

## ARITMÉTICA DAS LEIS DE PROBABILIDADE

*Maria de Fátima Brilhante*

Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade dos Açores  
CEA/UL — Centro de Estatística e Aplicações, Universidade de Lisboa  
*Campus* de Ponta Delgada, Rua da Mãe de Deus  
9500-321 Ponta Delgada, Portugal  
e-mail: maria.fa.brilhante@uac.pt

*Maria Ivette Gomes*

DEIO, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa  
CEA/UL — Centro de Estatística e Aplicações, Universidade de Lisboa  
Academia das Ciências de Lisboa  
Instituto de Investigação Científica Bento da Rocha Cabral  
FCUL, Bloco C6, Piso 4, Campo Grande  
1749-016 Lisboa, Portugal  
e-mail: migomes@fc.ul.pt

*Sandra Mendonça*

DM-FCEE, Universidade da Madeira  
CEA/UL — Centro de Estatística e Aplicações, Universidade de Lisboa  
*Campus* Universitário da Penteada, Universidade da Madeira  
9020-105 Funchal - Portugal  
e-mail: sandram@staff.uma.pt

*Dinis Pestana*

DEIO, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa  
CEA/UL — Centro de Estatística e Aplicações, Universidade de Lisboa  
Instituto de Investigação Científica Bento da Rocha Cabral  
FCUL, Bloco C6, Piso 4, Campo Grande  
1749-016 Lisboa, Portugal  
e-mail: ddpestana@fc.ul.pt

**Resumo:** Um pouco de álgebra de variáveis aleatórias, um tudo-nada de aritmética das leis de probabilidade, uma mão-cheia de indicações sobre transformadas integrais, umas notas (quase mais moedinhas do que notas, como *Uma Mão Cheia de Nada e Outra de Coisa Nenhuma* da Irene Lisboa) sobre história da Probabilidade, e relações entre variáveis estáveis positivas e variáveis Gama. Como  $\mathcal{L}_X(1/s)$ , onde  $\mathcal{L}_X$  é a transformada de Laplace de uma variável aleatória positiva  $X$ , é uma função de distribuição, as variáveis aleatórias estáveis positivas  $Y_\alpha$  com expoente característico  $\alpha \in (0, 1)$  estão

relacionadas de forma simples com a variável aleatória exponencial  $Z$  padrão. Obtém-se assim uma decomposição multiplicativa de  $Y_{1/n}^{-1}$  em termos de variáveis aleatórias  $Gama(k/n, n)$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ . Da relação entre as funções densidade de probabilidade de  $X$  e de  $1/X$ ,  $f_{1/X}(x) = f_X(1/x)/x^2$ , e observando que  $X \sim Gama(1/2, 2) \sim \chi_1^2$ , obtém-se a expressão da função densidade de probabilidade da variável aleatória de Lévy, a estável positiva com expoente característico  $1/2$ .

**Abstract:** Using the fact that  $\mathcal{L}_X(1/s)$ , where  $\mathcal{L}_X$  is the Laplace transform of a positive random variable  $X$ , is a distribution function, positive stable random variables  $Y_\alpha$  with characteristic exponent  $\alpha \in (0, 1)$  and the standard Exponential random variable  $Z$  are closely related. As a consequence, a multiplicative decomposition of  $Y_{1/n}^{-1}$  in terms of  $Gamma(k/n, n)$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ , is obtained. From the simple expression  $f_{1/X}(x) = f_X(1/x)/x^2$ , and observing that  $X \sim Gamma(1/2, 2) \sim \chi_1^2$ , the probability density function of the Lévy random variable (positive stable with characteristic exponent  $1/2$ ), is easily obtained.

**Palavras-chave:** álgebra de variáveis aleatórias; estabilidade; aritmética das leis de probabilidade; transformadas integrais

**Keywords:** algebra of random variables; stability; arithmetic of probability laws; integral transforms

## 1 Introdução

No que se convencionou chamar *Aritmética das Leis de Probabilidade*, investigando a decomposição, por vezes referida como "fatorização", em somas de variáveis aleatórias independentes:

- há variáveis aleatórias que são indecomponíveis, no sentido em que não podem ser decompostas na soma de duas variáveis aleatórias independentes não degeneradas (exemplo:  $X \sim Bernoulli(p)$ ,  $p \in (0, 1)$ );
- há variáveis infinitamente divisíveis no sentido em que podem ser decompostas em tantas parcelas independentes e identicamente distribuídas quantas se quiser (exemplo:  $X \sim Gama(\alpha, \delta)$ ,  $\alpha, \delta > 0$ );
- e destas há um subconjunto  $\mathcal{I}_0$  das que só têm fatores infinitamente divisíveis (por exemplo,  $X \sim Poisson(\mu)$ ,  $\mu > 0$ , e  $Y \sim Gaussiana(\mu, \sigma)$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$ ).

Qualquer distribuição infinitamente divisível pode ser representada como composição de um conjunto finito ou numerável de distribuições de  $\mathcal{I}_0$ , *i.e.*  $\mathcal{I}_0$  é denso na classe de distribuições infinitamente divisíveis na topologia da convergência fraca (Lukacs, 1970).

Como as somas de variáveis aleatórias  $X_k$  podem ser tratadas com a convolução das suas distribuições, ou com o produto das correspondentes funções características  $\varphi_{X_k}(t) = \mathbb{E}[e^{itX_k}]$ ,  $t \in \mathbb{R}$  (ou produto das correspondentes transformadas de Laplace  $\mathcal{L}_{X_k}(t) = \mathbb{E}[e^{-tX_k}]$ , se  $X_k \geq 0$ ), há bastante maleabilidade ao exprimir resultados em termos do semigrupo aditivo de variáveis aleatórias, ou do semigrupo de convoluções de medidas de probabilidade/distribuições, ou ainda do semigrupo multiplicativo de funções características, e daí o uso do termo "fatorização".

Qualquer variável aleatória  $X$  admite decomposição (em geral não única) do tipo  $X = Y + W$ , com  $Y$  e  $W$  independentes, e em que  $Y$  é da classe  $\mathcal{I}_0$  e  $W$  é degenerada ou é a soma finita ou numerável de variáveis aleatórias indecomponíveis independentes. Esta decomposição, que tem alguma reminiscência da fatorização dos inteiros em números primos, originou a expressão "aritmética das leis de probabilidade".

Na Secção 2 indicamos alguns factos sobre a função Gama de Euler — nomeadamente a fórmula da multiplicação de Gauss, que usaremos na Secção 5 — e sobre variáveis aleatórias Gama.

