultrapassar cem mil anos. O mais curioso destes artefactos é que não se limitam a registar em osso ou em pedra marcações a espaços regulares, mas parecem apresentar representações geométricas abstratas cuja finalidade obviamente se desconhece.

Tal como refere Manoel de Campos Almeida "A Pré-História da Matemática se empenha no estudo de como a Matemática se tornou um fator estruturante do raciocínio que classificamos como especificamente humano, o que, obviamente, ocorreu muito antes da invenção da escrita. Contempla a Matemática com uma ótica ampliada, similar à proposta por D'Ambrosio em sua Etnomatemática"(Almeida, 2011, pg. 9).

Esta área parece requerer que os historiadores matemáticos se debrucem mais sobre ela.

Bibliografia

ALMEIDA, Manoel de Campos (2009) *Origens da Matemática – A Pré-História da Matemática. Vol. I – A Matemática Paleolítica.* Curitiba: Progressiva.

ALMEIDA, Manoel de Campos (2011) *Origens da Matemática – A Pré-História da Matemática. Vol. II – O Neolítico e o Alvorecer da História.* Curitiba: Progressiva.

ALMEIDA, Manoel de Campos (2015) As Mais Antigas Evidências Conhecidas do Emprego de Talhas Numéricas Associadas a Processos de Contagem. In *Anais do XI Seminário Nacional de História da Matemática.* Natal: SBHM.

ALMEIDA, Manoel de Campos (2017) *A Matemática na Idade da Pedra: Filosofia, Epistemologia, Neurofisiologia e Pré-história da Matemática.* São Paulo: Livraria da Física.

BEDNARIK, R. G. (1992) Natural line markings on Palaeolithic objects. *Anthropologie*, 30, 233–40.

D'ERRICO, Francesco & Backwell, Lucinda R. & Wadley, Lyn (2012) Identifying regional variability in Middle Stone Age bone technology: The case of Sibudu Cave, *Journal of Archaeological Science*, 39(7), 2479–2495.

LI, Z., Doyon, L., Li, H., Wang, Q., Zhang, Z., Zhao, Q., & D'Errico, F. (2019). Engraved bones from the archaic hominin site of Lingjing, Henan Province. *Antiquity*, 93(370), 886–900.

SEIDENBERG, A (1962) The Ritual Origin Of Geometry. *Archive for History of Exact Sciences*, 1, 488–527.

WAERDEN, B. L. van der (1983) *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations.* Berlin: Springer Verlag.

A Espiral de Nunes e a sua influência na pré-história do Cálculo Infinitesimal

José Francisco Rodrigues
Departamento de Matemática e CMAF&IO, FCUL

A conceptualização da linha de rumo e a sua aproximação pela *noniodrómia* como método para o cálculo da tábuas de rumos, por Pedro Nunes em 1537 e em 1566, respetivamente, foram etapas cruciais da matemática renascentista que ao longo do século seguinte estimularam o desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal até à publicação de Edmond Halley em 1696 sobre a "*doutrina destes rumos espiraliformes que são de grande importância na Arte da Navegação*". Este texto procura fundamentar essa evolução histórico-científica e é uma adaptação do artigo [1] para o 33.º Seminário Nacional de História da Matemática, onde foi apresentado.

1- A *Espiral de Nunes*, ou Loxodrómia, data de 1537 — Pedro Nunes (1502–1578) no *Tratado da Sphera* [2], traduziu e comentou o tratado homónimo de Sacrobosco, os capítulos sobre o Sol e a Lua da *Theoricae nouae planetarum*, de Purbachio, o Livro I da *Geographia* de Ptolomeu e ainda dois importantes ensaios originais, o "*Tratado* (...) *sobre certas duuidas da navegação*" e o "*Tratado (...) em defensam da carta de marear*", que lançaram as bases da teoria matemática da navegação.

Com efeito, se um navegador seguir sempre com o leme fixo em direção ao seu objetivo descreve um arco de círculo máximo, que é afinal a "reta" sobre a superfície esférica. Esta é a linha mais curta ou geodésica sobre a esfera, que se veio a chamar ***ortodrómia***. No entanto, a orientação oceânica baseada na bússola ao manter constante o azimute, i. e. um ângulo constante e não nulo com o Norte, desvia-se da rota mais curta e constituiu motivo de confusões e de erros graves na navegação. Esta linha de rumo, concetualizada por Nunes em 1537 (Fig. 1a), veio a ser chamada linha loxodrómica ou ***loxodrómia***, do grego *loxos* e *dromos*, que significam, respetivamente, torto e percurso. Estas curvas coincidem com os meridianos no caso limite do azimute a 0° e, nestes casos, também são ortodrómias. A aplicação interativa *Loxos* ilustra a diferença entre estas duas curvas, bem como as suas projeções, e é acessível em: `http://formas-formulas.fc.ul.pt/interactive/loxo/pt/index_pt.html` .

Se inicialmente em 1537 Pedro Nunes pode ter admitido que as linhas de rumo atingiam os polos, num manuscrito que está em Florença, escrito poucos anos depois, clarifica *"que o rumo não chega ao polo (...), mas*

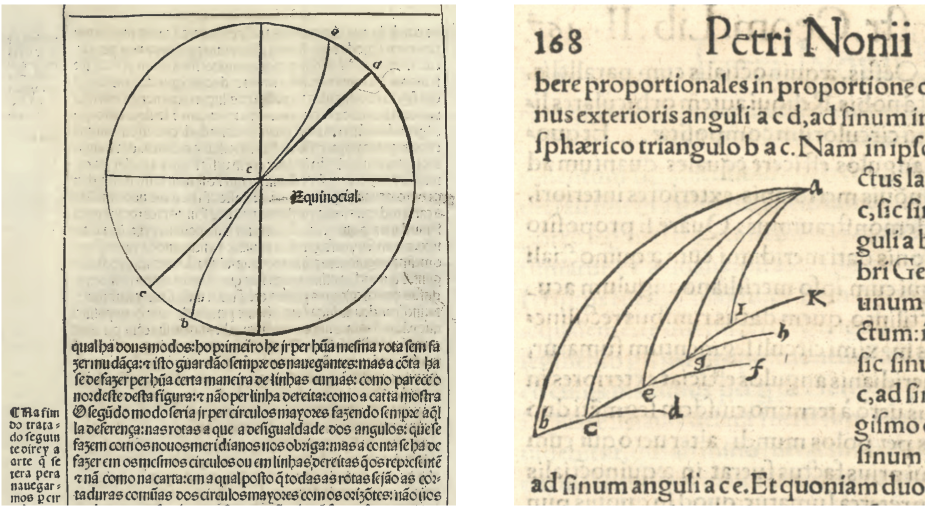


Fig. 1a. A representação de 1537, de Nunes, da linha de rumo “acb” e do círculo máximo “dce”. **1b.** A ***noniodrómia*** é a linha ***bcegi*** composta por arcos de “retas” sobre a esfera fazendo o mesmo ângulo com os meridianos convergindo no polo ***a*** e aparece pela primeira vez em *“De Arte Atque Ratione Nauigandi”* de 1566.

chega a qualquer ponto antes do polo, pois que de qualquer ponto se pode ir adiante pelo mesmo rumo” e, posteriormente, nas suas *Opera* em latim de 1566 publicada em Basileia, demonstra-o matematicamente por redução ao absurdo [3], num argumento que mostra que o polo é o ponto assintótico da loxodrómia.

A conquista dos oceanos determinou a globalização da influência europeia a partir do século XVI e correspondeu ao início de uma grande transformação científica não só na Geografia, na História Natural, mas também na Astronomia e nas ciências físicas. O papel da náutica nesta transformação, levou o historiador inglês David Waters a defender a tese de que “*os inícios da revolução científica devem ser encontrados nos trabalhos dos portugueses e de outros eruditos que a Coroa de Portugal teve a perspicácia de empregar para resolver os novos problemas de navegação colocados pelas viagens oceânicas no século XV e inícios do XVI; e nos efeitos que as descobertas geográficas feitas pelos navegadores usando a nova ciência náutica dos portugueses tiveram sobre os intelectuais da Europa desse tempo, e sobre os homens nas práticas de governo, comércio e indústria”* [4].

2- A *Noniodrómia* é a aproximação noniana da linha de rumo e data de 1566. No capítulo *"De Arte Atque Ratione Nauigandi"* de [3], Nunes apresenta um método para construir uma tábua de rumos, i. e., uma tabela de latitudes e longitudes das sete loxodrómias com azimutes múltiplos de $11^\circ\, 15'$ *"para o traçado de quaisquer rumos num globo"*, deixando-a para ser preenchida pelos "*moços aplicados*" que *"acharão os números que se devem escrever nela, estendendo-os quanto lhe aprouver."*

A teoria da linha de rumo de Pedro Nunes teve um papel seminal na teoria matemática da loxodrómia e da cartografia e só recentemente começou a ser reconhecido o verdadeiro alcance e o pioneirismo das suas ideias [5]. Por exemplo, a linha quebrada que aproxima a loxodrómia por arcos de 1° de círculos máximos [3], a que chamaremos de ***noniodrómia*** (Fig. 1b), é uma ideia natural, mas inovadora, que Pedro Nunes introduz para a construção da sua tábua de rumos aproximados, iterando soluções de sucessivos triângulos planos ao longo da linha correspondente sobre a esfera. Como cada um dos arcos de círculo máximo *bc, ce, eg* ou *gi*, é tangente à loxodrómia que passa no seu ponto inicial com o mesmo azimute V, e pode ser interpretado como um segmento de "reta" na superfície esférica, o método de Nunes é, essencialmente e traduzido para o cálculo infinitesimal, o mesmo que Euler introduziu dois séculos mais tarde, em 1768, para a resolução aproximada de uma equação diferencial de primeira ordem.

Um dos problemas científicos mais importantes do século XVI era o problema matemático da navegação oceânica de como, pela rota mais curta, pela direção mais adequada e no tempo mais curto, se deve conduzir um navio entre dois lugares previamente assinalados e o problema correspondente da cartografia de representar os rumos como retas na carta de marear plana. Sem explicar detalhes, Pedro Nunes já havia imaginado um método para a retificação da loxodrómia no plano, antes de cartógrafo Gerardus Mercator (1512–1594) a ter realizado no seu *Mapa-múndi* em 1569, tendo-o anunciado três anos antes na introdução às suas *Opera* de 1566: *"Mas, porque era muito difícil e até inviável para os mareantes traçar nos globos linhas semelhantes a estas, os matemáticos imaginaram uma descrição plana do orbe, não só adaptada à arte de navegar que praticam, como também muitíssimo fácil. Nesta representação são desenhadas linhas retas em lugar dos rumos do mesmo nome; como são paralelas, fazem ângulos iguais com toda a linha meridiana ou rumo Norte-Sul".*

Mercator conhecia as obras de Nunes, mas apenas recentemente foi possível estabelecer que foi através de uma tabela de rumos que construiu a primeira projeção cilíndrica conforme num mapa [6]. Três décadas depois, o matemático inglês Eduard Wright (1561–1615), que conheceu os problemas práticos da navegação oceânica numa viagem aos Açores em 1589, publicou em Londres o livro *Certain errors in navigation,* em 1599, e aí apresentou a primeira descrição detalhada e rigorosa da regra matemática subjacente àquela projeção. Para ilustrar essa projeção, Wright utilizou a imagem duma superfície esférica a inchar, tal como acontece ao soprar uma bexiga mantendo o equador constante e em contato com a superfície côncava de um cilindro fixo, de modo que os meridianos se tornam retas verticais e ortogonais aos paralelos, cujas distâncias entre si vão aumentando progressivamente na direção da geratriz do cilindro.

Mas existe uma infinidade de projeções cilíndricas, como a que se atribui a Arquimedes e projeta horizontalmente os pontos da esfera terrestre sobre o cilindro tangente a esta e que tem o efeito oposto de encurtar as distâncias entre paralelos no plano que se obtém desse cilindro depois de desdobrado e cortado ao longo de um meridiano. Outro exemplo, é o da projeção centográfica cilíndrica em que um ponto P, de latitude φ e longitude λ, da superfície do globo se projeta radialmente no cilindro, tangente ao seu equador, num ponto P' de coordenadas x e y. Neste caso tem-se $x/\lambda = y/\tan\varphi$, o que determina uma maior extensão das ordenadas com o aumento das latitudes. Mas esta "carta de latitudes crescidas" amplia demasiado as latitudes e não é conforme, ou seja, não preserva os ângulos. Não é, portanto, a carta de marear proposta por Pedro Nunes, pois não transforma as loxodrómias em retas no cilindro, apesar de também transformar os meridianos em perpendiculares dos paralelos estendidos na superfície cilíndrica.

3- A primeira integração numérica "*avant la lettre*" de 1599. Seguindo o método de Nunes [3], Wright observou que o mapa de Mercator aumenta a distância entre paralelos de tal modo que as pequenas "*partes do meridiano, em cada latitude, têm de crescer com a mesma proporção das respetivas secantes ou hipotenusas do arco, determinado pelos pontos de crescimento da latitude e da equinocial*". Assim, para construir a tabela, publicada em 1599, para "*a verdadeira divisão do meridiano na carta marítima*", a qual é uma tabela de latitudes para $\Delta\varphi = 1'$, i. e., com variações de um minuto, Wright utilizou somas de secantes para obter as ordenadas de cada paralelo na carta de marear.

Em termos do Cálculo Infinitesimal, que só apareceu quase um século mais tarde, nesta projeção cilíndrica, em que o equador é o eixo dos x e o paralelo de latitude φ é a reta horizontal $y = l(\varphi)$, a proporção da distorção segundo a direção dos meridianos deve ser igual à proporção com o fator de escala igual a $\sec\varphi = 1/\cos\varphi$ segundo a direção dos paralelos. Então podemos concluir

$$\lim_{\Delta\varphi\to 0} \frac{\Delta\ \textit{distância no mapa}}{\Delta\ \textit{distância na esfera}} = \lim_{\Delta\varphi\to 0} \frac{l\,(\varphi+\Delta\varphi)-l(\varphi)}{\Delta\varphi} = l'(\varphi) = \sec\varphi.$$

Como observou o historiador da Matemática Florian Cajori [7], o processo utilizado por Wright corresponde a um cálculo numérico do integral da secante, ou seja, a utilização duma relação do tipo $\Sigma \sec\varphi\Delta\varphi$ para a aproximação do integral

$$l(\varphi) = \int_0^\varphi \sec\phi\, d\phi = \log\tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

É interessante observar que esta expressão também fornece a equação em coordenadas polares da loxodrómia de azimute V, i. e., tem-se

$$\lambda(\varphi) = \tan V\, l(\varphi) = \tan V \log\tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Com efeito, se numa esfera de raio unitário, considerarmos um triângulo esférico com base infinitesimal num paralelo de latitude φ, correspondendo a uma variação infinitesimal de longitude $d\lambda$, essa base terá por comprimento $\cos\varphi\, d\lambda$, uma vez que a essa latitude o paralelo é uma circunferência de raio $\cos\varphi$. Então para uma variação $d\varphi$ num ponto P, de coordenadas (λ, φ), sobre a loxodrómia, o quociente $\cos\varphi\, d\lambda/d\varphi$ dá o declive da tangente a essa linha nesse ponto e é igual à constante $tanV$, como se pode facilmente concluir do respetivo triângulo incremental com vértice em P. Então, com o cálculo infinitesimal, obtemos a derivada da longitude sobre a loxodrómia na forma $d\lambda/d\varphi = \tan V \sec\varphi$ e, por integração, obtemos a expressão para a longitude $\lambda(\varphi)$ proporcional a uma tangente logarítmica da latitude.

Desse triângulo infinitesimal, podemos também concluir que o elemento da variação do comprimento de arco sobre a loxodrómia ds vem dado por $\cos V ds = d\varphi$, e, integrando, obtemos imediatamente que a distância s_{12} entre dois pontos de latitude $\varphi_1 < \varphi_2$ vem dada por

$$s_{12} = \sec V\,(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Em particular, podemos concluir com o Cálculo Infinitesimal que, apesar da loxodrómia de azimute V, $0 < V < \pi/2$, espiralar indefinidamente entre o polo Sul e o polo Norte sem nunca os atingir, tem comprimento total finito e igual a $\rho \sec V\,\pi$, representando por ρ o raio da Terra.