Na Secção 3 indicamos a utilidade de transformadas integrais (função característica, transformada de Laplace, transformada de Mellin) para estudar somas ou produtos de variáveis aleatórias independentes.

Na Secção 4 estabelecemos que  $e^{-t^\alpha}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , é completamente monótona, e consequentemente a transformada de Laplace de uma variável aleatória  $Y_\alpha \geq 0$ , que demonstramos ser estável para somas, no sentido em que se  $Y_{\alpha,1}, \dots, Y_{\alpha,n}$  forem réplicas independentes de  $Y_\alpha$ , então

$$\frac{Y_{\alpha,1} + \dots + Y_{\alpha,n}}{n^{1/\alpha}} \stackrel{d}{=} Y_\alpha, \quad n = 2, 3, \dots$$

Abordamos ainda, muito sucintamente, os conceitos de divisibilidade infinita e de autodecomponibilidade. Uma exposição complementar consta da secção 20 de Kendall (1973, pp. 21–24).

À semelhança do que se passa com somas, há uma aritmética multiplicativa de leis de probabilidade. Na Secção 5, a partir de um resultado geral sobre a transformada de Laplace  $\mathcal{L}_X$  de uma variável aleatória  $X \geq 0$ , mais concretamente,  $\mathcal{L}_X(1/s) = F_{X/Z}(s)$ ,  $Z \sim \text{Exponencial}(1)$ , com  $X$  e  $Z$  independentes, demonstramos alguns resultados da aritmética multiplicativa envolvendo variáveis estáveis (para somas) positivas e variáveis ale-

atórias Gama. No Corolário 1.1, aquele resultado dá de forma imediata a função de distribuição de  $X_r/Z$ , com  $Z$  e  $X_r \sim \text{Gama}(r, 1)$  independentes, e com a consequência inesperada de, no caso  $r \in \mathbb{N}$ ,  $X_r/Z$  ser o máximo de  $r$  variáveis aleatórias independentes e idênticas a  $X_1/Z$ . O Corolário 1.2 é consequência imediata de  $\mathcal{L}_{Y_\alpha}(1/s)$  ser a função de distribuição de  $W_\alpha \stackrel{d}{=} Y_\alpha/Z \sim \text{Fréchet}(\alpha)$ , onde  $0 \leq Y_\alpha \sim \text{Estável}(\alpha)$  e  $Z \sim \text{Exponencial}(\delta)$  são independentes, e consequentemente  $W_\alpha \stackrel{d}{=} Z^{1/\alpha}$ . O Corolário 1.3 está implícito em Shanbhag *et al.* (1977, p. 291), e o Corolário 1.4 é de Williams (1977), mas as demonstrações são novas. Na demonstração que apresentamos do Corolário 1.3, a autodecomponibilidade de  $\ln Z$  com  $Z \sim \text{Exponencial}(\delta)$  e a divisibilidade infinita de  $\ln Y_\alpha$  são estabelecidas usando apenas o conceito de autodecomponibilidade, e o facto de  $W_\alpha = Y_\alpha/Z \sim \text{Fréchet}(\alpha)$ , para qualquer  $\alpha \in (0, 1)$ . No que se refere ao Corolário 1.4, o uso de transformadas de Mellin evita o recurso ao critério de Carleman sobre momentos e unicidade, e usando o facto de  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\Gamma(nz)}{\Gamma(z)} = \frac{1}{n}$  (Prabhu, 2010), suplementamos um passo obscuro na demonstração de Williams (1977). Além disso, os parâmetros dos fatores gama ficam claramente identificados, evidenciando que o inverso da variável aleatória de Lévy, a variável aleatória estável com expoente característico  $\alpha = 1/2$  e suporte  $[0, \infty)$ , é o dobro de uma variável aleatória qui-quadrado com 1 grau de liberdade.

Na Secção 6 referimos muito sucintamente os trabalhos pioneiros da aritmética das leis de Probabilidade.

## 2 Função Gama de Euler e Variáveis Aleatórias Gama

A função Gama, ou integral de Euler de segunda espécie,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \alpha > 0,$$

verifica a expressão recursiva  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$ . Do facto de  $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$  conclui-se que  $\Gamma(n + 1) = n!$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Também se obtém facilmente  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ , e  $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!} \sqrt{\pi}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Adiante iremos usar a fórmula de multiplicação de Gauss (Abramowitz and Stegun, 1972, p. 256, 6.1.20)

$$\Gamma(nz) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} n^{nz-\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma(z + \frac{k}{n}) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} n^{nz-\frac{1}{2}} \Gamma(z) \prod_{k=1}^{n-1} \Gamma(z + \frac{k}{n}). \quad (1)$$

Como  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\Gamma(nz)}{\Gamma(z)} = \frac{1}{n}$  (Prabhu, 2010), tomando o limite quando  $z \rightarrow 0$ ,

$$\frac{1}{n} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\Gamma(nz)}{\Gamma(z)} = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} n^{-\frac{1}{2}} \prod_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right) \Leftrightarrow (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}} = \prod_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right). \quad (2)$$

Para mais informação sobre a função Gama consulte-se Whittaker and Watson (2013, Cap. XII), Erdélyi *et al.* (1953, Cap. 1) e Abramowitz and Stegun (1972, Cap. 6).

Como  $0 < \Gamma(\alpha) < \infty$ , qualquer que seja  $\alpha > 0$ ,

$$f_{Z_\alpha}(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{I}_{[0, \infty)}(x)$$

é uma função densidade de probabilidade, e dizemos que  $Z_\alpha \sim \text{Gama}(\alpha, 1)$ .

Mais geralmente, podemos considerar  $Z_{\alpha, \delta, \lambda} \sim \text{Gama}(\alpha, \delta, \lambda)$ , onde  $Z_{\alpha, \delta, \lambda} = \lambda + \delta Z_\alpha$ , com parâmetros de localização  $\lambda \in \mathbb{R}$  e de dispersão  $\delta > 0$ , além do parâmetro de forma  $\alpha$ , com função densidade de probabilidade

$$f_{Z_{\alpha, \delta, \lambda}}(x) = \frac{(x - \lambda)^{\alpha-1} e^{-(x-\lambda)/\delta}}{\delta^\alpha \Gamma(\alpha)} \mathbb{I}_{[\lambda, \infty)}(x).$$

No caso de  $\lambda = 0$  omitimos esse parâmetro. Com essa notação simplificada,  $Z_{1, \delta} \sim \text{Exponencial}(\delta)$  e  $Z_{\frac{n}{2}, 2} \sim \chi_n^2$ .<sup>(1)</sup> Observe-se ainda que se  $Z \sim \text{Exponencial}(1)$ ,  $2Z \sim \chi_2^2$ .