A cronologia da história da compreensão matemática da loxodrómia no século XVII [8] tem aspetos muito interessantes e paralelos à história do aparecimento do Cálculo Infinitesimal, incluindo a descoberta por Henri Bond, referida num compêndio inglês de navegação de 1645, que a "*linha meridiana era análoga a uma escala de tangentes logarítmicos de meio complemento de latitudes*" começando a 45°, por fortuita comparação da tabela de rumos de Wright com a tabela dos logaritmos naturais, introduzidos por Neper em 1614. Esta conjetura despertou o interesse dos matemáticos britânicos da época, tendo sido demonstrada por James Gregory, na sua *Exercitationes geometricae* de 1668, mostrando uma relação entre uma certa área sobre um cilindro com a área de um sector hiperbólico, portanto um cálculo logarítmico, e por Isaac Barrow que, nas suas *Lectiones geometricae* de 1770, encontrou a seguinte expressão, equivalente à anterior por conhecidas relações trigonométricas [9]

$$\int_0^{\varphi} \sec\phi\, d\phi = \frac{1}{2}\left[\log(1+\operatorname{sen}\phi) - \log(1-\operatorname{sen}\phi)\right].$$

Apesar de John Wallis, em 1686, utilizar a sua aritmética dos infinitos para substituir a "coleção de secantes", correspondendo a este integral, por um "agregado" de potências ímpares do seno da latitude divididos pela respetiva potência, a menos de um fator constante γ, tendo obtido uma série logarítmica da forma $\gamma\,\Sigma_{k\geq 0} S^{2k+1}/(2k+1)$, para $S = \operatorname{sen}\varphi$, tal como Barrow, Wallis também não reconheceu na sua fórmula a relação com a tangente logarítmica.

4- Conheceria Halley em 1696 os manuscritos de Harriot? Essa questão é retomada num importante trabalho [10] de 1696 do matemático e astrónomo Edmond Halley (1656–1742). Reconhecendo a prioridade da demonstração de Gregory, ao pretender dar uma demonstração fácil da "*analogia das tangentes logarítmicas com a linha meridiana ou soma de secantes*", utiliza de um modo direto a nova "*regra de Newton*" do recém inventado Cálculo Infinitesimal. Obteve o incremento rigoroso das latitudes da carta de marear e provou que a projeção estereográfica da loxodrómia é a espiral logarítmica, concluindo que "*a soma total de todas as secantes infinitas sobre o arco φ*" é a "*tangente logarítmica, na forma neperiana, para o arco* $45° + \frac{1}{2}\varphi$", a qual obtém na forma de uma série em radianos, [10]

$$\int_0^{\varphi} \sec\phi\, d\phi = \varphi + \frac{1}{6}\varphi^3 + \frac{1}{24}\varphi^5 + \frac{61}{5040}\varphi^7 + \frac{277}{72576}\varphi^9 + \&c.$$

Como Cajori observou [7], Halley determinou ainda a diferença das longitudes entre duas latitudes φ_1 e φ_2 sobre uma loxodrómia também sob a

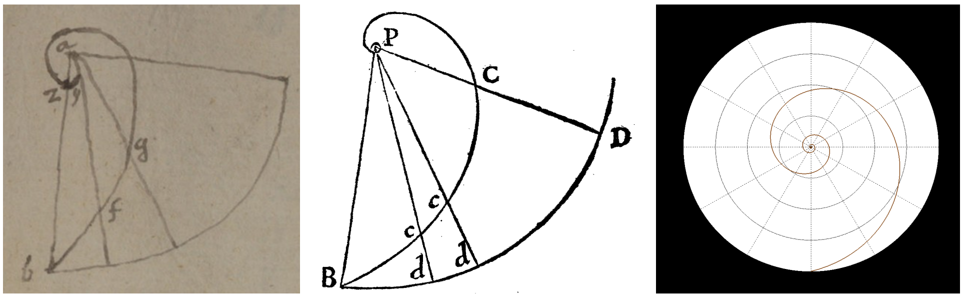


Figura 2a. Manuscrito de Harriot—De longitudine Helicis 45° (Leconfield MS 240, f 221). **2b.** A espiral logarítmica ("*proportional spiral*") de Halley de 1696. **2c.** A projeção estereográfica da loxodrómia com azimute de 76°, obtida com o programa interativo LOXO `http://formas-formulas.fc.ul.pt/interactive/loxo/pt/POINSOT2_pt.html`

forma de uma série numérica, o que corresponde na notação moderna ao integral definido entre φ_1 e φ_2, podendo ser ambos os valores diferentes de zero, algo que é inédito até 1696. Halley neste pequeno tratado discute não só vários aspetos teóricos como os numéricos dos cálculos das loxodrómias e, com isso, considera mesmo completa a *"doutrina destes rumos espiraliformes que são de grande importância na Arte da Navegação"*.

No entanto, os manuscritos de Thomas Harriot (1560–1621), matemático inglês contemporâneo de Wright e Neper, revelaram que os seus cálculos numéricos completos de 1614 das "partes meridionais", ou latitudes crescentes das linhas de rumo, se basearam na conformidade da projeção estereográfica da loxodrómia, na propriedade equiangular da espiral logarítmica e em fórmulas de interpolação, que conheceria, em parte, desde 1594 quando obteve uma resolução aproximada do problema de Nunes-Mercator para a carta de marear [11]. Apesar de não haver referências aos manuscritos de Harriot na segunda metade do século XVII, esses resultados foram conhecidos por alguns matemáticos ingleses, nomeadamente Collins e Newton, antes da publicação de Halley, cuja figura da loxodrómia é extraordinariamente semelhante à de um dos manuscritos (Figuras 2a. e 2b.).

As linhas de rumo, através da sua história e das suas profundas relações com a cartografia e navegação, constituem um importante exemplo de um problema prático, que foi instrumental na história da expansão europeia e foi relevante na evolução do cálculo infinitesimal.

Bibliografia

[1] José Francisco Rodrigues, "A Matemática e o Planeta Terra", *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, 76 (dezembro 2018), 1–32.

[2] Pedro Nunes, *Tratado da Sphera*, Lisboa, 1537, `http://purl.pt/14445`. Reedição, com comentários, pela Academia de Ciências de Lisboa—Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2002.

[3] Pedro Nunes, *Petri Nonni Salaciensis Opera*, Basileae, 1566, `http://purl.pt/14447`. Reedição e tradução, com comentários, pela Academia de Ciências de Lisboa—Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2008 e 2011.

[4] David Waters, "Portuguese nautical science and the origins of the scientific revolution", *Boletim da Academia Internacional da Cultura Portuguesa*, 2 (1966), 165-191.

[5] Bruno Almeida & Henrique Leitão, *Pedro Nunes (1502–1578). Mathematics, cosmography and nautical Science in the 16th century* (2009). `http://pedronunes.fc.ul.pt`, accesso de 8 novembro 2020.

[6] Joaquim Gaspar & Henrique Leitão, "How Mercator Did It in 1569: From Tables of Rhumbs to Cartographic Projection", *EMS Newsletter*, 99 (March 2016), 44–49.

[7] Florian Cajori, "On an Integration ante-dating the Integral Calculus", *Bibliotheca Mathematica*, 14 (1915), 312–319.

[8] Raymond D'Hollander, "La théorie de la loxodromie de Pedro Nunes", Proceedings of *International Conference Petri Nonii Salaciensis Opera*, Dep. Matemática, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, 2003, Eds. L. T. Campos, H. Leitão, J. F. Queiró, 63–111.

[9] V. Frederick Rickey & Philip M. Tuchinsky, "An Application of Geography to Mathematics: History of the Integral of the Secant", *Mathematics Magazine*, Vol. 53, No. 3 (1980), 162–166.

[10] Edmond Halley, "An easie demonstration of the analogy of the logarithmick tangents to the meridian line or sum of secants: with various methods for computing the same to the utmost exactness", *Philos. Trans., Roy. Soc. London*, 19 (1696), 202–214.

[11] Jon V. Pepper, "Harriot's calculation of the meridional parts as logarithmic tangents", *Arch. Hist. Exact Sci.*, 4 (1968), 359–413.

Zacuto e os Guias Náuticos portugueses do princípio do século XVI: os primeiros passos da navegação astronómica em Portugal

Jorge Semedo de Matos
Escola Naval; CINAV; CH-UL

Abraham Zacut, natural de Salamanca, provém de uma família judaica de tradição erudita, dedicada aos estudos religiosos. Não há nenhuma evidência de que tenha cursado a Universidade, nem é provável que ali tenha leccionado astronomia ou astrologia, matérias em que se notabilizou e que vieram a dar-lhe o protagonismo que importa a este estudo.

Sem me alongar muito sobre a sua vida – o espaço é escasso – direi que emigrou para Portugal em 1492, a quando do decreto dos Reis Católicos que expulsava os judeus dos seus domínios, sendo certo que o rei D. Manuel se serviu dos seus serviços como astrólogo. Gaspar Correia diz-nos que prometeu ao soberano a elaboração de um almanaque que permitisse calcular os valores astronómicos necessários à navegação; e, de facto, em 1496 era publicado em Leiria, na oficina de Samuel D'Ortas, o *Almanach Perpetuum*, cujas tabelas estão na base da elaboração das tábuas que constam dos primeiros guias náuticos portugueses.

Os almanaques foram uma tradição que atravessou toda a Idade Média, normalmente para uso em astrologia natural, sendo constituídos por diversas tabelas, com a posição dos astros no cosmos, acompanhadas por uma parte escrita – os cânones – que explicava a forma de as utilizar. Neste caso específico, e na parte que interessava à navegação, o Almanaque de Zacuto dispunha de uma tabela do lugar do sol, para o quadriénio que começava em 1473, acompanhada de uma outra, que permitia corrigir o valor original para cada um dos quadriénios seguintes, de uma forma que o autor entendia como sendo de utilização perpétua.

Para os cálculos do sol, dispõe ainda de uma terceira tabela, com três colunas, onde se faz corresponder o lugar do sol, em cada uma das casas de 30° da Eclíptica, a um valor de declinação respectivo. Valor que cresce de 0° até $23^\circ\,33'$, decrescendo depois até zero, numa leitura de frente para trás (até à entrada na casa de balança); e segue-se, de forma semelhante, até completar os 360°.

E os primeiros guias náuticos portugueses serviram-se das três tabelas referidas, para obter os valores da declinação do sol, indispensáveis ao cálculo da latitude do lugar, quando os navios não têm outra referência que não fosse a tomada da altura do sol, na sua passagem meridiana.

Os mais antigos guias náuticos que até nós chegaram, são documentos impressos no princípio do século XVI, com dois modelos que têm pequenas diferenças entre si, conhecidos como o *Guia Náutico de Munique* (mais antigo) e o *Guia Náutico de Évora*. Qualquer deles contém regras elementares de cosmografia (retiradas do *Tratado da Esfera*), regimentos das léguas e das horas nocturnas, regras aplicáveis à navegação, formas de cálculo de festas móveis e, bem entendido, as tábuas de declinação do sol.

Falemos primeiro do *Guia de Évora*, exemplar que pertence à Biblioteca Pública dessa cidade, onde encontramos um conjunto de tábuas de declinação do sol, que começam num ano bissexto. Feitas as contas, conforme explicam os cânones de Zacuto, verificamos que se trata do ano de 1520. Há algumas evidências que o *Guia* foi editado por Valentim Fernandes, numa altura em que este se dedicou à publicação de documentos náuticos, de forma que é muito provável que a edição date de 1518 ou 1519.

O *Guia Náutico de Munique*, contudo, sendo claramente anterior a este, tem uma tábua de declinação do sol apenas para um ano (e não para quatro, como seria normal). Vários autores fizeram muitas tentativas de identificar a que ano se destinava, a meu ver com menor atenção às características da tábua.

A primeira curiosidade é a de que a primeira tabela não corresponde ao mês de Janeiro (como seria de esperar), mas ao mês de Março, quando ocorre o equinócio da Primavera e a declinação do sol atinge o zero. Terminando no mês de Fevereiro, do ano seguinte.

Mas, prosseguindo a observação, verificamos que as sucessivas tabelas transcrevem quase de forma perfeita a tábua auxiliar de cálculo de declinações, do *Almanach Perpetumm*, a que há pouco me referia. Ou seja, a tábua serve-se dos 360 valores, correspondentes a 360 graus inteiros da Eclíptica, fazendo corresponder um a cada dia do percurso do sol. Naturalmente que no final faltavam seis dias (o mês de Fevereiro tem 29 dias), de forma que foram intercalados seis valores de declinação, sem um critério visível, de forma a completar os 366 dias do ano. Estas tábuas não resultam, portanto, de nenhum cálculo, sendo absurdo imaginar um ano raiz. As tábuas servem para qualquer ano (com erros, normalmente, inferiores a ½ grau), desde que se aceite que a declinação máxima do Sol de $23^\circ\,33'$. Valor que dominou a literatura náutica portuguesa até à década de 90 do século XVI.

Recentemente, foi possível identificar sem margem para dúvidas, que o *Guia* foi publicado por Hermão de Campos, alemão que trabalhou com Valentim Fernandes desde 1516 até à morte deste último, em 1519.

Bibliografia

ALBUQUERQUE, Luís, *Os Guias Náuticos de Munique e Évora*, Lisboa, Junta de Investigações do Ultramar, 1965.

ZACUTO, Abraão, *Almanach Perpetuum*, introdução de Luís Albuquerque, Lisboa, Imprensa Nacional – Casa da Moeda, 1986.

Os 500 Anos do Primeiro Tratado de Aritmética Prática Impresso em Portugal

Teresa Costa Clain
Grupo de História da Matemática e Educação Matemática,
CIDMA-Univ. de Aveiro

Comemorou-se recentemente (15 de Novembro de 2019) os 500 anos do *Tratado da Pratica d'Arismetica* de Gaspar Nicolas, também considerado o primeiro tratado de aritmética prática de autor português publicado em Portugal. Da obra original, saída da oficina de Germão Galharde, existe um exemplar na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto que, em 1963, foi publicado em edição fac-similada pela Livraria Civilização do Porto e prefaciada pelo Professor Luís de Albuquerque.

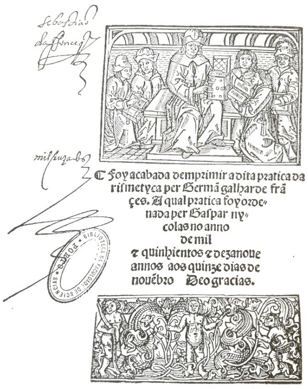


Figura 1: Colofão do *Tratado da Pratica d'Arismetica*

À semelhança de outras obras para o mesmo fim, o tratado apareceu num ponto comercial importante, a cidade de Lisboa, então conhecida pela dinâmica ligada à expansão marítima portuguesa. O conhecimento prático, então transmitido de «boca em boca», e ligado aos «pequenos» negócios, tornara-se insuficiente. Gaspar Nicolas atuou como divulgador e formador do saber matemático ligado a esta nova realidade. Propôs modelos para programar os grandes negócios e para calcular os impostos, associados à intensa atividade comercial, utilizando algoritmos apoiados na vulgarização do cálculo com os números indo-árabes.