<sup>(1)</sup> Quando K. Pearson (1900) inventou o teste do qui-quadrado ainda era habitual usar o símbolo  $\chi$  para representar a variável aleatória Gaussiana padrão, e por isso Pearson denotou  $\chi^2$  o seu quadrado, cuja densidade de probabilidade deduziu:

$$f_{\chi^2}(x) = f_\chi(\sqrt{x})(\sqrt{x})' - f_\chi(-\sqrt{x})(-\sqrt{x})' = \frac{x^{-1/2} e^{-x/2}}{2^{1/2} \Gamma(1/2)} \mathbb{I}_{[0, \infty)}(x),$$

e portanto  $\chi^2 \sim \text{Gama}\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ . Ainda com esta notação  $\chi$  para a variável Gaussiana padrão — se  $\chi_1, \dots, \chi_n$  forem independentes,  $\chi_1^2 + \dots + \chi_n^2 \sim \text{Gama}\left(\frac{n}{2}, 2\right)$ , e passou a ser designada qui-quadrado com  $n$  graus de liberdade (há  $n$  fontes de variação para o resultado da soma) e denotada  $\chi_n^2$ . Um pouco mais elaborado ainda, se houver  $\ell$  ligações entre as variáveis  $\chi_1, \dots, \chi_n$ , há efetivamente  $\nu = n - \ell$  fontes de variação independentes, e  $\chi_1^2 + \dots + \chi_n^2 \sim \chi_\nu^2$ . Em louvor de Karl Pearson (que inteiramente merece ser louvado, pela inteligência, criatividade e bom carácter, e que impulsionou a carreira de tantos jovens cientistas) veja-se por exemplo Cox (2002) ou Voinov *et al.* (2013), em cujo Prefácio se afirma [...] "several model validation techniques and goodness of fit tests have been developed over the years. The oldest and perhaps the most commonly used one among these is the chi-squared goodness of fit test proposed by Karl Pearson over a century ago".

### 3 Transformadas Integrais na Investigação de Somas e de Produtos de Variáveis Aleatórias Independentes

A álgebra das variáveis aleatórias tradicionalmente ocupa-se de operações envolvendo variáveis aleatórias independentes, salvo se explicitamente for indicado o contrário. A operação mais estudada é a soma.

Mas a função de distribuição da soma de  $X$  e  $Y$  independentes, e absolutamente contínuas, é

$$\begin{aligned} F_{X+Y}(z) &= \mathbb{P}[X \leq z - Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}[X \leq z - y] f_Y(y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(z - y) f_Y(y) dy, \end{aligned}$$

sendo a função densidade de probabilidade desta soma a convolução

$$f_{X+Y}(z) = (f_X * f_Y)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y) f_Y(y) dy$$

das suas funções densidade, frequentemente difícil de calcular. Uma ideia expedita e muitas vezes frutífera é trabalhar com valores esperados parametrizados, mais geralmente referidos como transformadas integrais.

Se a variável  $X \geq 0$ , é tentador usar a transformada de Laplace

$$\mathcal{L}_X(t) = \mathbb{E}[e^{-tX}] = \int_0^{\infty} e^{-tx} dF_X(x),$$

que existe para  $\Re(t) \geq -a$ ,  $a > 0$ . Se  $X \geq 0$  e  $Y \geq 0$  forem independentes, o valor esperado do produto é o produto dos valores esperados, e portanto

$$\mathcal{L}_{X+Y}(t) = \mathbb{E}[e^{-t(X+Y)}] = \mathbb{E}[e^{-tX} e^{-tY}] = \mathbb{E}[e^{-tX}] \mathbb{E}[e^{-tY}] = \mathcal{L}_X(t) \mathcal{L}_Y(t),$$

muito mais simples em geral do que calcular o integral de convolução das densidades. Isto é o que costuma dizer-se, escamoteando que dois passos podem não ser nada simples — calcular as transformadas de Laplace, e depois identificar a variável aleatória que tem esse produto como respetiva transformada de Laplace, o que pode envolver uma inversão complicada. Mas em algumas situações importantes a questão é mesmo simples.

Por exemplo, se  $X \sim \text{Gama}(\alpha, \delta)$ , a transformada de Laplace é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(t) &= \int_0^{\infty} e^{-tx} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\delta}}{\delta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} dx = \frac{1}{\delta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x(t+1/\delta)} dx = \\ &= \left( \frac{1}{1 + \delta t} \right)^{\alpha}, \quad t > -\frac{1}{\delta}. \end{aligned}$$

Consequentemente, se  $X \sim \text{Gama}(\alpha, \delta)$  e  $Y \sim \text{Gama}(\beta, \delta)$ , independentes,

$$\mathcal{L}_{X+Y}(t) = \left( \frac{1}{1+\delta t} \right)^\alpha \left( \frac{1}{1+\delta t} \right)^\beta = \left( \frac{1}{1+\delta t} \right)^{\alpha+\beta},$$

que é a transformada de Laplace de uma  $\text{Gama}(\alpha + \beta, \delta)$ , concluindo-se assim que  $X + Y \sim \text{Gama}(\alpha + \beta, \delta)$ .

No caso geral, com qualquer suporte, o instrumento adequado para investigar somas de variáveis aleatórias independentes é a função característica,  $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$  (note-se que existe para todo  $t \in \mathbb{R}$ , pois  $|\varphi_X(t)| \leq \mathbb{E}[|e^{itX}|] = \mathbb{E}[1] = 1$ ). Mais uma vez a facilidade decorre de  $\varphi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}[e^{it(X+Y)}] = \mathbb{E}[e^{itX}] \mathbb{E}[e^{itY}] = \varphi_X(t) \varphi_Y(t)$  se  $X$  e  $Y$  forem independentes. A função característica de  $X \sim \text{Gaussiana}(0, 1)$  é  $\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$  — e ser proporcional à correspondente função densidade de probabilidade facilita muitos argumentos (Pestana *et al.*, 2001) —, e a função característica de  $Y \sim \text{Cauchy}(0, 1)$  é  $\varphi_Y(t) = e^{-|t|}$ .<sup>(2)</sup>

Também no que respeita ao produto  $W = XY$  de variáveis  $X \geq 0$  e  $Y \geq 0$  independentes, cuja função densidade de probabilidade, se forem absolutamente contínuas, é

$$f_W(w) = \int_0^\infty f_X\left(\frac{w}{y}\right) f_Y(y) \frac{dy}{y},$$

o uso da transformada integral de Mellin,

$$\mathcal{M}_W(s) = \mathbb{E}[W^s] = \int_0^\infty w^s dF_W(w),$$

---

<sup>(2)</sup> No caso da variável Gaussiana padrão, como  $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$ , o truque é arranjar um quadrado no argumento da função exponencial:

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^\infty e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-(x-it)^2/2} dx = e^{-t^2/2}.$$

A forma "elementar" de obter a função característica da variável de Cauchy padrão sem ter que usar cálculo de resíduos é um pouco sinuosa. A função característica de  $Z \sim \text{Exponencial}(1)$  é  $\varphi_Z(t) = \int_0^\infty e^{itx} e^{-x} dx = \frac{1}{1-it}$ . Assim, se  $Z_1 \stackrel{d}{=} Z_2 \sim \text{Exponencial}(1)$ , a variável aleatória  $Z_1 - Z_2 \sim \text{Laplace}(1)$  tem função densidade de probabilidade  $f_{Z_1-Z_2}(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x)$  e função característica  $\varphi_{Z_1-Z_2}(t) = \frac{1}{1-it} \frac{1}{1+it} = \frac{1}{1+t^2}$ . A fórmula para inversão da função característica — lá se vai o "elementar" à vida —, um dos resultados que se pode estabelecer facilmente usando a relação de Parseval, no caso de a função característica ser absolutamente integrável é  $f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-itx} \varphi_X(t) dt$ , e portanto a função característica de  $Y \sim \text{Cauchy}(0, 1)$  é  $\varphi_Y(t) = e^{-|t|}$ .

que converge numa banda vertical contendo o eixo imaginário (eventualmente degenerando nesse eixo) pode ser mais simples. A transformada de Mellin de  $X \sim \text{Gama}(\alpha, \delta)$  é

$$\mathcal{M}_X(s) = \int_0^\infty x^s \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\delta}}{\delta^\alpha \Gamma(\alpha)} dx = \frac{\delta^s \Gamma(\alpha + s)}{\Gamma(\alpha)}. \quad (3)$$

Um exemplo do uso de transformadas de Mellin no estudo de produtos de variáveis aleatórias independentes é o seguinte: se  $U \sim \text{Uniforme}(0, 1)$ , a sua transformada de Mellin é

$$\mathcal{M}_U(s) = \int_0^1 x^s dx = \frac{1}{1+s},$$

$s > -1$ . Então, como

$$\int_0^1 x^s \frac{(-\ln x)^{n-1}}{(n-1)!} dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-t(1+s)} t^{n-1} dt = \left( \frac{1}{1+s} \right)^n,$$

conclui-se que  $f_W(x) = \frac{(-\ln x)^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{I}_{(0,1)}(x)$  é a função densidade de probabilidade de  $W = \prod_{k=1}^n U_k$  com  $U_k \sim \text{Uniforme}(0, 1)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , independentes.

#### 4 Variável Exponencial Padrão e Transformadas de Laplace, com um Cheirinho de Aritmética das Probabilidades: Variáveis Estáveis, Autodecomponíveis e Infinitamente Divisíveis

A distribuição Exponencial padrão associa-a de forma muito evidente a transformadas de Laplace de variáveis aleatórias  $Y \geq 0$ :

Se  $X \sim \text{Exponencial}(1)$  e  $Y \geq 0$ ,

$$\mathbb{P} \left[ \frac{X}{Y} > t \right] = \int_0^\infty e^{-ty} dF_Y(y) = \mathcal{L}_Y(t),$$

ou seja, a transformada de Laplace de  $Y$ .

Observe-se que  $\mathcal{L}_X$  é a transformada de Laplace de uma função de distribuição  $F_X$  honesta se, e só se, for completamente monótona — isto é,  $(-1)^n \mathcal{L}_X^{(n)}(t) \geq 0$  — e  $\mathcal{L}_X(0) = 1$  (Feller, 1971, p. 439). Exemplos de funções completamente monótonas são  $e^{-t}$  e a derivada  $\psi'(t) = \alpha t^{\alpha-1}$  de  $\psi(t) = t^\alpha$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , pois as derivadas  $\psi^{(n)}(t) = \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) t^{\alpha-n}$  de  $\psi(t) = t^\alpha$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , são alternadamente positivas e negativas.

Assim, usando o Critério 2 de Feller (1971, p. 441), conclui-se que a função composta  $\mathcal{L}_{Y_\alpha}(t) = e^{-\psi(t)} = e^{-t^\alpha}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , é a transformada de Laplace de uma variável aleatória  $Y_\alpha \geq 0$ .

Observe-se que se  $Y_{\alpha,1}, \dots, Y_{\alpha,n}$  forem réplicas independentes de  $Y_\alpha$ ,  $\frac{Y_{\alpha,1} + \dots + Y_{\alpha,n}}{n^{1/\alpha}} \stackrel{d}{=} Y_\alpha$ , pois

$$\mathcal{L}_{\frac{Y_{\alpha,1} + \dots + Y_{\alpha,n}}{n^{1/\alpha}}}(t) = \left[ \exp \left( - \left( \frac{t}{n^{1/\alpha}} \right)^\alpha \right) \right]^n = e^{-t^\alpha} = \mathcal{L}_{Y_\alpha}(t).$$

Por outras palavras, são variáveis aleatórias estáveis para somas, e usamos a notação  $Y_\alpha \curvearrowright Estável(\alpha)$ .<sup>(3)</sup>

As variáveis aleatórias estáveis são as únicas que podem ser limites de somas de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, convenientemente escaladas por  $n^{1/\alpha}L(n)$ ,  $\alpha \in (0, 2]$ , onde  $L$  é uma função de variação lenta no sentido de Karamata (1930), isto é  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1$ . Sendo a média de variáveis independentes e identicamente distribuídas  $\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$  tão usada, o conceito de estabilidade, que manteria o modelo, parece muito apelativo, mas ... as variáveis estáveis com índice  $\alpha < 2$  não têm variância, e as com  $\alpha < 1$  não têm valor médio, e o pior é que apenas se conhecem com forma analítica decente as funções densidade das variáveis aleatórias Gaussianas ( $\alpha = 2$ ), de Cauchy ( $\alpha = 1$ ) e de Lévy  $Y_{1/2} \geq 0$  ( $\alpha = 1/2$ ).

As variáveis aleatórias estáveis são um subconjunto das variáveis autodecomponíveis  $X$  (classe  $L$  de Khinchine), no sentido em que para qualquer  $c \in (0, 1)$  existe  $V_c$  tal que

$$X \stackrel{d}{=} cX + V_c, \quad (4)$$

com  $X$  e  $V_c$  independentes. As variáveis aleatórias autodecomponíveis são as únicas que podem ser limites de somas, convenientemente escaladas, de variáveis aleatórias independentes.