Sobre Gaspar Nicolas os dados são escassos. Contudo, pensa-se que viveu entre o último quartel do século XV e o segundo do século XVI. A. A. Marques de Almeida remete-nos para Luís de Albuquerque que admite a possibilidade de Gaspar Nicolas ser de origem judaica (Almeida, 1994, v. I, p. 79). Na nota biográfica presente na edição fac-similada de 1963, Luís de Albuquerque escreve, «Nascido talvez em Guimarães (...) tem o seu nome ligado aos aspectos científicos dos descobrimentos Portugueses, pois atribui-se-lhe parte activa na realização de tábuas náuticas.» (Nicolas, 1963, Nota sobre a obra e o autor de Luís Mendonça de Albuquerque). O que sabemos de Gaspar Nicolas está ligado à obra que nos deixou. No prólogo do *Tratado da Pratica d'Arismetica* o autor refere as suas ligações à cidade de Guimarães onde encontrou, numa dada ocasião, D. Rodrigo, Conde de Tentúgal[1], o mecenas. Nas palavras do próprio autor encontrámos referências ao esclarecimento de dúvidas na Casa da India sobre o cálculo dos impostos o que nos leva a crer no seu papel de formador naquela instituição.

Quanto à estrutura do tratado, não existe qualquer espaço com a função de «índice» mas antes a presença das tabuadas da multiplicação. Seguem-se: os números, «Primeiramẽte te he neçeesario cõhecer as letras e despoys de conheçidas saber numerar cõvẽ asaber cõhecer estas mesmas letras quãto vallẽ» (Nicolas, 1963, f. 1) (as dez «letras» da aritmética, os algarismos de 0 até 9); as cinco operações aritméticas básicas: «numerar, conta de assomar, conta de demenuir, conta de multiplicar e repartir» (Nicolas, 1963, ff. 1f–10f); a regra de três, as regras de companhias e as regras de quarto e vintena. Todas estas regras são necessárias ao mercador. Nos enunciados propostos está bem claro o papel do imposto ligado à prática do quarto e vintena na economia nacional, daí deduzir-se o papel de destaque na obra. Nicolas passa às operações com quebrados e à regra da conta de Flandres, às progressões, deixando para depois a regra de baratas. Parece haver uma vontade de intercalar temas de aritmética mercantil com assuntos matemáticos desligados do ambiente dos negócios. De um modo geral, os assuntos expostos são, na sua maioria, temas que fazem parte de uma tradição em aritmética prática, como as regras de companhias, as baratas, as ligas da prata e do ouro muito ligadas aos modelos para os negócios. Contudo, desviam-se deste objetivo em algumas situações. Assim, observamos a presença de uma Matemática pensada para o comércio, a par com processos desligados do mundo mercantil, tais como os que se encontram associados à resolução de problemas para determinar números. Outras práticas aparecem disfarçadas de temas

[1]O Conde de Tentúgal era D. Rodrigo de Melo (1488–1545) também 1.º Marquês de Ferreira. Era filho de D. Álvaro (filho dos segundos Duques de Bragança) e de sua mulher, D. Filipa de Melo. Pressume-se que nasceu em Castela durante o exílio do seu pai. Foi agraciado com o título de Conde de Tentúgal por D. Manuel em 1504 (Almeida, 1994, v. I, p. 77).

mercantis mas visam trabalhar conceitos matemáticos. Podemos observar os exemplos dos mercadores que investem nas «companhias» mas desconhecem o que investiram ou os tempos nas companhias, que nos conduzem a sistemas lineares cuja resolução nos remete para conceitos algébricos que certamente o mercador comum não dominava.

Para ilustrar esta vontade de tratar de matemática fora do mundo mercantil, veja-se o capítulo «Numeros» (Nicolas, 1963, ff. 39–56), onde aparece um conjunto de enunciados que, embora considerados clássicos, demonstram uma vontade em conhecer e transmitir conteúdos emancipados do real e associados a um esboço da «teoria dos números». No universo dos problemas apresentados podem incluir-se alguns temas sobre números quadrados:

> Da me huũ numero que lhe poendo .10. fique quadrado e tirãdo .10. fique quadrado. Este he o modo por que diz .10. multiplica .10. em sy e fazem .100. ajũta sempre .4. por regra geral e fazem .104. ora sempre parte por .4. por regra geral vem .26. (...) (Nicolas, 1963, f. 43 f).

A «regra geral referida» não se encontra enunciada anteriormente e a resposta apresentada não carece de qualquer justificação por parte do autor. Se passarmos à linguagem atual podemos ter as equações do problema

$$\begin{cases} x + 10 = a^2 & (1) \\ x - 10 = b^2 & (2) \end{cases}$$

onde x representa o número a determinar, a^2 e b^2 são os números quadrados referidos. Se fizermos $(1) + (2)$ temos $2x = a^2 + b^2$ e fazendo $(1) - (2)$ temos $20 = a^2 - b^2$. Sabendo que $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, procuram-se dois divisores de 20. A solução dada considera $a + b = 10$ e $a - b = 2$. Daqui resulta que $a = 6$ e $b = 4$. Ou seja, $2x = 6^2 + 4^2 \Leftrightarrow x = 26$. Na regra geral referida por Nicolas temos $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 10^2 + 2^2 = 2\left(a^2 + b^2\right) = 2\,(2x)$ então $4x = 104 \Leftrightarrow x = 26$.

Os enunciados de problemas com números do fólio 42 v incluem números e raízes, tais como este exemplo: «Dame huũ numero que partido o seu terço por sua rayz venham .19.» (Nicolas, 1963, f. 42 v) e as situações de impossibilidade, sempre com o suporte da regra de três: «Buscame hũ numero que lhe tirando dous terços e o meo fiquem .10.» (Nicolas, 1963, f. 42 v). Para justificar que a «conta é falsa» o autor afirma: «... tu bem ves que ho meo e dous terços que passa de cousa enteira e não podes tirar este meo e dous terços de nenhuũ numero que fique alguũa cousa minguar» (Nicolas, 1963, f. 42 v). Para reforçar as suas afirmações, usa o número 6, assim determina um meio e dois terços de 6 que somados fazem 7. O «minguar», neste caso, quer dizer que $6 - 7 = -1$.

O tratado inclui ainda um conjunto de problemas que abordam as regras enunciadas em capítulos anteriores, numa secção denominada «Números e Perguntas». Trata-se, não só, de um conjunto de enunciados para consolidação das regras mas também um meio de abordar outros temas. Um assunto singular na obra é o tema «Geometria» e nas últimas páginas aparecem os problemas da liga da prata.

Sobre as obras matemáticas que teriam inspirado Gaspar Nicolas a compor o seu tratado, o próprio faz múltiplas referências a Luca Pacioli: «Frey Lucas de Sam Francisco que foi nesta arte grande mestre que compilou e compôs huũa obra d'arismetica e geometria» (Nicolas, 1963, f. 51 f).

Podemos considerar que *Tratado da Pratica d'Arismetica* teve uma grande divulgação dado que, sem contar com a edição de 1519, foi impresso nos séculos XVI, XVII e XVIII (apenas uma edição), num total de nove vezes (Nicolas 1963, Nota sobre a obra e sobre o autor de Luís de Albuquerque), o que demonstra reconhecimento, agrado pela obra e utilidade da mesma na formação, assim o afirma Gomes Teixeira (Teixeira, 1934, p. 98) «um excelente manual de Aritmética prática, muito claro e simples na exposição das doutrinas, sem teorias, que certamente prestou bons serviços no século XVI».

Bibliografia

ALMEIDA, António A. M.. 1994. *Aritmética como descrição do real (1519–1679).* Imprensa Nacional, Casa da Moeda, 2 vols. Lisboa.

CLAIN, Teresa C. 2018. As regras de quarto e vintena e da conta de Flandres no comércio português das especiarias (século XVI). *Revista Brasileira de História da Matemática*, Vol. 17 n.º 34, págs. 83–97.

CLAIN, Teresa C. 2019. Gaspar Nicolas e os 500 anos do Tratado da Pratica d'Arismetica. *Revista Brasileira de História da Matemática*, Vol. 19 n.º 38, págs. 105-137.

NICOLAS, Gaspar. 1963. *Tratado da Pratica d'Arismetica.* Edição fac-similada da edição de 1519. Livraria Civilização. Porto.

TEIXEIRA, Francisco G. 1934. *História das Matemáticas em Portugal.* Academia das Ciências de Lisboa. Lisboa.

O canhão que bombardeou Paris em 1918

José Paulo Ribeiro Berger
Gabinete de Estudos Arqueológicos da Engenharia Militar, Academia Militar, Conselho Científico da Comissão Portuguesa de História Militar

Durante a Grande Guerra o desenvolvimento da ciência e da tecnologia deram saltos gigantescos destacando-se em especial a grande evolução da artilharia, ciência bélica em que a matemática tem um papel predominante, não só na construção e aplicação dos materiais de artilharia, mas também no cálculo das trajectórias dos projécteis, elaboração das tabelas de tiro e também na direcção, regulação e correcção do próprio tiro.

Durante este conflito, quando o impasse da guerra de trincheiras se impôs, o uso da artilharia destacou-se uma vez que os seus alcances deixaram de ser os 3 a 4 quilómetros até aí praticados para o tiro à vista, para passarem a ser de uma a três dezenas de quilómetros e mesmo cerca de 120 como foi conseguido pelos canhões que os alemães baptizaram como «*Kaiser Wilhelm Geschütz*», com que bombardearam Paris, na Primavera de 1918, também por isso conhecidos como «*Paris-Geschütz*», sendo designados pelos parisienses, inapropriadamente, por «*Grosse Bertha*».

Resumidamente, o problema do tiro de artilharia pode ser abordado simplesmente em duas fases: a da balística interna (estudo dos fenómenos que ocorrem dentro do tubo do canhão) e a da balística externa (fenómenos relacionados com o trajecto do projéctil desde que sai da boca do canhão, deixando de estar sujeito aos gases propulsores, até que chega ao alvo).

O estudo da balística interna começou com o uso da pólvora negra, ainda na Idade Média. No período da Grande Guerra olhava-se já de forma muito diferente para as teorias da combustão da pólvora tendo em conta as relações entre a velocidade de combustão, a temperatura, a forma dos grãos e a erosão da alma do canhão.

A evolução da balística externa passou por duas etapas claramente diferenciadas. Antes de Newton, com utilização de métodos geométricos, em que se destacam: Galileu Galilei ao deduzir a trajectória parabólica de um projéctil no vazio e Torricelli ao formular a equação do alcance de um projéctil. Depois, Newton fundamentou as bases da dinâmica para os corpos rígidos e para os fluidos que também são aplicáveis aos fenómenos e estudos da balística. Após Newton, utilizando métodos analíticos, Euler estudou a resistência aerodinâmica das balas dos canhões e, nos finais do século XIX, desenvolveram-se os métodos para determinar a resistência aerodinâmica, começaram a usar-se projécteis com cinta de travamento em tubos de almas estriadas, que permitiam melhorar a obturação da câmara, conseguindo velocidades iniciais mais altas e com mais consistência, além de estabilizarem o projéctil durante o voo, factores que iriam permitir melhores alcances. Nas vésperas da Grande Guerra começaram, então, a desenvolver-se bases matemáticas que descreviam o comportamento do projéctil em voo, permitindo elaborar tábuas de tiro ou estudar a resistência aerodinâmica em túneis de vento, bem como analisar trajectórias balísticas estratosféricas permitindo construir algoritmos de simulação que por sua facilitava a predicção do tiro sem recorrer aos avultados custos de utilização das carreiras de tiro.

O modelo de Galileu considerando a trajectória parabólica no vazio pressupunha como hipóteses que a Terra era plana e não girava, não havia atmosfera e o projéctil era uma massa pontual. Mas, para os enormes alcances dos canhões que bombardearam Paris tais pressupostos não eram aplicáveis. Para além da velocidade inicial e do ângulo de tiro havia que considerar uma série de factores que afectavam a trajectória; uns dependentes do próprio projéctil, como a sua massa, o calibre, a geometria e a rotação a que era submetido; outros, contudo, inerentes ao meio em que deslocava, como a densidade, temperatura, pressão e viscosidade; a influência das velocidades e direcções do vento nas várias altitudes do percurso; tudo conjugado com a estabilização do voo, a resistência aerodinâmica, o efeito giroscópico, etc., faziam com que a trajectória real no ar não correspondesse à da parábola teórica do vazio. Esta, no ramo ascendente, em que a resistência aerodinâmica actuava em conjunto com a gravidade, levava a que a componente vertical da velocidade inicial se anulasse e a componente horizontal diminuísse mais rapidamente, enquanto no tramo descendente, em que a resistência do ar se opunha à da gravidade provocava que o tempo de queda fosse maior do que na subida, originando como consequências que: a trajectória não era simétrica (estando o vértice mais próximo do ponto de queda), a altura do vértice era menor do que a correspondente à trajectória no vazio, o angulo de queda era maior que o ângulo de tiro, a velocidade no ponto de queda menor do que a velocidade inicial, e o alcance máximo não era obtido pela utilização de um ângulo de tiro de 45°.

Após aturados estudos de algoritmos de simulação, o professor von Eberhardt e os engenheiros e matemáticos das indústrias *Krupp*, escolhendo a direcção de tiro adequada (para compensar o desvio provocado pela rotação da Terra e o efeito de Coriolis) e considerando que o projéctil, na atmosfera, acima dos 19 quilómetros de altitude, enfrentaria condições da resistência do ar muito perto do zero e que, assim, o máximo alcance poderia ser conseguido com um ângulo de tiro superior a 50° que, em conjunto com a muito alta velocidade inicial imprimida ao projéctil, o iria fazer atingir aquela altitude entrando nela com uma inclinação de cerca de 45° (ângulo de tiro correspondente ao máximo alcance em vazio) percorrendo então estas altas camadas da atmosfera num regime muito próximo das condições do vazio, conseguindo assim, pela quase ausência de resistência do ar, muito maior alcance, até descer de novo para camadas inferiores, continuando depois o seu trajecto num regime condicionado pelas componentes da resistência aerodinâmica do ar, até atingir o alvo a cerca de 120 quilómetros de distância.

A interacção entre as teorias analíticas, a resolução de equações diferenciais, a integração numérica e gráfica, a pesquisa empírica resultante da experimentação e medição, todas combinadas, permitiram aos alemães, em Março de 1918, bombardear Paris a cerca de 120 quilómetros de distância, felizmente sem grande efeito prático, mas que, cientificamente, juntando matemáticos, engenheiros e artilheiros concretizaram a procura de uma lei que pudesse traduzir os efeitos matemáticos da resistência do ar e permitisse a obtenção de uma solução para a utilização das equações diferenciais aplicáveis à balística, sendo, neste caso, o embrião para a utilização em aplicações posteriores como a dos foguetes V1 e V2, na Segunda Guerra Mundial, e dos actuais mísseis balísticos intercontinentais.

Bibliografia

(obras que podem ser consultadas nas Bibliotecas da Defesa Nacional)

1 - *Les méthodes d'integration de Poincaré et le problème générale de la balistique extérieure : leçons faites à la Sorbonne pendant l'année scolaire 1924–1925* / Kyrille Popoff ; pref. de Émile Picard. Paris: Imprimerie Nationale : Gauthier-Villars, 1925.

2 - *Corso teorico-pratico de balistica esterna del Colonnello Bianchi* edizione 1922: aggiunte e varianti / compil Ettore Cavalli e Enrico Fianchino. Torino: Academia Militare d'Artiglieria e Genio, 1926.

3 - *Balística interna*: lições professadas na 6.ª cadeira da extinta Escola do Exército, no ano lectivo de 1901–1902 / José Nunes Gonçalves. Lisboa: Imprensa Nacional de Lisboa, 1929.

4 - *Balística externa*: lições professadas na 6.ª cadeira da extinta Escola do Exército, no ano lectivo de 1901–1902 / José Nunes Gonçalves. Lisboa: Imprensa Nacional de Lisboa, 1932.

The Jesuits' "Drive to the East" (Lithuania-Poland-White Russia-Ukraine-Transylvania) and the Role of their Schools in Eastern Europe's Scientific History

Ugo Baldini
Universidade de Pádua

1 The historical background

The so-called 'globalization' of Western science, from the geographical discoveries to the end of the *ancien régime*, is usually meant as a transfer to other continents. However:
1) Properly, 'Western science' (especially mathematics) was that of Central-Western Europe.
2) It reached Eastern Europe *at the same time* as other continents, also with a revolutionary effect.
3) Due to rooted historical factors, that area had not been involved in the cultural synthesis of the late Middle Ages; it lacked a structured school and university system, not to say a proper teaching tradition in mathematics and the related disciplines.
4) The diffusion of a western style school system with some scientific contents, from about 1565/70, was *mainly* due to a single agent, the Society of Jesus.
5) The Jesuits' motives being not primarily scientific, this is a notable example of a carrier transporting goods different from those it was mainly destined to, or even considered contrary to its purposes.
6) Much early modern mathematical production in the area – whatever its level – was due to Jesuits.
7) The role of a second teaching agent, the Piarists (Escolapios), was minor because: they entered the region half a century later; for many decades their schools were only of primary and secondary levels, and then their few high schools adopted the Ignatians' programs and methods also in mathematics, so providing a partial 'Jesuit' instruction; excepting only a part of Transylvania, they did not advance much. Thus, individual cases apart, their contribution was more in the social history of mathematics instruction than in high learning or research.
8) A third agent, the Protestant schools, in some places existing before the Jesuits' arrival, were soon outnumbered and often surpassed in quality;

to face the Jesuits' challenge, many of them adopted their programs in philosophy and mathematics.

For long, the western – and more clearly, for political reasons, the eastern European historiography – ignored or belittled this epochal fact. Recently local historians have focused on it, but the initial neglect and the dispersal of the documents have kept the progress in this area relatively slow *("…. to advocate for the factual and the true …. is no easy task, as the relevant evidence was for many years ... obscured by many …., so biased against Jesuits that they refused to acknowledge even their most obvious …. successes*": Stasiewicz-Jasiukowa 2004, Introduction). Also due to language barriers, the results are not yet found fully in general histories of mathematics and science.

Until late 16th century, no stable higher education institutes existed in the Baltic area east of a 'border' connecting Uppsala, Königsberg and Kraków. In the Slovakian-Hungarian territories, it was even more to the west (Bratislava to Pécs). In the Balkans and in the orthodox zone (Greece to Moldavia, Ukraine and Belarus, not to say Russia), no university or high school properly existed [Map I]. The only schools – apart from the monastic, usually not attended by lay persons – were those of the 'brotherhoods' affiliated with individual churches, instructing the youth of the community. Religion apart, they just provided a primary or lower secondary instruction, including only 'everyday' mathematics. No stable orthodox high school existed before the Kiev academy (1632) and that of Moscow (1687), both of which were not universities. Most of the 16th–17th centuries best known intellectuals from eastern Baltic to Greece, literature or religion apart, studied in German or Italian universities (Copernicus, Hevelius and Comenius are just some examples).

Even in the Balkans, the Ottoman rule was not the only – and perhaps, on a great historical scale, not the main – cause of this state of things. A key historical-geographic factor was a west-east division in the essentials of the economic-political system. Eastern society, not involved in the great currents of the Mediterranean trade, remained more strictly feudal and of large land tenures; so the thrust towards rationalizing procedures, and hence specialized technical-scientific learning, was smaller. But another factor, religious-cultural, was also decisive. A little more east of that division there was that between the Western and the Orthodox churches. The Byzantine origin of the latter permeated the entire East Slavic area with characteristic knowledge contents and conventions. This is well known (Toynbee considered Orthodoxy a 'civilization' different from the western),

Map I
(W. R. Shepherd, *Historical Atlas*, New York 1911, p. 100)

but little attention is paid to its bearing in the field of science. Byzantine instruction did not evolve really from the classic *trivium-quadrivium*. More than directly, mathematics was dealt with through the works of such philosophers-theologians as Proclus. After the fall of the Empire, the regions influenced by it conserved this approach. There was no emergence of a (partially) lay higher education agent as the West's universities, which from mid-fourteenth century provided mathematics with a stable placement in the specialized curriculum of arts and medicine. Due to their prevailing religious finality, higher studies were not organized in a disciplinary structure but centered on dogmatic topics or the works of the Church fathers; thus, scientific matters were mostly considered in the measure they were some-how linked to those topics, or hinted at in some patristic text; therefore their topics remained incidental and ancillary. Four differentiating aspects are worth mentioning:

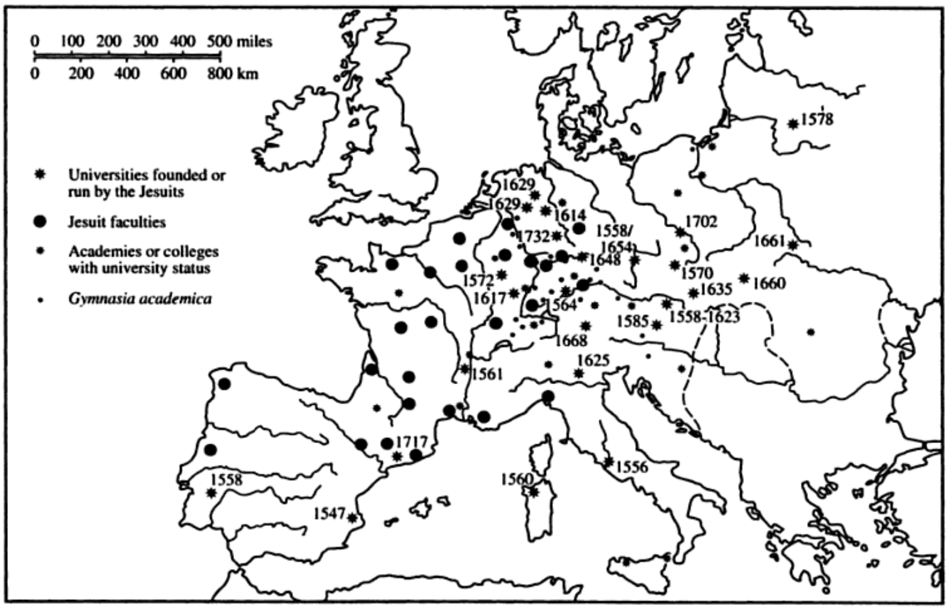
i. The use of the Cyrillic alphabet; The Cyrillic alphabetic numerals (used in the Balkans until late 16th century, in Russia until the first decades of the 18th century) are unfitting for a purely positional algorithm. Numbers were written *usually* from a high value position to a low value one but, for instance, those from 11 to 19 were not only *named* with the units before the tens (as in the German languages: 'eighteen', 'achtzehn'), but also *written* so (M. Dejić, "How the old Slavs (Serbs) wrote numbers", *Jr. of the British Society for the History of Mathematics*, 2013, 1, 2–17);
ii. The lack of a teaching of western languages and of Latin, the West's academic Esperanto;
iii. The lack of a systematic presentation of the whole of the natural world, and of the disciplines regarding its parts or aspects, hampered the possibility of connecting single problems, or doctrines, in a general methodical and conceptual structure, such as the West's scholastic cosmological synthesis. Although largely aprioristic and inducing to conformity, that synthesis was a model of integrated knowledge, and evidenced the areas in which research and systematization were needed. It had absorbed originally separated topics (such as medicine), under a general requirement of adopting an unique set of ontological and intellectual criteria: one that, independently from the inadequacy of that adopted in Scholasticism, was (and is) basic for any scientific enterprise;
iv. At the same time, the lack of refined observational and mathematical approaches did not enable Orthodox culture to profit from the absence of the constraints and inadequacies typical of that model.

2 The Jesuit advance and its cultural-scientific effects

From 1570, in an effort to reverse the Protestant expansion in the Baltic area, and to support the pro-Rome Uniate Church in the Orthodox realm, the Jesuits founded a growing number of schools. In parts of Eastern Europe the Catholics were outnumbered by other confessions, but most of the region, up to nearby the Black Sea, was ruled by the catholic Kings of Poland, whose authority overlapped a fragmented religious geography [Map II]. Thanks

Map II
(*História Universal*, Vol. VI. Europa - Séculos XVI–XVIII [ed. Michel Vovelle], Alfa 1985, p. 203)

to them, in about half a century the Society's schools extended from Riga to Kolozsvár/Cluj (Romania), major intermediate points being Vilnius and Lwów [Map III]; thus, western instruction advanced more than 300 km to the east. Each Jesuit school (22 in 1615, and 66 at mid-18th century) had about 300–400 students per year; moreover,their reputation attracted protestants and orthodoxes (even from Russia), and to cope with their success orthodox and protestant schools adopted their programs and also textbooks. A growing number of students learnt Latin and became familiar with the western alphabet and numerals, but also with the western system of the disciplines. Around 1650, ca. ten Jesuit schools (and some of the non-Jesuit) provided the three years philosophy curriculum, in which mathematics was taught according to the programs of the 1599 *Ratio studiorum*: Euclid's *Elements*, especially books I–VI; arithmetic, with some elementary algebra; basic spherical astronomy (sometimes with some trigonometry);



10 The Jesuits' university offensive

Map III

(H. De Ridder-Symoens (ed.), *A History of the Universities in Europe.* Vol. II. Universities in Early Modern Europe (1500–1800), Cambridge 1996, p. 104)

general descriptive geography; applications (perspective, statics, gnomonics; sometimes also musical theory and calendar theory). In all the Order's schools, conformity to the *Ratio* meant standardized textbooks. Lessons were dictated, but – whatever their level – the contents transmitted came from a little number of works: until about 1620 – as in Europe, America, Asia and Africa – mainly those of C. Clavius (his commentaries to Euclid and Sacrobosco are probably the most widespread mathematical works in early modern history). Then the eclipse of pure geocentrism and the adoption of Brahe's system implied the use of other works, but in pure mathematics Clavius' texts were substituted only after 1640, mainly by those of A. Tacquet.

3 Early research and publishing

Due to the lack of local teachers, the first Jesuit teachers of mathematics came from Germany and from Clavius' school in Rome. They usually stayed for the time necessary to prepare local substitutes, so published nothing in the field. Their successors until 1600–1620 were not supported by extended public and adequate libraries; moreover, most of them had been trained on a little more than the contents of the teaching programs. Therefore, for the first fifty years of the schools' history, mathematical production was mainly limited to manuscripts of lessons. After 1600 new circumstances took shape. A few notable foreign teachers, Jesuit and not, provided a stimulus: around 1610 A. van Roomen taught in a lay school at Zamość (southeastern Poland), from 1613 to 1617. Ch. Malapert taught in Kalisz (central Poland), and from 1621 to 1650 C. Scheiner taught in spells in Nysa (Silesia); some post-curricular, advanced courses in mathematics began to be taught to future teachers. Moreover, promising students were often sent to western colleges (especially to Rome) to specialize in theology, and some mathematically gifted benefited from this experience: notable cases are Alexius Sylvius (1593–ca. 1653), Marcin Śmiglecki (1564–1618), Adam A. Kochański (1631–1700, later a correspondant of Hevelius and Leibniz and a royal mathematician under Jan III Sobieski). Stanisław Solski (1622–1701) was formed locally, in Kalisz, but possibly by a Malapert former pupil.

Most pre-1700 mathematics works by Polish, Lithuanian, Belarusian and Ukrainian Jesuits were didactical, or dealt with civil and military architecture, engineering, gnomonics, astronomical tables, and other. The scarcity of lay mathematicians in the region, the Society's support of the rulers and of the catholic aristocracy, and the continuous wars from early 17th century to the mid-18th involved Jesuits in politics, military affairs, and even as technicians in the Commonwealth's army, including artillery. Some advanced research was however done (Kochański found a notable approximation for π, mastered leibnitian calculus, and had some original views in mechanics). Their study is still in a preliminary stage, and interesting findings are possible.

The outlines drawn so far provide us with a methodological lesson. From ca. 1570 to mid 18th century, at the time when western mathematics reached Far Eastern Europe as a part of Jesuit culture, in the West that culture began collapsing. That collapse is often attributed to the impact of mathematical-quantitative reasoning, seen as something radically opposite to that culture, both conceptually and historically. What has been said shows perhaps that conceptual oppositions should not be simply taken as historical.

Some bibliography

(studies on Poland usually refer to the whole Polish-Lithuanian kingdom).

WEB page "Jesuit science network" (more than fifty Jesuit 'scientists' in pre-1700 East Europe).

J. A. Rackauskas, "Education in Lithuania prior to the dissolution of the Jesuit Order (1773)", *Lithuanian Quarterly. Jr. of Arts and Sciences*, 22, 1976, 1, 5–41.

K. A. F. Fischer, "Die Jesuiten Mathematiker des Nordostdeutschen Kulturgebietes", *Archives int. d'histoire des sciences*, 34, 1984, 124–162.

R. Darowski, *Studies in the philosophy of the Jesuits in Poland from 16th to the 18th centuries*, Kraków 1999.

Lisiak B. (ed.), *Jezuici polscy a nauki cisle od XVI do XIX wieku. Słownik bio-bibliograficzny* ("The Polish Jesuits and Science from the 16th through 19th centuries: a bio-bibliographical Dictionary"), Kraków 2000.

I. Stasiewicz-Jasiukowa, *The Contribution of the Polish Jesuits to the Development of Science and Culture in the Polish-Lithuanian Commonwealth and during the Partitions*, Kraków 2004.

L. Grzebień SJ (ed.), *Podstawowa bibliografia do dziejów Towarzystwa Jezusowego w Polsce* ("Basic bibliography of the history of Society of Jesus in Poland"), Kraków 2009.

A. Mariani, "L'insegnamento delle scienze nelle scuole dei Gesuiti polacchi. Fra popolarizzazione e applicazioni pratiche (1740–1773)", *History of Education and Children's Literature*, 7, 2012, 1, 319–339.

Id., *I gesuiti e la nobiltà polacco-lituana nel tardo periodo sassone (1724–1763)*, Poznań 2014.

M. Kosman, A. Mariani, "Jesuits in the Early-Modern Polish-Lithuanian State", *Archivum Historicum Soc. Iesu*, 86, 2017, 1, 145–208.

J. Niedzwiedz, “Jesuit Education in the Polish-Lithuanian Commonwealth”, *Jr. of Jesuit Studies*, 5, 2018, 3, 441–455.

A. Karp, “Mathematics Education in Russia”, in A. Karp, G. Schubring (eds.), *Handbook on the History of Mathematics Education*, New York 2014, 303–322.

B. R. Vogeli, A. Karp (eds.), *Russian Mathematics Education: History and World Significance*, Singapore 2010.

K. Hall, D. Bayuk, “Science and Russian Orthodox Scholarship”, *Isis*, 107, 2016, 3, 273–8.

J. Šimončič, A. Hološová, eds., *The History of Trnava University (1635–1777, 1992–2012)*, Trnava 2014 (firstly a Jesuit college, with perhaps the first observatory in the region).

P. Shore, *Jesuits and the Politics of Religious Pluralism in Eighteenth-Century Transylvania*, Aldershot 2007.

I.-A. Pop, *Cultural Diffusion and Religious Reformation in Sixteenth-Century Transylvania, (. . .)*, Lewiston 2014.

E Nicolaidis, *Science and Eastern Orthodoxy. From the Greek Fathers to the Age of Globalization*, Baltimore 2011.

Id. (and others), “Science and Orthodox Christianity: An Overview”, *Isis*, 107, 2016, 3, 542–66.

Borri e Galileu: Observações Astronómicas em Coimbra

Carlota Simões
Universidade de Coimbra
Departamento de Matemática da FCTUC
Centro de Física da UC

Pedro J. Enrech Casaleiro
Universidade de Coimbra
Observatório Geofísico e Astronómico da UC
CITEUC - Centro de Investigação da Terra e do Espaço da UC

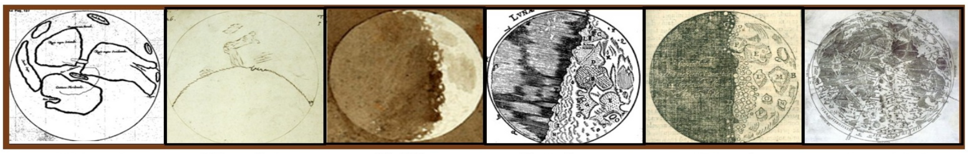
De Galileu a Borri

Galileu Galilei (1564–1642) terá conhecido o telescópio em Julho de 1609. Com este instrumento iniciou uma série de observações do céu que publicaria no seu livro *Sidereus Nuncius* (1610). A observação da Lua revelou a existência de montes e vales na sua superfície, ilustrados nas gravuras que ali se encontram reproduzidas. Mas não eram as primeiras ilustrações de sempre do relevo da Lua: talvez a de William Gilbert (1544–1603), a partir de observações a olho nu, tenha sido a primeira (certamente antes de 1603) mas só foi publicada em 1651. Também o inglês Thomas Harriot (1560–1621) produziu imagens da Lua com a ajuda de um aparelho a que chamou *dutch spyglass*; a primeira data de 3 de Agosto de 1609, uns meses antes das observações da Lua por Galileu (Novembro de 1609), mas como as gravuras de Harriot não foram publicadas durante a sua vida, é Galileu o autor das primeiras gravuras impressas da Lua a partir de observações com telescópio.