<sup>(3)</sup> As variáveis aleatórias Gaussianas e as variáveis aleatórias de Cauchy também são estáveis para somas. Se  $X_1, \dots, X_n$  forem réplicas independentes de  $X \curvearrowright Gaussiana(0, 1)$ ,

$$\varphi_{\frac{X_1 + \dots + X_n}{n^{1/2}}}(t) = \left( e^{-\frac{(t/\sqrt{n})^2}{2}} \right)^n = e^{-t^2/2} = \varphi_X(t),$$

o que mostra que  $X$  é estável com índice  $\alpha = 2$ . No que se refere à variável de Cauchy  $Y$  com localização 0 e dispersão 1, se  $Y_1, \dots, Y_n$  forem réplicas independentes de  $Y$ ,

$$\varphi_{\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}}(t) = \left( e^{-\left| \frac{t}{n} \right|} \right)^n = e^{-|t|} = \varphi_Y(t),$$

e portanto a variável de Cauchy é estável com expoente característico  $\alpha = 1$ .

Recorde-se ainda que as leis infinitamente divisíveis são as leis limites de somas de variáveis independentes em arranjos triangulares

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_{11} \\ Y_2 &= X_{21} + X_{22} \\ Y_3 &= X_{31} + X_{32} + X_{33} \\ &\vdots \\ Y_n &= X_{n1} + X_{n2} + \cdots + X_{nn} \end{aligned}$$

assintoticamente negligíveis,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq n} \mathbb{P}[X_{nk} > \varepsilon] = 0$ , para qualquer  $\varepsilon > 0$ , para que nenhuma das parcelas tenha um papel preponderante na soma.

Observe-se que

$$\{\text{estáveis}\} \subset \{\text{autodecomponíveis}\} \subset \{\text{infinitamente divisíveis}\}.$$

Anote-se ainda que na fatorização (4) a variável  $V_c$  é infinitamente divisível (Lukacs, 1970, p. 162).

## 5 Variáveis Exponenciais e Estáveis Positivas

Uma transformada de Laplace  $\mathcal{L}_X$  decresce de  $\mathcal{L}_X(0) = 1$  para  $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}_X(s) = 0$ . Consequentemente  $\mathcal{L}_X(\frac{1}{s})$  é uma função de distribuição, que identificamos no Teorema 1.

**Teorema 1.** *Denote-se  $\mathcal{L}_X$  a transformada de Laplace da variável aleatória  $X \geq 0$ ,  $X$  e  $Z \sim \text{Exponencial}(1)$  independentes, e  $W \geq 0$  com função de distribuição  $F_W(s) = \mathcal{L}_X(\frac{1}{s})$ . Então  $W \stackrel{d}{=} \frac{X}{Z}$ .*

*Demonstração.* A transformada de Mellin de  $W$  é

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_W(s) &= \mathbb{E}[W^s] = \int_0^\infty w^s d\mathcal{L}_X\left(\frac{1}{w}\right) = \int_0^\infty w^s \int_0^\infty e^{-s/w} \frac{s}{w^2} dF_X(x) dw = \\ &= \int_0^\infty t^s dF_X(t) \int_0^\infty e^{-w} w^{-s} dw = \mathcal{M}_X(s) \mathcal{M}_{\frac{1}{Z}}(s), \end{aligned}$$

e portanto  $W \stackrel{d}{=} \frac{X}{Z}$  com  $X$  e  $Z$  independentes.  $\square$

Por exemplo, a transformada de Laplace de  $U \sim \text{Uniforme}(0,1)$  é  $\mathcal{L}_U(s) = \int_0^1 e^{-sx} dx = \frac{1-e^{-s}}{s}$ , e portanto a função de distribuição de

$W = U/Z$  é  $F_{U/Z}(s) = \mathcal{L}_U\left(\frac{1}{s}\right) \mathbb{I}_{(0,\infty)}(s) = s(1 - e^{-1/s}) \mathbb{I}_{(0,\infty)}(s)$ , e a função densidade de probabilidade é  $f_{U/Z}(s) = \left(1 - e^{-1/s} - \frac{e^{-1/s}}{s}\right) \mathbb{I}_{(0,\infty)}(s)$ .

Se  $W_r = \frac{Z_r}{Z}$  com  $Z_r \sim \text{Gama}(r, 1)$  e  $Z \sim \text{Exponencial}(1)$ , independentes, como  $\mathcal{L}_{Z_r}(s) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\infty e^{-sx} x^{r-1} e^{-x} dx = \left(\frac{1}{1+s}\right)^r$ , tem-se que  $F_{W_r}(s) = \left(\frac{s}{1+s}\right)^r \mathbb{I}_{[0,\infty)}(s)$  e  $f_{W_r}(s) = \frac{r s^{r-1}}{(1+s)^{r+1}} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(s)$ .

No Corolário 1.1, usando a transformada de Laplace de  $Z_n \sim \text{Gama}(n, 1)$  estabelecemos que a soma de  $n$  variáveis aleatórias, cada uma das quais é o quociente entre duas variáveis exponenciais padrão independentes, tem a mesma distribuição que o máximo de  $n$  variáveis aleatórias independentes, cada uma das quais também é o quociente entre duas variáveis exponenciais padrão independentes. Claro que as parcelas daquela soma são dependentes.

**Corolário 1.1.** *Sejam  $Z_n \sim \text{Gama}(n, 1)$  e  $Z \sim \text{Exponencial}(1)$ , independentes. Então  $W_n = \frac{Z_n}{Z} \stackrel{d}{=} \max\{W_{1,1}, \dots, W_{1,n}\}$ .*

*Demonstração.*  $F_{W_n}(s) = \left(\frac{s}{1+s}\right)^n \mathbb{I}_{[0,\infty)}(s) = (F_{W_1}(s))^n$ , e portanto

$$\frac{Z_n}{Z} \stackrel{d}{=} \frac{Z_{1,1}}{Z} + \dots + \frac{Z_{1,n}}{Z} \stackrel{d}{=} \max\left\{\frac{Z_{1,1}^*}{Z_{1,2}^*}, \dots, \frac{Z_{1,2n-1}^*}{Z_{1,2n}^*}\right\},$$

com  $Z \stackrel{d}{=} Z_{1,1} \stackrel{d}{=} \dots \stackrel{d}{=} Z_{1,n} \stackrel{d}{=} Z_{1,1}^* \stackrel{d}{=} \dots \stackrel{d}{=} Z_{1,2n}^* \sim \text{Exponencial}(1)$ , independentes.  $\square$

A utilidade do Teorema 1 parece bastante limitada, porque a expressão analítica de  $\mathcal{L}_X$  é em geral complicada.