Mas também aos padres jesuítas chegou a notícia da existência do telescópio, e também estes começaram a fazer observações astronómicas, entre finais de 1609 e início de 1610. Por via da Companhia de Jesus, as novidades de Galileu chegaram rapidamente a Portugal. Em 1615, Giovanni Paolo Lembo começou a leccionar no Colégio de Santo Antão em Lisboa. Pelas notas do seu curso ficamos a saber que por essa altura se construíam telescópios e se faziam observações astronómicas em Lisboa [4]. Alguns anos mais tarde, Cristovão Borri (1583–1632) encontrava-se em Coimbra e ali fez algumas observações astronómicas. Na noite de 18 de Julho de 1627, Borri observou a Lua e fez a gravura que publicou em *Collecta Astronomica* (1631) [1]. A sua gravura da Lua é muito provavelmente o mais antigo documento gráfico publicado de uma observação astronómica feita em Portugal.

Suplemento do Boletim da SPM 79, Dezembro 2021, pp. 139–141

Entre as gravuras da Lua publicadas por Galileu e Borri ainda encontramos a de Christoph Scheiner (1573/1575–1650), também jesuíta, publicada em *Disquisitiones Mathematicae* (1614). Durante todo o Séc. XVII a Lua continuou a ser escrutinada e as suas irregularidades foram recebendo nomes de pessoas ilustres. Os nomes que chegaram aos nossos dias são em grande parte os da cartografia lunar do jesuíta Giovanni Baptista Riccioli (1598–1671), publicada em *Almagestum Novum* (1651).



Gilbert (antes de 1603) **Harriot (Agosto 1609)** **Galileu (Nov. 1609)** **Scheiner (antes de 1613)** **Borri (1627)** **Ricciolli (antes de 1651)**

Propostas expositivas – Visto de Coimbra e Galileu--Borri

Visto de Coimbra (Museu da Ciência da UC) é uma exposição de memória de lugar que aborda o tema das observações astronómicas em Coimbra [2]. A gravura da Lua de Borri é a imagem de marca da exposição que começa por exibir uma réplica da luneta de Galileu junto às ilustrações da Lua publicadas em *Sidereus Nuncius.* A primeira parte da exposição é dedicada à história dos Colégios Jesuítas de Coimbra (Colégio das Artes e Colégio de Jesus), com destaque para o curso filosófico Conimbricense e para três apontamentos sobre a prática da cultura, da ciência e do culto naqueles colégios. A vitrina sobre ciência está organizada em três núcleos:

- Cristóvão Clavius, antigo estudante do Colégio das Artes e divulgador da obra de Pedro Nunes; em exposição o *De Crepusculis*, um astrolábio e uma rosa-dos-ventos, ambos do séc. XVII.
- O telescópio; em exposição uma luneta do séc. XVIII e uma lente de telescópio que se crê estar relacionada com a Companhia de Jesus e destaque para a obra *Collecta Astronomica* de Borri onde se encontra a ilustração da Lua.
- Os azulejos didáticos jesuítas; em exposição um azulejo de astronomia e um de matemática junto a um facsimile de *Os Elementos* de Euclides na versão de Andrea Tacquet (1729).

Galileu e Borri (Observatório Astronómico e Geofísico da UC) é uma proposta de guião para uma mostra sobre Galileu e Borri, também com três núcleos e centrada na obra de Borri:
- Apresentação da cronologia dos modelos do sistema solar; destacam-se as duas questões centrais da obra de Borri e a sua relação com a religião, enquanto divulgador da obra de Galileu: a incorruptibilidade dos céus rebatida pela existência de cometas e o movimento da Terra, proposto por Galileu, questão que Borri crê resolver optando pelo modelo geocêntrico de Tycho Brahe.
- O papel do telescópio e a sua história; este núcleo introduz a descoberta do telescópio, construído em 1608 na Holanda e melhorado por Galileu em 1609, permitindo as observações astronómicas publicadas em *Sidereus Nuncius* (1610), seguindo-se a utilização do telescópio pelos Jesuítas em Portugal (Lembo em Lisboa e Borri em Coimbra).
- Os painéis didáticos de Astronomia em azulejo; o elemento central da exposição será a reconstrução dos dois painéis didáticos de astronomia à escala real [3]. Cada painel terá por base uma ilustração do séc. XVII dos hemisférios celestes sobre o qual estarão colocadas réplicas dos azulejos. Neste núcleo serão ainda apresentadas as obras que podem ter servido de base à composição final do painel existentes nas bibliotecas da UC (Zahn e Kircher). Será ainda assinalada a diferença entre painéis de azulejos decorativos sobre ciência (Colégio de St. Antão em Lisboa e Colégio do Espírito Santo em Évora) e os azulejos didáticos que foram produzidos para o Complexo Jesuítico de Coimbra.

Referências

[1] Borri, Cristoforo, *Collecta Astronomica ex-Doctrina*, Lisboa, 1631.

[2] Casaleiro, Pedro, 'Visto de Coimbra: O conceito de uma exposição de memória do lugar', in *Visto de Coimbra*, pp. 333–419, C. Simões, M. Miranda e P. Casaleiro (eds.). Imprensa da Universidade de Coimbra, Coimbra, 2020.

[3] Duarte, António Leal; Simões, Carlota e Gil, Francisco, 'Azulejos que testemunham o ensino das ciências nos colégios jesuítas em Coimbra', in *Visto de Coimbra*, pp. 145–157, C. Simões, M. Miranda e P. Casaleiro (eds). Imprensa da Universidade de Coimbra, Coimbra, 2020.

[4] Leitão, Henrique, prefácio de *Sidereus Nuncius*, Galileu Galilei (Veneza, 1610), edição da Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

A História da Ciência como Ferramenta Didáctico-Pedagógica nos Curricula das Faculdades de *Sciencias Naturaes* na "Nova" Universidade de Coimbra (1772)

Fernando B. Figueiredo
DM, CITEUC, Universidade de Coimbra

A importância da História da Ciência (HC) como ferramenta didático-pedagógica para o ensino das ciências é hoje em dia uma questão mais que consensual junto da comunidade educativa. Professores e alunos usam com regularidade temas de HC para uma melhor compreensão de tópicos e conceitos científicos e os próprios currículos das várias disciplinas, das ciências exatas às naturais, integram eles mesmos muitos episódios da sua própria história. Nas escolas portuguesas o ensino das ciências exatas e naturais faz parte dos currículos dos alunos, sejam eles de Ciências e Tecnologias, Humanidades ou Artes. O aumento da escolaridade obrigatória para 12 anos traz também ao percurso escolar dos alunos mais disciplinas de ciências, bem conteúdos científicos ministrados durante mais anos, e por isso mesmo mais aprofundados. Ao nível do ensino, desde o básico, passando pelo secundário e indo até ao superior, os temas de HC integrados nos currículos é hoje indiscutivelmente visto como uma mais valia que deve ser usada para ajudar e melhorar o processo de ensino e aprendizagem. Em Portugal, temas de HC encontram-se e cruzam-se atualmente nos vários níveis de escolaridade e disciplinas, apesar de muitas vezes ser deixado à responsabilidade do professor o uso desse critério.

Por incrível que nos possa parecer, muitas destas ideias acerca da importância da HC, como ferramenta didático-pedagógica para o ensino das ciências, já estava presente nos Estatutos Pombalinos de 1772, que instituem uma das mais significativas e duradouras reformas do ensino universitário e superior em Portugal, integrando-a, inclusive, nos currículos das diversas disciplinas. Pombal pretende tornar a Universidade não só um centro de ensino, mas também um centro de produção de conhecimento que fizesse face às necessidades técnico-científicas de um país que via atrasado e que urgia modernizar (Figueiredo & Duarte 2017). É implementado um ensino técnico e científico em moldes completamente novos, criando-se um curso completo e superior de *'Sciencias Filosóficas'*, dividido *«na de Naturalistas: na de Médicos: e na de Matemáticos»* (Estatutos 1772, v. 3 p. 4), a ser ministrado nas novas Faculdades de Matemática e Filosofia Natural, e na completamente reestruturada Faculdade de Medicina.

No contexto da Reforma Pombalina o ensino da História toma um papel de destaque. Pois como como sublinha H. Kragh, no século XVIII, a História deixa de *"conduzir ao conhecimento da vontade de Deus, para passar a conduzir ao conhecimento da natureza humana. Esta revolução crucial no campo das letras encontrou um sólido apoio por parte da nova filosofia natural, então em rápida expansão"* (Kragh 2004, 8). O progresso da Ciência, sendo construído degrau a degrau, aproveitava os progressos passados e a História revelava essa edificação feita, tijolo a tijolo, pelos filósofos e pensadores ao longo dos séculos. Nesse sentido, a História assumia um papel importante como didática do ensino não só das ciências matemáticas e naturais, mas também das ciências positivas. No caso dos cursos científicos a HC é matéria introdutória a todas as cadeiras e disciplinas – "em toda e qualquer Faculdade principiarão os alunos pela parte histórica", afirmava Manuel do Cenáculo, um dos atores da Reforma.

Do ponto de vista do ensino, a HC podia contribuir não só para que as disciplinas científicas se tornassem mais atraentes, despertando nos estudantes o interesse pelo estudo. Assim, todos os professores deveriam nas suas primeiras aulas introduzir os fundamentos da sua disciplina, a par de uma resenha histórica focada nos períodos mais relevantes, de modo a

> *«facilitar melhor a entrada nela e segurar o fruto das Lições: Principiará o Professor pelos Prolegômenos respectivos: Dando uma ideia circunstanciada do seu objecto e dos meios que aplica para conseguir o fim que se propõe: Mostrando a sua origem e progressos»* (Estatutos 1772, v. 3 p. 176).

E sempre com o cuidado em fazê-lo de acordo com a capacidade dos alunos, estimulando-os, mas não os assustando,

> *«Mostrando-lhes, que a primeira coisa, que deve fazer quem se dedica a entender o progresso das Matemáticas, é instruir-se nos descobrimentos antecedentemente feitos; para não perder tempo em descobrir segunda vez as mesmas coisas; nem trabalhar em tarefas, e empresas já executadas»* (Estatutos 1772, v. 3 p. 170)

No caso da cadeira de Astronomia, cadeira do 4.º ano do *Curso Mathematico*, que no vasto campo das ciências físico-matemáticas gozava de um estatuto particular, o papel da HC usado para *'conduzir os mesmos discípulos com mais gosto, e melhor preparo a ouvir as lições'* sai ainda mais reforçado. Pois, para além desse papel introdutório e motivador, a HC poderia, em si mesma, desempenhar uma função didática muito relevante ao próprio processo de aprendizagem através do chamado *'método dos inventores'*. Segundo o autor dos Estatutos, o professor podia seguir dois métodos no ensino da Astronomia,

> *«O Primeiro consiste em dispor os conhecimentos já descobertos, e averiguados, pela ordem Doutrinal, e Sintética, de sorte que façam um encadeamento natural; e se apresentem ao entendimento do modo mais fácil, e vantajoso. O Segundo consiste em seguir os passos dos mesmos Inventores; ajuntado primeiro as Observações de todos os Fenómenos; e entrando depois na indagação das causas deles, pela mesma cadeia de tentativas, e raciocínios, por onde se chegou, ou podia chegar aos verdadeiros conhecimentos, que hoje possuímos.»* (Estatutos 1772, v. 3 p. 191)

Quem hoje pela primeira vez lê os Estatutos Pombalinos impressiona-se com a clareza do discurso e as preocupações didáticas que atravessam todo o texto. A HC já era, tal como hoje o é, vista e aceite, como uma ferramenta indispensável a uma melhor compreensão das realizações teóricas e práticas das próprias ciências, servindo aos alunos como um importante auxiliar para apreciar o significado das questões e desafios que inspiram os cientistas do passado.

Bibliografia

Estatutos da Universidade de Coimbra... (3vols.), Coimbra: Imprensa da Universidade, 1972 [fac-simile da edição de 1772].

Figueiredo, F. B., Duarte, A. L. (2017). A Reforma Pombalina da Universidade de Coimbra e a institucionalização das Ciências Matemáticas e Astronómicas em Portugal. In Araújo, A. C. & Fonseca, F. T. (coords.). A Universidade Pombalina: Ciência, Território e Coleções Científicas. (pp. 191–244). Coimbra, Portugal: Imprensa da Universidade.

FOCUS: What is the value of History of Science, ISIS, v. 99, n. 2, Jun. 2008.

Helge Kragh, Introdução à Historiografia da Ciência, Porto: Porto Editora, 2003.

Kostas Gavroglu, O Passado das Ciências como História, Porto: Porto Editora, 2007.

Pedro Calafate, A ideia de natureza no século XVIII em Portugal (1740–1800), Lisboa, 1994.

Pedro Calafate, F. Soares Gomes, “Iluminismo”, Logos: Enciclopédia Luso-Brasileira de Filosofia, v. 2 (1990), pp. 1301–1316.

Thomas L. Hankins, Science and the Enlightenment, Cambridge: University Press, 1999.

Os números e as operações com inteiros nos finais do século XIX em Portugal

Helena Sousa Melo, *Maria do Carmo Martins*
F. Ciências e Tecnologia, Dep. Matemática e Estatística,
Centro de Estudos Humanísticos, Universidade dos Açores

Desde o século XVI o ensino elementar possui temas relacionados com a Matemática, estando a aritmética sempre presente. Ao longo dos tempos, o ensino da Matemática em Portugal sofreu várias reformulações. Por questões de limitação, concentramo-nos a partir de 1836 e apresentamos alguns conteúdos ensinados desde 1860.

Com a criação dos liceus, pelo ministro do reino Passos Manoel, entre 1836 e 1860, a instrução secundária teve 10 disciplinas sendo a 5.ª, Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Desenho. Como se pretendia valorizar o ensino científico e técnico é decretado a criação de um liceu em cada capital de distrito do continente e do ultramar, mas em Lisboa seriam dois.

Contudo, no Decreto da Instrução Secundária, não é feita referência ao número de anos que constituem o ensino liceal, nem tão pouco os conteúdos a lecionar em cada disciplina de cada ano e respetiva carga horária. A escolha e coordenação dos compêndios e a distribuição das disciplinas ficariam a cargo do Conselho de cada liceu.

Em 1844, Costa Cabral aprova nova reforma. No ensino secundário, mantém-se a intenção da existência de um liceu em todas as capitais de distrito, mas reduz consideravelmente o ensino científico. O curso dos liceus passa a ter 6 disciplinas, sendo a 3.ª, Aritmética e Geometria aplicada à Arte e primeiras noções de Álgebra. Tal como a reforma anterior, não faz referência ao número de anos que deve ter o ensino liceal nem a carga horária ou manuais escolares. A salientar que só no final de 1870 são publicados os primeiros programas oficiais do ensino liceal.