Por exemplo, se  $X = X_{p,q} \sim \text{Beta}(p, q)$ ,

$$\mathcal{L}_{X_{p,q}}(s) = \frac{1}{B(p, q)} \int_0^1 e^{-sx} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = M(p, p+q, -s),$$

onde  $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ ,  $p, q > 0$ , é a função Beta ou integral de Euler de primeira espécie,  $M(a, b, z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(a)_k}{(b)_k} \frac{z^k}{k!}$  é a função hipergeométrica confluyente, e  $(\alpha)_0 = 1$ ,  $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+k-1) = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}$  é o símbolo de Pochhammer (Abramowitz and Stegun, 1972).

Mesmo nas situações mais simples, por exemplo  $X_{n,1} \sim \text{Beta}(n, 1)$ ,  $\mathcal{L}_{X_{n,1}}(s) = M(n, n+1, -s) = ns^{-n} \gamma(n, s)$ , onde  $\gamma(\alpha, z) = \int_0^z x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ ,  $\alpha, z > 0$ , é a função gama incompleta inferior (Abramowitz and Stegun, 1972). Nem sequer vamos ousar escrever aqui as formas mais "simplificadas" das transformadas de Laplace de distribuições usuais como a Lognormal, a Pareto ou a Loglogística. Assim, quase diríamos que a utilidade

do Teorema 1 se limita ao cálculo da distribuição do quociente de Uniforme por Exponencial, independentes, ou de Gama por Exponencial, independentes, o que não é de grande utilidade porque, recorrendo a técnicas de cálculo mais comuns,  $f_{U/Z}(s) = \int_0^1 f_U(sy)f_Z(y)ydy = \int_0^{1/s} e^{-y}y dy$  e  $f_{Z_\alpha/Z} = \int_0^\infty \frac{(sy)^{\alpha-1}e^{-sy}}{\Gamma(\alpha)} e^{-y}y dy$  são fáceis de calcular.

Porém, quando o dividendo  $X = Y_\alpha \frown \text{Estável}(\alpha)$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , com suporte  $[0, \infty)$ , cuja função densidade de probabilidade, excetuando o caso  $\alpha = 1/2$ , só é conhecida como expansão em série

$$f_{Y_\alpha}(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sin(\alpha k \pi) \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{x^{\alpha k + 1}}$$

(Humbert, 1937; Bergström, 1952), o Corolário 1.2 permite demonstrar que  $\ln Y_\alpha$  é autodecomponível (Corolário 1.3), e quando  $\alpha = 1/n$  obter uma decomposição multiplicativa interessante (Corolário 1.4).

**Corolário 1.2.** *Sejam  $Y_\alpha > 0$  uma variável aleatória estável com expoente característico  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $Z \frown \text{Exponencial}(1)$ ,  $Z$  e  $Y_\alpha$  independentes. Então  $\frac{Y_\alpha}{Z} \stackrel{d}{=} W_\alpha \frown \text{Fréchet}(\alpha)$ , ou seja  $\frac{Y_\alpha}{Z} \stackrel{d}{=} Z^{-1/\alpha}$ .*

*Demonstração.*  $F_{W_\alpha}(s) = \mathcal{L}_{Y_\alpha}(1/s) = e^{-s^{-\alpha}} \mathbb{I}_{[0, \infty)}(s) = \Phi_\alpha(s)$ , onde  $\Phi_\alpha$  é a função de distribuição Fréchet com índice  $\alpha$ . Basta então observar que

$$F_{Z^{-1/\alpha}}(s) = \mathbb{P}[Z^{-1/\alpha} < s] = \mathbb{P}[Z > s^{-\alpha}] = e^{-s^{-\alpha}} \mathbb{I}_{[0, \infty)}(s) = \Phi_\alpha(s).$$

e portanto  $W_\alpha \stackrel{d}{=} Z^{-1/\alpha}$ . □

**Corolário 1.3.** *Se  $Y_\alpha > 0$  for uma variável aleatória estável com expoente característico  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $Z \frown \text{Exponencial}(1)$ ,  $Z$  e  $Y_\alpha$  independentes, então  $\ln Z$  é autodecomponível e  $\ln Y_\alpha$  é infinitamente divisível.*

*Demonstração.* De  $\frac{Y_\alpha}{Z} \stackrel{d}{=} Z^{-1/\alpha}$  obtém-se  $\ln Y_\alpha - \ln Z = -\frac{1}{\alpha} \ln Z$ . Como para todo o  $\alpha \in (0, 1)$  existe uma variável aleatória  $-\alpha \ln Y_\alpha$  tal que  $-\alpha \ln Y_\alpha + \alpha \ln Z = \ln Z$ ,  $\ln Z$  é autodecomponível e  $\ln Y_\alpha$  é infinitamente divisível. □

**Corolário 1.4.** *Se  $Y_{1/n} > 0$  for uma variável aleatória estável com expoente característico  $\frac{1}{n}$ ,  $n = 2, 3, \dots$ ,  $Z \frown \text{Exponencial}(1)$ , com  $Z$  e  $Y_{1/n}$  independentes, então  $Y_{1/n}^{-1} \stackrel{d}{=} nW_{1/n}W_{2/n} \cdots W_{(n-1)/n}$ , com  $W_{k/n} \frown \text{Gama}(k/n, n)$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ , independentes.*

*Demonstração.* Como  $Y_{1/n}^{-1} Z \stackrel{d}{=} Z^n$ , com  $0 \leq Y_{1/n} \curvearrowright Estável(1/n)$  e  $Z \curvearrowright Exponencial(1)$  independentes,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{Y_{1/n}^{-1}}(s) \mathcal{M}_Z(s) &= \mathcal{M}_{Z^n}(s) \implies \\ \mathcal{M}_{Y_{1/n}^{-1}}(s) &= \frac{\mathcal{M}_{Z^n}(s)}{\mathcal{M}_Z(s)} = \frac{\Gamma(1+ns)}{\Gamma(1+s)} = \frac{n\Gamma(ns)}{\Gamma(s)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Usando a fórmula de multiplicação de Gauss (1) e (2) obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{Y_{1/n}^{-1}}(s) &= \frac{n\Gamma(ns)}{\Gamma(s)} = \frac{(2\pi)^{(1-n)/2} n^{ns+1/2} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma(s + \frac{k}{n})}{\Gamma(s)} = \\ &= \frac{n^{ns} \prod_{k=1}^{n-1} \Gamma(s + \frac{k}{n})}{(2\pi)^{(n-1)/2} n^{-1/2}} = n^s \prod_{k=1}^{n-1} n^s \frac{\Gamma(s + \frac{k}{n})}{\Gamma(\frac{k}{n})}, \end{aligned}$$

onde  $n^s = \mathcal{M}_n(s)$ , a transformada de Mellin da variável aleatória degenerada em  $n$ , e da expressão (3) cada fator  $n^s \frac{\Gamma(s + \frac{k}{n})}{\Gamma(\frac{k}{n})}$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ , é a transformada de Mellin de  $W_{k/n} \curvearrowright Gama(k/n, n)$ .