Em 1850 são alterados os conteúdos do curso liceal e criada a cadeira envolvendo Aritmética, Álgebra Elementar, Geometria Sintética Elementar, Princípios de Trigonometria Plana e Geografia Matemática. Em 1860, surge um novo regulamento para os liceus, decretado por Fontes Pereira de Melo: o curso liceal, de 5 anos, é composto por 10 disciplinas, sendo a 5.ª, Matemática Elementar. O ensino liceal vai sendo progressivamente estruturado e as disciplinas vão surgindo de forma mais organizada, bem como os docentes e os manuais que vão sendo cada vez mais especializados. Em 1868, o curso liceal passa de 5 para 6 anos, continuando a existência de liceus de 1.ª e de 2.ª classe. Em 1880, no ensino liceal há 16 disciplinas, onde a 5.ª é Aritmética, Geometria plana, Princípio de Álgebra e Escrituração, e a 11.ª é Álgebra, Geometria no Espaço e Trigonometria. Em 1888, há ainda a divisão do curso liceal em Curso Geral, Curso Complementar de Letras e Curso Complementar de Ciências.

Em 1871, o tópico de Aritmética da cadeira de Matemática Elementar contemplava, entre outros, a numeração, as seis operações e divisibilidade com números inteiros, números primos, frações, decimais, raízes quadradas e cúbicas, proporções, progressões, logaritmos e aplicações da aritmética. Um livro adotado na altura foi *"Elementos de Arithmetica"* de Augusto José da Cunha, também usado no liceu de Ponta Delgada, um dos primeiros fundado nos Açores.

Alguns dos tópicos programáticos dos planos de estudos a partir de 1860 permanecem até hoje, como por exemplo, a organização dos números em ordens e classes, contadas da direita para a esquerda. Considerava-se as ordens: unidades, dezenas e centenas das classes das unidades, dos milhares, dos milhões e, logo a seguir, a dos biliões. Após a 9.ª Conferência Geral de Pesos e Medidas, em 1948, recomendou-se a normalização para a Europa, sendo adotada em Portugal, a partir de 1959, a Norma Portuguesa NP-18. Nesta norma, obtém-se o nome dos grandes números através da expressão designatória n-ilião para os valores de 10^{6n}, onde n é 2, 3, etc. atribuindo-se os prefixos latinos *bi*, *tri*, etc., respetivamente. A padronização deveu-se ao facto de existirem duas escalas: a *curta* baseada em $10^{3(n+1)} = n$-ilhão e a *longa* supracitada, termos introduzidos em 1975 pela matemática Geneviève Guitel (1895–1982).

Há também a referir que se usava os complementos aritméticos para determinar a diferença entre dois números e o valor de expressões numéricas no conjunto dos números inteiros. A operação de multiplicação começava com a adição de parcelas repetidas e, posteriormente, recorria à tabuada de multiplicação, apresentando o algoritmo completo com os produtos parciais. A operação de divisão iniciava-se com as subtrações sucessivas cujos subtrativos correspondiam ao divisor, sendo depois apresentado o algoritmo completo com os restos parciais. Definia-se um número primo como aquele que admitia apenas dois divisores: o 1 e ele próprio, e considerava-se o 1 como número primo. Apresentava-se o algoritmo da raiz quadrada, mas na raiz cúbica, usava-se a tentativa e erro com um início semelhante ao da raiz quadrada. Abordava-se os cálculos com números complexos e incomplexos. Por exemplo, 1d 2h 3min era um número complexo, enquanto o seu equivalente, 1563min era um número incomplexo.

Podíamos apontar outras particularidades. As acima referidas foram o nosso alvo de estudo.

Bibliografia

Cunha, Augusto José (1899), *Elementos de Arithmetica*, Livro I, 7.ª Edição, Lisboa.

Rosa, A. Cunha (s. d.), *Aritmética Prática*, 7.ª Ed., Biblioteca de Instrução Profissional, Paris-Lisboa.

Almeida, António José & Matos, José Manuel (coordenadores) (2014), *A matemática nos programas do ensino não superior 1835–1974*, UIED, APM, Lisboa.

Atas do 7.º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática (2014), Óbidos.

Legislação Régia de 1860 – Ministério do Reino.

Problemas de Matemática em imprensa periódica portuguesa (1859–1936)

*Mária Cristina Almeida**
CICS.NOVA/ANQEP

Em 2015 ao folhear um exemplar de *A Illustração Portugueza: Revista Litterária e Artística* observámos que esta revista semanal publicava, a par das crónicas, dos contos, das narrativas e das anedotas, problemas de matemática. Esta divulgação da Matemática, na parte lúdica da revista, interessou-nos e levou-nos procurar a existência de passatempos matemáticos nesta e noutras publicações periódicas. Assim, fizemos um levantamento dos problemas editados em várias publicações da época. No que respeita ao número de problemas temos: *Archivo Pittoresco* (1859) – 4 problemas, *Jornal do Domingo* (1881) – 20 problemas, *A Illustração Portuguesa* (1884) – 117 problemas, *A Imprensa* (1886) – 3 problemas, *Brasil-Portugal* (1899) – 3 problemas, *O Académico* (1903) – 1 problema, *Almanach Bertrand* (1900) – em estudo. O reduzido número de problemas propostos nas outras publicações, levou-nos a que caracterizássemos apenas os problemas publicados na revista *A Illustração Portuguesa* (1884–1889), no que respeita a conteúdo matemático e ligação à vida corrente. Do conjunto de problemas publicados nesta revista, cento e oito foram propostos por Moraes d'Almeida. Carlos Augusto Morais de Almeida (1843–1919) foi, segundo o Dicionário de Educadores Portugueses (1999), um indivíduo que se destacou especialmente no campo do ensino das ciências físicas e matemáticas durante o período que engloba o fim do século XIX e o princípio do século XX; e, que contribuiu igualmente para o movimento de divulgação científica publicando vários artigos em revistas.

Segundo Mello e Souza (1940), mais conhecido por Malba Tahan, corresponde "à Aritmética recreativa uma série de problemas relacionados com curiosidades sobre os números, operações, enigmas, anedotas, adivinhações, quadrados mágicos, etc." (Mello e Souza, 1940, p. 233). Sobre adivinhações matemáticas, refere que há "questões formuladas, envolvendo relações numéricas ou figuras geométricas, que não constituem propriamente problemas – mas sim verdadeiras adivinhações matemáticas. Essas adivinhações não se apresentam, de modo algum, adstritas a regras fixas ou a processos racionais, as soluções, em geral, são atingidas quando o curioso dispõe

*Este trabalho foi parcialmente financiado por fundos portugueses através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I. P., no contexto do projeto PTDC/CED-EDG/32422/2017.

de uma habilidade especial e conhece os artifícios comumente empregados pelos inventores de enigmas." (Mello e Souza, 1940, p. 45). Após a análise do enunciado de cada um dos problemas propostos por Moraes d'Almeida estabelecemos oito temas: Álgebra, Aritmética, Adivinhações matemáticas, Geometria, Combinatória, Aritmética recreativa, Aritmética indiana, Probabilidades. A distribuição dos problemas por tema revela que o maior número de problemas se situa no campo da Aritmética, em segundo lugar temos as Adivinhações matemáticas, seguindo-se a Álgebra, Geometria, Combinatória, Probabilidades. O número de problemas com contexto ligado à vida real é cerca de metade do número dos problemas. Apresentamos um exemplo de problema de Álgebra, com contexto ligado à vida real "Quanto possue uma pessoa que diz o seguinte: Se eu juntasse 30 contos ao que tenho ficaria com tantos contos a mais de 85 quantos actualmente tenho a menos. (*A Illustação Portuguesa*, n.º 1, 1/07/1884, p. 7).

George Pólya na sua obra *How to Solve It* (2003/1945, 1.ª ed.) argumentou que o espaço dedicado pelos jornais e revistas populares a palavras cruzadas e outros enigmas parece demonstrar que as pessoas apreciam passar algum tempo a resolver problemas, apenas pelo desafio, pelo triunfo da descoberta (Pólya, 2003). Estes problemas, que mantivemos na sua grafia original para benefício curiosidade dos alunos, podem ajudar os professores a acautelar que lhes são propostos problemas que não seguem um padrão que já conhecem e que por isso não lhes colocam nenhum desafio. Alguns dos problemas analisados poderão ser resolvidos na sala de aula ou clubes de Matemática, onde sendo possível avançar para uma discussão alargada, se pode verificar a validade das várias estratégias de resolução que foram descobertas e usadas, comparar as várias estratégias apresentadas, analisar as possíveis soluções (havendo mais que uma), ou avançar para variantes ou prolongamentos do problema. Mas, também poderão ser resolvidos em casa e entregues ao professor. Num caso, como no outro, trabalha-se a capacidade de transmitir ideias, raciocínios e conclusões matemáticas. Apresentamos ao lado uma possível aplicação para sala de aula (Figura 1) usando um dos problemas analisados. Este problema tem várias respostas (Figura 2).

Em jeito de conclusão, realço que como professores cabe-nos proporcionar condições para que os nossos alunos vivam o prazer de resolver problemas que reside muitas vezes na descoberta de que podemos ir mais além do que aquilo que pensávamos conseguir.

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE XXX

Disciplina/Clube: **MATEMÁTICA** Ano letivo ______

Professor(a): ___________

Nome: ______________________ Ano: ___ Turma: ___

Assunto: **Problema dos tonéis**

A Illustração Portugueza: Revista Litterária e Artística foi lançada em Lisboa, em Junho de 1884, publicou-se, semanalmente, entre Julho de 1884 e Outubro de 1890.

Numa das suas rubricas denominada "Em família", eram propostos passatempos, que incluíam problemas de matemática. Tendo sido publicados 108 problemas.

Vejamos um problema foi proposto nesta revista.

Problema

Dividir entre Fagundo, Procopio e Seraphim 24 toneis, estando 5 cheios de vinho, 8 vazios e 11 meio cheios, de maneira que cada uma d'aquellas pessoas fique com egual número de toneis e com a mesma quantidade de vinho.

Resolva o problema.

a) Exponha a sua resposta.

b) Compare a sua resposta com a de outros colegas.

Figura 1. Aplicação para sala de aula

	Toneis cheios	**Toneis meio cheios**	**Toneis vazios**
Fagundo	0	7	1
Procopio	2	3	3
Seraphim	3	1	4
Fagundo	1	5	2
Procopio	3	1	4
Seraphim	1	5	2
Fagundo	2	3	3
Procopio	2	3	3
Seraphim	1	5	2

Figura 2. Proposta de resolução do problema

Se o professor achar pertinente, poderá ser inserida no enunciado da atividade (Figura 1), uma tabela como a da figura 2 para os alunos preencherem, ou ainda, avançar para um prolongamento do problema.

Fontes e Bibliografia

A Illustração Portugueza: Revista Litterária e Artística (1884-1890)

G. Pólya, *Como resolver problemas*. Lisboa: Gradiva, 2003.

Mello e Souza, *Dicionário Curioso e Recreativo da Matemática* 1.º Vol.-A-B. Rio: Edit. Getulio Costa, 1940.

Nóvoa, A.; Bandeira, F. (coord. geral). (1999). A educação portuguesa: corpus documental (séculos XIX–XX): dicionário de educadores portugueses. Porto: Edições Asa.

A matemática na aula, um estudo histórico iconográfico[1]

Alexandra Rodrigues
Inst. de Gouveia — Escola Profissional, UIED

José Manuel Matos
U. Nova de Lisboa (UNL), UIED

O estudo de representações de aulas centradas na matemática, mostra--nos como elas têm tomado diferentes disposições ao longo dos séculos refletindo metodologias de ensino, teorias de aprendizagem e inovações tecnológicas. Este estudo iconográfico, suportado nas propostas de Erwin Panofsky (1939/1972) recorre a gravuras e fotografias encontradas em livros de texto, revistas ou no espólio de colecionadores desde a época medieval até meados do século XX. Utilizando um paradigma qualitativo, com pesquisa histórica e documental, apresentamos para diferentes épocas teorias de ensino e aprendizagem subjacentes à aula, através da consulta da legislação, manuais escolares e fotografias.

O principal objetivo da comunicação foi apresentar vislumbre de como eram as aulas de matemática no passado. Por outras palavras, procurámos interpretar as representações das aulas de matemática a partir de imagens (fotografias, gravuras, imagens) encontradas em livros didáticos e jornais e relacioná-las com outros estudos do ensino passado da matemática. O uso de imagens como evidência histórica estende o campo de trabalho do investigador para além das fontes materiais tradicionais: declarações oficiais, textos publicados em jornais, livros, documentação em arquivos, etc. Contestando o que ele chama de invisibilidade visual, Peter Burke (2001) discute os caminhos em cuja história cultural pode incorporar o estudo das imagens. Utilizando uma abordagem iconográfica, pretendemos identificar os elementos mostrados nas fotos das salas de aula e as relações entre eles e, assim, compreender a mudança e estabilidade nas salas de aula de matemática. É uma viagem através dos modos de organização do processo de ensino, a aula e não sobre o conteúdo desse ensino (o currículo). Será necessariamente uma viagem preliminar, visto que ainda não foi feito um estudo aprofundado sobre o assunto em Portugal, ao contrário de um trabalho mais consistente realizado em outros países.

[1]Encontra o artigo completo em Matos, J. M., & Rodrigues, A. S. (2020). Mathematics in classroms, na iconographic historical study. *Revista História da Educação, 24* (Epub June 29, 2020). doi: `https://doi.org/10.1590/2236-3459/99597`

Figura 1: Gravura do Tratado da pratica Darismetyca de 1519.

A mais antiga gravura que encontrámos está precisamente no final da primeira edição do *Tratado da pratica Darismetyca* da autoria de Gaspar Nicolas (1519/1963)[2] e que constitui o primeiro livro de texto de matemática impresso em Portugal (figura 1). A imagem parece representar uma aula medieval típica, na qual o mestre está sentado numa cadeira mais elevada e aponta para o livro enquanto os aprendizes folheiam, presumivelmente, outros exemplares do mesmo livro ou escrevem em cadernos.

Sistematicamente e obedecendo a uma ordem cronológica, analisámos imagens que retratavam a aula jesuíta, as aulas de primeiras letras e nos primeiros liceus, gravuras que retratavam as inovações tecnológicas no final do século XIX (o quadro preto, a lousa, entre outras...), as salas de aula da primeira metade do século XX, salas de aula de formação de professores e do ensino profissional e a influência da escola nova no ensino primário e liceal.

Com semelhanças com o método hermenêutico alemão de análise textual, o método iconográfico tem sido criticado por ser demasiado intuitivo e especulativo (Burke, 2001). No entanto, a análise iconográfica das representações encontradas em livros de texto, fotografias ou gravuras, interligadas com o contexto social, económico e cultural da época, encontrado em registos de professores, alunos e na legislação permitiram-nos identificar práticas da matemática na aula (no sentido de Julia, 1995) enquadradas entre o período medieval e meados do século XX. Através deste retrato iconográfico foi possível reconhecer uma evolução das relações estabelecidas entre professores e alunos, dos materiais utilizados e da organização do espaço da aula, que, ao longo dos séculos, foi transformando a rigidez formal da organização es-

[2]A gravura foi usada noutros livros do mesmo editor.

pacial. Os novos equipamentos educativos, em especial o quadro negro, vão gradualmente transformar a estrutura da aula, não apenas de um ponto de vista arquitetónico, mas, mais importante, de um ponto de vista simbólico.

Esperamos ter trazido o leitor para uma visão da história (em particular da história da Educação Matemática) como uma busca de permanências e mudanças que nos permita refletir sobre o presente. O aluno, o professor e o conteúdo enquanto categorias abstratas são permanentes, mas tudo o resto muda: as relações que se estabelecem na aula, o valorizado e o reprimido, os artefactos e o seu significado. Mas muda, para além de tudo a identidade social e cultural concreta dos alunos, dos professores (repare-se de novo nas imagens de alunos e de professores) e da própria matemática (que incorporou diferentes visões do que é conhecimento matemático legítimo e desejável eliminando simultaneamente outras dimensões).

Bibliografia

Burke, P. *Eyewitnessing: The Uses of Images as Historical Evidence.* Londres: Reaktion Books, 2001.

Carvalho, R. (2008). *História do Ensino em Portugal – Desde a fundação da nacionalidade até ao fim do Regime de Salazar-Caetano* (4.ª ed.). Lisboa. Fundação Calouste Gulbenkian.