Consequentemente,

$$\mathcal{M}_{Y_{1/n}^{-1}}(s) = \mathcal{M}_n(s) \prod_{k=1}^{n-1} \mathcal{M}_{W_{k/n}}(s) \implies Y_{1/n}^{-1} \stackrel{d}{=} nW_{1/n}W_{2/n} \cdots W_{(n-1)/n},$$

onde  $W_{k/n} \curvearrowright Gama(k/n, n)$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ , independentes.  $\square$

Note-se que no caso particular  $n = 2$  se tem  $W_{1/2} \curvearrowright \chi_1^2$ ; assim é fácil calcular a função densidade de probabilidade da variável aleatória de Lévy  $Y_{1/2} \curvearrowright Estável(1/2)$  (com escala  $c = 2$ ):

$$f_{Y_{1/2}}(y) = \frac{f_{Y_{1/2}^{-1}}(1/y)}{y^2} = \frac{f_{2W_{1/2}}(1/y)}{y^2} = \frac{e^{-1/(4y)}}{2\sqrt{\pi}y^3} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(y).$$

## 6 Algumas prioridades

Em 1917, Paul Lévy, que até então trabalhava em Mecânica, foi convidado a fazer palestras sobre o teorema limite central. Ao observar que a variável de Cauchy tinha um comportamento estável semelhante ao da Gaussiana,

explorou esse critério de estabilidade. A compilação dos resultados que obteve encontra-se em Lévy (1925). A partir de 1917 passou a investigar sobretudo na área de Probabilidade, e os seus resultados sobre o movimento Browniano tiveram uma influência decisiva na teoria dos Processos Estocásticos. Os seus trabalhos sobre processos com incrementos independentes levaram-no ao conceito de divisibilidade infinita, que interessou também o seu correspondente Khinchine, e independentemente um do outro deduziram representações das funções características de variáveis aleatórias infinitamente divisíveis, que podem depois ser afinadas para variáveis aleatórias autodecomponíveis e para variáveis aleatórias estáveis. Monografias descrevendo em detalhe todos os resultados clássicos (em estilos de escrita muito diferentes) são Lévy (1937) e Gnedenko and Kolmogorov (1954).

Mas os resultados pioneiros sobre divisibilidade infinita devem-se a Bruno de Finetti (1929a-d, 1930), que provou que as variáveis aleatórias infinitamente divisíveis são Poissons compostas (isto é, somas aleatórias  $\sum_{k=0}^N X_k$  com subordinadora  $N \sim \text{Poisson}(\mu)$  independente das variáveis aleatórias  $X_k$ , independentes e identicamente distribuídas) ou limites de Poissons compostas.

As variáveis  $X \sim \text{Poisson}(\mu)$ ,  $\mu > 0$  e  $Y \sim \text{Gaussiana}(\mu, \sigma)$  não só são membros de  $\mathcal{I}_0$ , como apenas têm fatores do mesmo tipo, isto é  $X \sim \text{Poisson}(\mu)$ ,  $\mu > 0$ , só admite fatores Poisson (teorema de Raikov (Raikov, 1938)) e  $Y \sim \text{Gaussiana}(\mu, \sigma)$  só admite fatores Gaussianos (teorema de Cramér (Cramér, 1936)), tal como a variável degenerada só pode ser decomposta como soma de variáveis degeneradas. Por isso, as funções características das variáveis degeneradas, das Poissons e das Gaussianas são o que chamamos pontos extremos do conjunto convexo das funções características infinitamente divisíveis (intuitivamente: retirando os pontos extremos de um conjunto convexo obtém-se um conjunto convexo). Choquet (1960) provou que, em condições muito gerais, qualquer ponto de um conjunto convexo  $\mathcal{C}$  cujo conjunto de pontos extremos  $\text{ext}(\mathcal{C})$  seja compacto pode ser representado como valor médio de uma medida de probabilidade suportada por  $\text{ext}(\mathcal{C})$ . Johansen (1966) usou estas considerações para estabelecer a representação de Lévy-Khinchine das funções características infinitamente divisíveis como representação integral de Choquet. Anote-se que este trabalho de Johansen (1966) complementa o anterior trabalho de Kendall (1963) obtendo uma representação integral de Choquet para as transformadas de Laplace de variáveis aleatórias infinitamente divisíveis positivas.

No que se refere a autodecomponibilidade e classe  $L$  de Khinchine, na expressão (4)  $X \stackrel{d}{=} cX + V_c$  a variável aleatória  $V_c$  é infinitamente divisível.

Urbanik (1972, 1973) renomeou  $L_0$  a classe das variáveis aleatórias infinitamente divisíveis e  $L_1$  a classe das autodecomponíveis de Khinchine,

$$X \in L_1 \iff \forall c \in (0, 1), \exists V_c \in L_0 : X \stackrel{d}{=} cX + V_c,$$

e definiu recursivamente classes  $L_r$ ,  $r = 2, 3, \dots$

$$X \in L_r \iff \forall c \in (0, 1), \exists V_c \in L_{r-1} : X \stackrel{d}{=} cX + V_c.$$

Obviamente  $L_{r+1} \subset L_r$ , e  $\{\text{estáveis}\} \subset L_\infty = \bigcap_{r=0}^{\infty} L_r$ .