Leitão, H. (2007). Azulejos que testemunham uma tradição de ensino científico. In: Simões, C. e Duarte, A. L. (Ed.). *Azulejos que ensinam.* Coimbra: Universidade de Coimbra, 2007. p. 17–33.

Matos, J. M. (2011). *Imagens da aula de Matemática.* Educação e Matemática, v. 115, n. Nov/Dez 2011, p. 3–10.

Matos, J. M. (2014). Mathematics education in Spain and Portugal. Portugal. In: Karp, A. e Schubring, G. (Ed.). *Handbook on the History of Mathematics Education.* Londres: Springer. p. 291–302.

Nicolas, G. *Tratado da pratica darismetyca.* Porto: Livraria Civilização, 1519/1963.

Panofsky, E. (1939/1972). *Studies in Iconology: Humanistic Themes in the Art of the Renaissance.* First Icon, 1939/1972.

Rodrigues, A.; Matos, J. M. (2018). Uma iconografia da matemática na aula. In: Rodrigues, A.; Barbosa, A., et al (Ed.). *Livro de Atas do EIEM*

2018, Encontro em Investigação em Educação Matemática. A Aula de Matemática. Caparica: SPIEM, 2018. p. 161–179. ISSN: 2182-0023.

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., no âmbito do projeto «UID/CED/2861/2016».

Daniel Augusto da Silva, "um precursor da Teoria dos Conjuntos"?

Ana Patrícia Martins
CIUHCT/ Escola Superior de Educação de Viseu

Em 1927, Pedro José da Cunha apresenta, ao Congresso Luso-Espanhol para o Progresso das Ciências, uma comunicação intitulada *A noção de conjunto numa das memórias de Daniel da Silva*, onde considera o matemático, oficial de Marinha e lente da Escola Naval, Daniel Augusto da Silva (1814–1878) "um precursor da Teoria dos Conjuntos". Essa memória, *Propriedades geraes e resolução directa das congruencias binomias: introducção ao estudo da theoria dos numeros*, estava concluída em 1852 e foi ofertada pelo autor à Academia das Ciências de Lisboa. Publicada em 1854, o seu capítulo final (*Várias aplicações*) não ficou concluído — Daniel da Silva afastara-se da vida activa ainda em 1852, por motivos de doença (excesso de trabalhos intelectuais, segundo o próprio). Regressaria em 1859.

A primazia do contributo de Georg Cantor (1845–1918) na génese da Teoria dos Conjuntos (TC) é facto amplamente difundido desde os inícios do século XX e Pedro José da Cunha partilhava dessa opinião. Pouco comuns são as abordagens historiográficas que realçam também o papel de outros matemáticos, destacando-se, na década de 1990, os textos de José Ferreirós. Para o autor, a tese de que, no terceiro quartel do século XIX, Cantor foi o introdutor do infinito na Matemática, conceito que impulsionou o surgimento da Matemática Moderna é, se considerada isoladamente, um facto histórico impreciso. Segundo Ferreirós, a tradicional historiografia da TC potenciou alguns equívocos quanto ao desenvolvimento da Matemática Moderna. Por um lado, é falso que antes de Cantor houvesse uma rejeição universal do *infinito actual*. É, também, falso que abordagens conjuntistas da Matemática (que consideram a TC como linguagem básica da Matemática) tenham surgido exclusivamente em assuntos da Análise (associados aos trabalhos de Cantor com séries trigonométricas). Emergiram, também, de questões da Álgebra e da Teoria dos Números (distinguindo-se os contributos de Richard Dedekind), e da Geometria (de onde sobressaem as investigações de Bernhard Riemann, em Topologia). De realçar que os primeiros contributos na TC, por Cantor e seus contemporâneos (Dedekind e Riemann), incluem abordagens intuitivas aos conjuntos, sendo enquadrados no que se apelidou de *Naive Set Theory*. Já nos inícios do século XX, as primeiras tentativas sistemáticas de axiomatização da TC são devidas a Bertrand Russel (1903) e Ernest Zermelo (1908).

Suplemento do Boletim da SPM 79, Dezembro 2021, pp. 159–161

Em *Propriedades geraes e resolução directa das congruências binomias*, Daniel da Silva apresenta processos e fórmulas para a resolução de congruências binómias que se destacam pela sua originalidade, colocando-se questões de prioridade sobre o matemático escocês John Stephen Smith, num trabalho seu publicado em 1861. A noção de *conjunto* surge, na obra do matemático português, como uma ferramenta para demonstrar "um dos teoremas de uso mais frequentes na teoria dos numeros", de Euler, que permite obter a quantidade de primos com um número, não superiores a ele. É apresentada como uma "notação". Daniel da Silva assume, portanto, a existência de conjuntos, pelo que não os define.

Para uma série de números S, "*reunidos*, e não *sommados*", denota por S_a a "*reunião*" daqueles que gozam de certa propriedade a, e introduz notações que correspondem aos actuais conceitos de intersecção de conjuntos, complementar de um conjunto e cardinal de um conjunto. $S_{a,b}$ representa a reunião dos números que verificam, simultaneamente, as propriedades a e b (sendo que $S_{a,b} = S_{a_b}$, ou seja, $S_{a,b}$ é a reunião dos números que, gozando da propriedade a, gozam também de b). (De forma semelhante, $S_{a,b,c} = S_{a,b_c} = S_{a_{b_c}}$, etc.) ${}^aS$ representa a reunião dos elementos de S "privados" da propriedade a, *operação* que pode ser estendida a qualquer número de propriedades. (De modo semelhante, ${}^{b,a}S = {}^{b}{}^{a}S$, etc.) ψS_a denota o "número dos números contidos" em S_a. Utiliza, ainda, notações correspondentes aos actuais conceitos de reunião $(+)$ e diferença $(-)$ de conjuntos.

A notação $S\,[1-_a]$ serve para representar ${}^aS = S - S_a$, pelo que a reunião ${}^{\ldots c,b,a}S$ é escrita na forma

$$ {}^{\ldots c,b,a}S = S\,[1-_a]\,[1-_b]\,[1-_c]\ldots, \tag{1}$$

sendo que "os produtos dos numeros a, b, c, etc. passam a indices compostos das series respectivas". E, de modo semelhante, se estipula

$$\psi\,{}^{\ldots c,b,a}S = \psi S\,[1-_a]\,[1-_b]\,[1-_c]\ldots, \tag{2}$$

igualdade que expressa o Princípio de inclusão-exclusão na sua forma complementar. Para clarificação das *parcelas* constituintes de (2) (que Daniel da Silva não faz), considere-se o desenvolvimento:

$$\psi\,{}^{\ldots c,b,a}S = \psi S - \psi S_a - \psi S_b - \psi S_c - \ldots + \psi S_{a,b} + \psi S_{b,c} + \ldots - \psi S_{a,b,c} - \ldots$$

A abordagem da noção de conjunto feita por Daniel da Silva abrange apenas conjuntos finitos, facto evidenciado pelos exemplos em que usa a sua *notação*. A saber, na demonstração da fórmula de Euler e também na aplicação das fórmulas (1) e (2), a respeito das quais afirma: "teem ainda a vantagem de exprimir teoremas muito mais geraes que o de Euler, [e] podem servir comodamente para a demonstração de formulas importantes e curiosas". Tal exemplo, demonstrado, diz respeito à obtenção da soma de todos os números não maiores que N, e primos com ele.

De salientar que na memória *Propriedades geraes e resolução directa das congruencias binomias* não se faz outro uso da *notação* de conjunto nem existem considerações a processos infinitos. O que está em linha com o enquadramento desta obra, desde logo explicitado no seu subtítulo (*introducção ao estudo da theoria dos números*).

Concordamos com Pedro José da Cunha na afirmação de que "muito antes que Cantor publicasse os seus primeiros trabalhos sôbre a Teoria dos conjuntos já Daniel da Silva havia mostrado a conveniência de estabelecer princípios a que se subordinassem os números reunidos em colecções, só pelo facto de estarem reunidos". No entanto, discordamos da sua tese. A resposta à questão que nos propusemos esclarecer, Daniel Augusto da Silva, "um precursor da Teoria dos Conjuntos"?, é, portanto, não.

Referências

Cunha, Pedro José da. 1927. "A noção de conjunto numa das memórias de Daniel da Silva". Asociación Española para el Progreso de las Ciencias. Congreso de Cádiz, tomo 3, Ciencias matemáticas.

Ferreirós, José. 2007. *Labyrinth of Thought. A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics.* Birkhauser: Basel, Boston, Berlin.

Silva, Daniel Augusto da. 1854. *Propriedades geraes e resolução directa das congruencias binómias: introducção ao estudo da theoria dos numeros.* Lisboa: Imprensa Nacional.

A *Bibliotheca do Povo e das Escolas* e os seus precursores

Vitor Bonifácio
Departamento de Física, CIDTFF, Universidade de Aveiro

Durante o século XIX verificou-se uma expansão dos sistemas de ensino, de novos métodos de produção de papel e máquinas de impressão. Os desenvolvimentos científico-tecnológicos – transportes a vapor, marítimos e terrestres; comunicações, a rede global de cabos telegráficos; iluminação, a gás e, posteriormente, eléctrica – alteraram de forma palpável o dia a dia de muitos cidadãos. A vontade de potenciar a instrução, mobilizar cidadãos e/ou, apenas, aproveitar oportunidades comerciais resultantes do crescente número de leitores, nomeadamente das classes baixas, levou a que, ao longo do século XIX, se tenha desenvolvido o que hoje denominamos por comunicação de massas e se identifica, por vezes, como a idade de ouro da divulgação científica. Livros e revistas com tiragens de milhares de exemplares tornaram-se comuns em vários países europeus. Inserido nesta dinâmica internacional, o editor português David Corazzi (1845–1896) deu à estampa, em 1881, o primeiro número da *Bibliotheca do Povo e das Escolas* (BPE). A primeira edição, de 10 000 exemplares, da brochura de 64 páginas de 11,0 cm por 16,5 cm intitulada *História de Portugal* esgotou rapidamente. A este êxito comercial somou-se uma boa recepção crítica e as tiragens subiram acompanhando a procura popular. O número 16, *Hygiene*, publicado aproximadamente 8 meses depois, teve uma tiragem de 20 000 exemplares [1]. Isto é, cerca de 8% de todos os alunos matrículados em Portugal no ensino primário no ano de 1889 [2, p. 104]. A longevidade é outra das características desta colecção. A publicação sobreviveu ao abandono de Xavier da Cunha (1840–1920), o seu primeiro director e arquitecto, e às mudanças de proprietário da editora. No total publicaram-se, ao longo de 33 anos, 237 números, entre os quais, vários de matemática, quer de nível elementar como, por exemplo, *Arithmetica Pratica* (n.º 5, 1881) e *Algebra Elementar* (n.º 14, 1881) de José Greenfield de Mello (1848–1905), *Trigonometria* (n.º 142, 1887) de João Maria Jalles, quer de conteúdos mais elaborados, nomeadamente numa fase tardia, como *Funcções e Equações Numericas* (n.º 207, 1898) de Luís Marrecas Ferreira (1851–1928) e *Noções sobre Cálculo das Probabilidades, Theoria dos Erros e Methodo dos Minimos Quadrados* (n.º 223, 1904) e *Geometria e Trigonometria Espherica* (n.º 231, 1910) de Rodolpho de Guimarães (1866–1918). Note-se que todos os autores referidos pertenceram às forças armadas [3].

Em 1985, Manuela Domingos analisou, de forma exemplar, a colecção e o seu contexto [4]. Não conseguiu, no entanto, identificar quais as colecções análogas referidas por Xavier da Cunha como modelos da colecção. A comercialização de colecções, mais ou menos elaboradas, enquadradas pelo vocábulo "biblioteca" eram, em 1881, un *fait accompli* em muitos países europeus. Refiram-se, por exemplo, indicando entre parêntesis o ano do primeiro número, a inglesa *Library of Useful Knowledge* (1827) ou a francesa *Bibliothèque Populaire* (1832). Todas estas "bibliotecas" possuíam características idênticas — instruir o povo a custo módico. Em geral, são pequenas brochuras, publicadas em papel de qualidade inferior, vendidas avulso em quiosques de jornais e locais similares ou por assinatura. Em Portugal, podemos enquadrar no mesmo espírito a *Encyclopedia Popular* (1867) de João José de Sousa Telles (1826–1903), embora, ao contrário das colecções referidas anteriormente, esta publicação não tivesse um único tema por número e incluísse artigos de poesia e romance. A publicação não terá sido bem

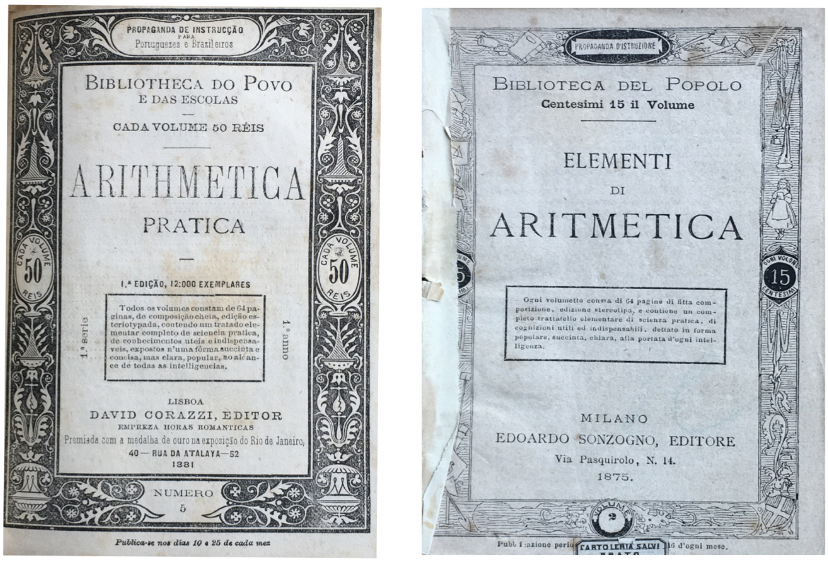


Figura 1: Imagem das capas dos números *Arithmetica Pratica* (1881) da *Bibliotheca do Povo e das Escolas* e *Elementi di Aritmetica* (1876) da *Biblioteca del Popolo*.

sucedida, como aliás, tantas outras iniciativas nacionais, tendo terminado ao fim de 16 números. Esta constatação revela não só a fragilidade dos esforços locais de divulgação científica como evidencia, no contexto nacional, a singularidade da BPE.

Ao estudarmos este tipo de publicações encontrámos, por acaso, o modelo da BPE. Publicada em Milão, pelo importante editor Edoardo Sonzogno (1836–1920), a *Biblioteca del Popolo* (BdP) apareceu em 1875, mantendo-se no prelo pelo menos até à década de 40 do século XX. Os números da BdP e da BPE têm igual dimensão e o mesmo número de páginas. A comparação das duas publicações (figura 1) revela não só a semelhança gráfica entre ambas como o texto do rectângulo central da BPE corresponde à tradução do da sua congénere italiana. Numa publicação anterior analisamos com detalhe as semelhanças e diferenças entre as duas colecções [1]. Se as diferenças resultam de uma aposta explícita nos mercados escolar e brasileiro, as semelhanças apontam inequívocamente a BdP como a inspiração da BPE. Refira-se, no entanto, que os números da BPE não são traduções. Aliás, uma análise prévia dos primeiros números das duas colecções aponta para uma maior incidência de conteúdos de Ciências Naturais na publicação portuguesa, provavelmente devido à formação académica de Xavier da Cunha, antigo aluno das Escolas Médico-Cirúrgica e Politécnica de Lisboa.

Este estudo confirma, de novo, que no Portugal oitocentista se conheciam os desenvolvimentos além fronteiras. Neste caso particular, os responsáveis pela publicação da BPE, adaptaram um modelo internacional ao contexto português conseguindo, assim, um inesperado êxito comercial.

Referências

[1] V. Bonifácio, "Um modelo para a Bibliotheca do Povo e das Escolas: a Biblioteca del Popolo", *Do Manuscrito ao Livro Impresso I*, Imprensa da Universidade de Coimbra; UA Editora - Universidade de Aveiro, 2019, Cood. M. L. Andrade, M. C. Carrington, pp. 313–339.

[2] A. Candeias, A. L. Paz e M. Rocha, *A alfabetização e escola em Portugal nos séculos XIX e XX*, Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, 2007.

[3] V. Bonifácio e H. R. Malonek "Os inesperados livros de Matemática da 'Bibliotheca do Povo e das Escolas'", *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, Vol. 69 (2013), Suplemento, pp. 35–37.

[4] M. Domingos *Estudos de Sociologia da Cultura. Livros e Leitores do Século XIX*, Lisboa, Instituto Português do Ensino à Distância, 1985.

A aplicação do Cálculo das Probabilidades de Diogo Pacheco d'Amorim (1914)

Rui Santos[1]
Escola Superior de Tecnologia e Gestão, Politécnico de Leiria,
CEAUL – Centro de Estatística e Aplicações

Diogo Pacheco d'Amorim (1888–1976) propõe uma construção para a Teoria da Probabilidade na sua tese de doutoramento defendida em 1914 na Universidade de Coimbra. A sua construção é concebida com base no conceito de escolha, à sorte, de um elemento do espaço amostra sob as hipóteses do fenómeno padrão, supondo que somos nós os agentes da escolha, de forma a garantir a aleatoriedade, e que possuímos total conhecimento do espaço amostra, através do qual podemos deduzir a possibilidade de cada elemento. É com base nestas duas hipóteses, bem como em J. Bernoulli e nos principais autores da escola francesa de Probabilidades (sobretudo Laplace, Bertrand, Borel e Poincaré), que o autor constrói a sua visão do Cálculo das Probabilidades, evitando, deste modo, recorrer ao polémico princípio da razão insuficiente de J. Bernoulli e Laplace.

Na Conclusão da sua tese, o autor analisa à luz das leis limites (Lei dos Grandes Números e Teorema Limite Central) os casos onde as hipóteses subjacentes ao fenómeno padrão não se verificam, expondo, assim, a sua visão sobre as aplicações da Probabilidade, isto é, a sua conceção de Estatística.

Deste modo, começa por dividir o campo de análise de um fenómeno em três grupos que caracterizam o agente da escolha (nós, por um agente semelhante a nós e por um agente de outra natureza) e, como tal, qualificam a primeira condição inerente ao fenómeno padrão. Cada grupo é depois dividido em dois sub-grupos que correspondem à tiragem à sorte de um elemento de uma classe (número finito de modalidades) e ao lançamento de um ponto numa região (caso contínuo). Finalmente, cada sub-grupo será dividido em três casos que descrevem o nosso grau de conhecimento sobre o fenómeno em estudo, relativamente ao conhecimento qualitativo (campo de existência, i.e. o seu suporte) e quantitativo (lei de probabilidade, i.e. a sua distribuição) de forma a ser analisada a segunda hipótese do fenómeno padrão. No primeiro caso temos o conhecimento qualitativo e quantitativo do fenómeno (hipótese subjacente ao fenómeno padrão), no segundo caso

[1]Este trabalho foi financiado por Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, no âmbito dos projetos UIDB/00006/2020 e UIDP/00006/2020.

temos conhecimento qualitativo mas desconhecimento quantitativo do fenómeno (conhecemos o suporte mas desconhecemos a sua distribuição) e, por fim, temos o desconhecimento qualitativo e quantitativo do fenómeno. O objetivo é analisar as condições que nos permitem reduzir todas as situações ao fenómeno padrão, de forma a podermos utilizar a teoria que desenvolveu nos capítulos precedentes para modelar os fenómenos em análise, pois "todo o fenómeno, para que possa fazer parte do estudo desta ciência, deve poder reduzir-se a este" (fenómeno padrão).

Para justificar estas transformações, o autor fundamenta-se nas Leis de Bernoulli e análogas, considerando que estas nos permitem, sob determinadas condições, passar todas estas situações para o fenómeno padrão, uma vez que estas leis garantem que, se fixarmos um erro máximo ε para a distância entre o valor observado numa amostra, de um qualquer fenómeno, e o seu valor teórico (isto é, o valor desse fenómeno na população), então a probabilidade de cometermos um erro superior ao fixado vai convergir para zero à medida que aumentamos a dimensão da amostra. Por conseguinte, desde que possamos obter uma amostra de grande dimensão conseguimos sempre obter um resultado aproximado e provável. Assim, Pacheco d'Amorim salienta que este resultado, além de aproximado, é provável, pois, apesar de podermos garantir que o erro máximo cometido é ε com determinada probabilidade p, por mais que a probabilidade p se aproxime da unidade nunca podemos garantir *a priori*, com total certeza, esta majoração do erro.

Apesar deste "hiato que separa a probabilidade da certeza", o autor considera que esta aproximação provável é suficiente para modelar os fenómenos aleatórios, sendo a Cálculo das Probabilidades a Ciência que nos deve guiar na tomada de decisão sob incerteza. Pacheco d'Amorim considera ainda que, caso não sejamos nós os agente da escolha, se o fenómeno se comportar em harmonia com as Leis de Bernoulli e análogas podemos considerá-lo como se fosse proveniente de uma escolha feita por nós próprios e, consequentemente, estaremos nas condições de aplicabilidade das mesmas metodologias para o seu estudo.

Refira-se que, nesta visão, Pacheco d'Amorim inclui algumas ideias sobre testes de hipóteses e de significância, desenvolvidos sobretudo por Jerzy Neyman e Egon S. Pearson por volta dos anos 30, e propõe testar se uma sequência de observações, independentemente da sua origem, pode ser considerada como aleatória (ideia presente na utilização de números pseudoaleatórios na simulação).

Em 1929, Manuel dos Reis, numa tese de doutoramento igualmente dedicada ao estudo dos alicerces da Teoria da Probabilidade, apesar de mostrar discordância com alguns aspetos da construção de Pacheco d'Amorim, testemunha a importância da sua visão no ensino e na investigação desta área em Coimbra. Mesmo passados mais de 40 anos, na sebenta utilizada durante o ano letivo 1956–1957, Pacheco d'Amorim mantém a mesma visão sobre o Cálculo das Probabilidades e as suas Aplicações, apesar de apresentar uma fundamentação distinta da inicial, baseada em conceitos da Teoria da Medida inexistentes em 1914. A sebenta a que tivemos acesso está manuscritamente corrigida e aumentada pelo próprio autor, visando uma publicação definitiva da sua construção do Cálculo das Probabilidades que não chegou a ocorrer.

Referências

[1] J. Bernoulli, *Ars Conjectandi*, Basle, 1713.

[2] J. Bertrand, *Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1888.

[3] É. Borel, *Éléments de la Théorie des Probabilités*, Albin Michel, Paris, 1909.

[4] É. Borel, *Le Hasard*, Librairie Félix Alcan, Paris, 1914.

[5] A. Cournot, *Exposition de la Théorie des Chances et des Probabilités*, Librairie de L. Hachette, Paris, 1843.

[6] S. Lacroix, *Traité Élémentaire du Calcul des Probabilités*, Bachelier, Paris, 1816.

[7] P. Laplace, *Théorie Analytique des Probabilités*, Courcier, Paris, 1812.

[8] D. Pacheco d'Amorim, "Elementos de Cálculo das Probabilidades", Tese de Doutoramento, Universidade de Coimbra, 1914.

[9] D. Pacheco d'Amorim, "Cálculo das Probabilidades", Universidade de Coimbra, 1956–57.

[10] H. Poincaré, *Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1896.

[11] H. Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, Flammarion, Paris, 1902.

[12] M. Reis, "Cálculo das Probabilidades", Tese de Doutoramento, Universidade de Coimbra, 1929.

O ALGORITMO DE GAGO COUTINHO PARA O CÁLCULO DA ALTITUDE

António Costa Canas[1,2], *Magda Ramires Marabujo*[1], *Teresa Sousa*[1,3]
[1]Escola Naval - CINAV, [2]CH-ULisboa
[3]Centro de Matemática e Aplicações (CMA), FCT, UNL

Em 1922, Gago Coutinho e Sacadura Cabral completaram a primeira travessia aérea do Atlântico Sul desde Lisboa até ao Rio de Janeiro. O sucesso da travessia deveu-se ao facto de terem desenvolvido os primeiros métodos científicos de navegação aérea. Para a sua aplicação, tornava-se necessário determinar a altitude da aeronave, de modo a estimar, com rigor, a sua posição. *"O cálculo da posição, por meio de observações dos astros, exige o conhecimento aproximado da nossa altitude [...]."* [1]

O único instrumento disponível à data era o altímetro, no entanto, este instrumento não apresentava valores suficientemente rigorosos e poderia introduzir erros nos cálculos, comprometendo o sucesso da viagem. Assim sendo, Gago Coutinho procura uma solução que lhe permita resolver este problema com o rigor necessário aos seus objetivos.

"Com ceu claro, e com o sol a mais de 30 graus de altura, a sombra do avião sobre a superfície do mar é suficientemente nítida para ser medida a sextante ou a binóculo telemétrico. E é elementar ter, [...], uma pequena tabela, calculada com o comprimento das azas do avião, que dá o coeficiente K da fórmula.

$$altitude = K\, ctg.angulo\ da\ sombra$$

Fórmula que nos dará a altitude com um êrro de poucos metros, [...]" [1]

O requisito da altura do Sol ser superior a 30° é essencial, pois caso contrário a sombra da aeronave é deformada e projetada para muito longe, dificultando assim a sua medição com o rigor desejado. Para determinar o valor da constante K Gago Coutinho utiliza um processo geométrico e algumas fórmulas trigonométricas. Apresentaremos de seguida uma breve descrição deste processo, remetendo o leitor para [2] para um estudo mais detalhado.

A aeronave utilizada era um biplano, ou seja, uma aeronave com duas asas verticalmente opostas. Em primeiro lugar, observemos que a distância vertical entre as duas asas irá incrementar o comprimento da sombra da aeronave na superfície do mar por um valor, que denotaremos por x, e que depende apenas da altura do Sol. (Figura 1(a))

Denotemos por P a distância vertical entre as duas asas, por e a envergadura da aeronave, por a_s a altura do Sol e por s o comprimento da sombra da aeronave na superfície do mar. Tem-se $s = e + x$, onde $x = P\cot(a_s)$. De seguida iremos determinar a constante K, tendo em conta o diagrama apresentado na Figura 1(b).

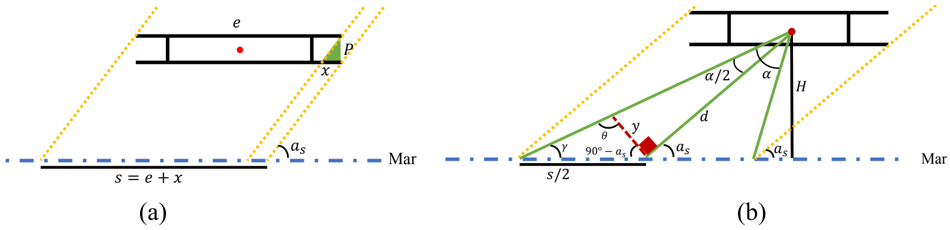


Figura 1: (a) Incremento da sombra do biplano na superfície do mar. (b) Diagrama para determinar a altitude. (Fonte: Elaborado pelos autores.)

Em primeiro lugar, observemos que o valor de α é pequeno. Este valor foi estimado pelos autores utilizando um modelo planar do problema em causa, tendo concluído que o seu valor será inferior a 15°. Deste modo, tem-se $d = y\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \approx 2y\cot(\alpha)$. Por outro lado, para o ângulo θ marcado na Figura 1(b) temos $\theta = 90° + \alpha/2 \approx 90°$. Logo,

$$\cos(90° - a_s) = \frac{y}{s/2} \Leftrightarrow y = \frac{s}{2}\cos(90° - a_s) \Leftrightarrow y = \frac{s}{2}\sin(a_s).$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} H &= d\sin(a_s) \approx 2y\cot(\alpha)\sin(a_s) \approx s\sin^2(a_s)\cot(\alpha) \\ &\approx (e + P\cot(a_s))\sin^2(a_s)\cot(\alpha) \\ &\approx (e\sin^2(a_s) + P\cos(a_s)\sin(a_s))\cot(\alpha) \end{aligned}$$

ou seja, fazendo $K = e\sin^2(a_s) + P\cos(a_s)\sin(a_s)$ temos

$$H = K\cot(\alpha). \tag{1}$$

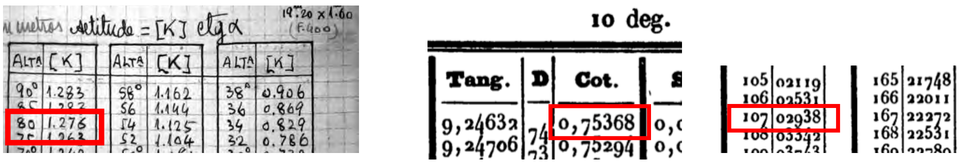
Observemos que e e P são valores fixos para uma determinada aeronave. No caso particular do biplano usado na travessia do Atlântico Sul temos que $e =$ 19,2 metros e $P =$ 1,6 metros. Logo, o valor da constante K é dado por

$$K = 19{,}2\sin^2(a_s) + 1{,}6\cos(a_s)\sin(a_s)$$

ou seja, o seu valor depende apenas de a_s, ou seja, da altura do Sol. Gago Coutinho constrói uma tabela com os valores de $\log K$ para valores de a_s a variar entre 20° e 90°. Todos os logaritmos considerados são logaritmos de base 10. (Figura 2(a))

Na prática, para determinar a altitude da aeronave durante o voo era apenas necessário medir, com um sextante, o ângulo da sombra das asas do biplano na superfície do mar. Suponhamos que o ângulo medido é de 10° e que a altura do Sol no instante da medição é de 80°. Consultando a tabela da Figura 2(a) para 80° obtém-se $\log K = 1{,}276$. De seguida Gago Coutinho consultaria a *Table de Logarithmes*, de J. Hoüel [3] para determinar o valor de log(cot(angulo da sombra)). Neste caso particular $\log(\cot(10°)) = 0{,}75368$ (Figura 2(b)).

Pela equação (1) tem-se $\log \text{Altitude} = \log K + \log(\cot(10°)) = 2{,}029$, ou seja, $\text{Altitude} = 10^{2{,}029}$. Para terminar o processo bastaria determinar o valor de $10^{2{,}029}$, ou seja, procurava-se nas tábuas de logaritmos o valor entre 100 e 1000, neste caso mais próximo de 100, que melhor aproximaria 029. O valor em causa seria 107 (Figura 2(c)), concluíndo-se que a altitude da aeronave seria de 107 metros.



(a) (b) (c)

Figura 2: (a) Extracto da tabela com os valores de $\log K$ (fonte: [4] p. 312). (b) Valor de $\log(\cot(10°))$. (c) Valor de $10^{2{,}029}$ (fonte: [3], p. 51, p. 2).

Agradecimentos: Teresa Sousa foi parcialmente financiada por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., no âmbito do projeto UIDB/00297/2020 (Centro de Matemática e Aplicações).

Referências

[1] S. Cabral e G. Coutinho, "A Navegação Aérea", *Anais do Clube Militar Naval*, Vol. 10–12 (1922), pp. 301–422.

[2] A. C. Canas, M. R. Marabujo e T. Sousa, "Coutinho's Method for the Altitude", *The Journal of Navigation*.

[3] J. Hoüel, *Tables de Logarithmes a Cinq Décimales pour Les Nombres et les Lignes Trigonométriques*. Gauthier-Villars, Paris, 1987.

[4] J. M. Pereira, "Os Céus de Gago Coutinho e Sacadura Cabral", *Memórias 2012, Academia de Marinha*, Lisboa, Vol. 42 (2015), pp. 263–321.