## Referências

- [1] Abramowitz, M.; Stegun, I. A. (1972). *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 8th ed.; Dover: New York, USA.
- [2] Bergström, H. (1952). On some expansions of stable distribution functions. *Arkiv för Matematik*, **2**(4), 375–378. <https://doi.org/10.1007/BF02591503>
- [3] Choquet, G. (1960). Le theoreme de représentation intégrale dans les ensembles convexes compacts. *Ann. Inst. Fourier*, **10**, 333–344. <http://eudml.org/doc/73767>
- [4] Cox, D. R. (2002). Karl Pearson and the chi-squared test. In Huber-Carol, C.; Balakrishnan, N.; Nikulin, M. S.; Mesbah, M., Eds.; *Goodness-of-Fit Tests and Model Validity*, Birkhäuser, pp. 3–8. 10.1007/978-1-4612-0103-8\_1
- [5] Cramér, H. (1936). Über eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion. *Math. Z.*, **41**, 405–414. 10.1007/BF01180430
- [6] Erdélyi, A.; Magnus, W.; Oberhettinger, F.; Tricomi, F. G. (1953). *Higher Transcendental Functions*, vol. I; McGraw-Hill: New York, USA. <https://authors.library.caltech.edu/records/cnd32-h9x80>
- [7] de Finetti, B. (1929a). Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio. *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici*, Bologna del 3 al 10 de settembre di 1928, 179-190. <http://www.brunodefinetti.it/Opere/funzioneCaratteristica.pdf> <http://www.brunodefinetti.it/Opere/funzioniCaratteristiche.pdf>

- [8] de Finetti, B. (1929b). Sulle funzioni ad incremento aleatorio, *Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei*, (Ser VI) **10**, 163–168. <http://www.brunodefinetti.it/Opere/funzioniIncremento.pdf>
- [9] de Finetti, B. (1929c). Sulla possibilita di valori eccezionali per una legge di incrementi aleatori, *Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei*, (Ser VI) **10**, 325–329. <http://www.brunodefinetti.it/Opere/valoreEccezionale.pdf>
- [10] de Finetti, B. (1929d). Integrazione delle funzioni ad incremento aleatorio, *Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei*, (Ser VI) **10**, 548–553. <http://www.brunodefinetti.it/Opere/IncrementoAleatorio.pdf>
- [11] de Finetti, B. (1930). Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio. *Memorie della R. Accademia Nazionale dei Lincei*, **IV**(5) 86–133. <http://www.brunodefinetti.it/Opere/funzioneCaratteristica.pdf>
- [12] Feller W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. 2; Wiley: New York, USA.
- [13] Gnedenko, B. V.; Kolmogorov, A. N. (1954). *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*; Addison-Wesley: Cambridge, UK.
- [14] Humbert, P. (1937). Formules nouvelles pour le calcul symbolique. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **65**, 119–131. [https://scholar.google.pt/scholar?q=P.+HUMBERT,+Nouvelles+correspondances+symboliques&hl=pt-PT&as\\_sdt=0&as\\_vis=1&oi=scholar#](https://scholar.google.pt/scholar?q=P.+HUMBERT,+Nouvelles+correspondances+symboliques&hl=pt-PT&as_sdt=0&as_vis=1&oi=scholar#)
- [15] Johansen S. (1966). An application of extreme point methods to the representation of infinitely divisible distributions. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, **5**, 304–316. [doi.org/10.1007/BF00535361](https://doi.org/10.1007/BF00535361)
- [16] Johnson, N. L.; Kotz, S.; Balakrishnan, N. (1995). *Continuous Univariate Distributions*, vol. 2; Wiley: New York, USA.
- [17] Karamata, J. (1930). Sur un mode de croissance régulière des fonctions, *Mathematica (Cluj)*, **4**, 38–53. [http://www.numdam.org/article/BSMF\\_1933\\_\\_61\\_\\_55\\_0.pdf](http://www.numdam.org/article/BSMF_1933__61__55_0.pdf)

- [18] Kendall, D. G. (1963). Extreme-point methods in stochastic analysis. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, **1**, 295–300. <https://doi.org/10.1007/BF00532503>
- [19] Kendall, D. G. (1973). An introduction to Stochastic Analysis. In Kendall, D. G.; Harding, E. F., Eds.; *Stochastic Analysis*: Wiley, London, pp. 3–43.
- [20] Lévy, P (1925). *Calcul des Probabilités*; Gauthier-Villars: Paris, France.
- [21] Lévy, P (1937). *Théorie de l'Addition des Variables Aléatoires*; Gauthier-Villars: Paris, France.
- [22] Lukacs, E. (1970). *Characteristic Functions*; Griffin: London, U.K.
- [23] Pearson, K. (1900). On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling. *Philosophical Magazine*, Ser. 5, **50** (302), 157–175. doi:10.1080/14786440009463897
- [24] Pestana, D. D.; Sequeira, F.; Velosa, S. (2001). Parseval's relation and self-reciprocal characteristic functions. In Davison, A., Ferreira da Cunha, A., Fraga Alves, I; Pestana, D., Eds.; *Proceedings of the 23rd European Meeting of Statisticians, Funchal, 2001 Revista de Estatística/Statistical Review* (special issue), pp. 315–316. [https://www.ine.pt/xportal/xmain?xpid=INE&xpgid=ine\\_estudos&ESTUDOSest\\_boui=106358&ESTUDOSmodo=2](https://www.ine.pt/xportal/xmain?xpid=INE&xpgid=ine_estudos&ESTUDOSest_boui=106358&ESTUDOSmodo=2)
- [25] Prabhu, A. (2010). A property of the gamma function at its singularities, arXiv:1008.2220 [math.GM] <https://doi.org/10.48550/arXiv.1008.2220arXivpreprintarXiv:1008.222032010>
- [26] Raikov, D. A. (1938). On the decomposition of the Gaussian and Poisson laws. *Izvestija. Akad. Nauk. SSSR*, Ser. mat. **2**, 91–124. <https://www.mathnet.ru/links/ead0e290d7863b89f5dcc8babf784c5f/im3466.pdf>
- [27] Shanbhag, D. N.; Pestana, D.; Sreehari, M. (1977). Some further results in infinite divisibility. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **82**, 289–295. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0305004100053925>
- [28] Urbanik, K. (1972). Slowly varying sequences of random variables. *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.*, **20**, 679–682.

- [29] Urbanik, K. (1973). Limit laws for for sequences of normed sums satisfying some stability conditions, *Multivariate Analysis III* (P. R. Krishnaiah, ed.); Academic Press: New York, 225–237. <http://www.math.uni.wroc.pl/~zjjurek/urb-limitLawsOhio1973.pdf>
- [30] Voinov, V.; Nikilin, M.; Balakrishnan, N. (2013). *Chi-Squared Goodness of Fit Tests with Applications*; Elsevier: Amsterdam, Netherlands.
- [31] Whittaker, E. T.; Watson, G. N. (2013). *A Course of Modern Analysis*, 4th ed.; Cambridge University Press: Cambridge, UK.
- [32] Williams E. J. (1977). Some representations of stable random variables as products. *Biometrika*, **64**, 167–169. <https://doi.org/10.1093/biomet/64.1.167>

**Agradecimento:** Investigação parcialmente financiada pela FCT — Fundação para a Ciência e Tecnologia, através do projeto <https://doi.org/10.54499/UIDB/00006/2020> (CEA/UL).