Leonid Pavlovich Shilnikov: à memória de um atractor global

Alexandre A. P. Rodrigues[1]
Centro de Matemática da Universidade do Porto
e Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Rua do Campo Alegre 687, 4169–007 Porto, Portugal
e-mail: `alexandre.rodrigues@fc.up.pt`

Resumo: Em 26 de Dezembro de 2011, dobraram os sinos pela perda do matemático russo L. P. Shilnikov. De uma forma unânime à escala mundial, o seu trabalho tornou-se um clássico e uma referência obrigatória em qualquer manual da teoria de bifurcações, influenciando decisivamente o desenvolvimento da teoria qualitativa das equações diferenciais. A elegância dos seus resultados e o rigor das suas demonstrações constituíram um dos motivos para a sua popularidade entre investigadores de todas as áreas. O método rigoroso do seu trabalho científico como investigador e professor na Universidade de Gorky, contrasta com o modo descontraído como encarou a sua vida. Este artigo pretende, de uma forma sumária e concisa, contextualizar alguns dos trabalhos científicos mais populares de Shilnikov, bem como relatar algumas etapas determinantes na sua carreira profissional.

Abstract On the 26^{th} of December of 2011, bells tolled for the loss of the russian mathematician L. P. Shilnikov. His work became a classic in the literature, unanimously and worldwide acclaimed. He is a compulsory reference in any book on bifurcation theory, with a large influence on the development of the qualitative theory of differential equations. The elegance of his results and the accurancy of his proofs constituted one of the reasons of his popularity across the world. The rigorous method of his scientific work as a researcher and as a teacher at Gorky University contrasts with the relaxed way he faced life. This paper aims, in a brief and concise manner, to describe some of the most popular works of Shilnikov. Moreover, we aim to report some decisive steps in his professional career.

palavras-chave: Shilnikov, Escola de Andronov, Ciclo homoclínico; Sela-foco, Bifurcação

keywords: Shilnikov, Andronov School, Homoclinic cycle, Saddle-focus, Bifurcation

[1]Alexandre A. P. Rodrigues teve o apoio do Centro de Matemática da Universidade do Porto, o qual é financiado por Fundos FEDER, através do Programa Operacional Factores de Competitividade COMPETE e por Fundos Nacionais através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT), no âmbito do projecto PEst-C/MAT/UI0144/2011. O autor do trabalho foi também apoiado financeiramente pela FCT através das bolsas com as referências SFRH/BD/28936/2006 e SFRH/BPD/84709/2012.

L. P. Shilnikov no Luxemburgo (2007).
Cortesia de Andrey Shilnikov.

1 Introdução

Quando, num curso de sistemas dinâmicos, se estudam atractores de Lorenz e ferraduras de Smale, somos levados às publicações de Edward Lorenz e Steven Smale, na década de 60, não sendo clara (na altura) a relação entre estes dois conceitos para os investigadores de então. No entanto, enquanto estes dois cientistas faziam avanços internacionalmente reconhecidos nas suas pesquisas no âmbito de sistemas caóticos, um jovem matemático russo, desconhecido no ocidente, fazia descobertas notáveis e providenciava uma ligação entre as ferraduras de Smale e os atractores de Lorenz. Este jovem trabalhava numa cidade industrial isolada da URSS, em que as autoridades não permitiam nem a entrada nem a saída de cidadãos. Este talento é Leonid Pavlovich Shilnikov, reconhecido como um dos pioneiros no estudo de teoria de bifurcação de ciclos homoclínicos em sistemas dinâmicos contínuos não lineares em dimensão superior a dois.

Tendo o autor do presente texto estudado com detalhe os trabalhos de Shilnikov e dos seus discípulos mais próximos, no âmbito do seu trabalho de doutoramento [40], entendeu que seria profícuo aclarar, de uma forma concisa, o trabalho científico deste matemático o qual, segundo muitos investigadores, é de difícil leitura. É sobre o seu contributo na História da Matemática, que transformou Shilnikov num clássico da literatura relativa a equações diferenciais, que se dedica este artigo. Descrevendo e contextualizando alguns dos trabalhos científicos mais populares de Shilnikov, subli-

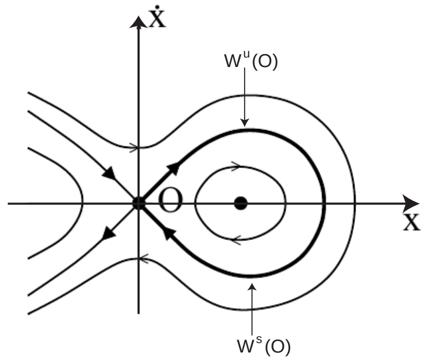


Figura 1: Diagrama de fase de um sistema conservativo, onde é visível um ciclo homoclínico associado ao ponto O. As variedades invariantes associadas a O, $W^s(O)$ e $W^u(O)$, coincidem.

nharemos como a sua morte constitui uma perda significativa para a Matemática.

Todas as informações presentes neste texto têm origem em dados cedidos gentilmente por Andrey Shilnikov, filho de L. P. Shilnikov, e nos artigos de Champneys [16] e Afraimovich *et al* [3]. As notas que reportam a resultados matemáticos são direccionadas para os artigos que os autores de [52, 53] consideram ser os originais, salvo alguns casos devidamente referenciados. No decorrer da exposição, omitir-se-ão os detalhes das provas, apelando-se para uma visualização geométrica das demonstrações. Para o leitor menos familiarizado com o tema, bifurcações de sistemas dinâmicos contínuos envolvendo ciclos homo/heteroclínicos, sugere-se a consulta de Shilnikov *et al* [52, 53] ou o artigo de Homburg e Sandstede [26].

2 A influência de Poincaré no surgimento da Escola de Andronov

Em 1885, para a comemoração do seu 60.^{o} aniversário em 1890, o rei da Suécia, Óscar II, associa-se ao jornal *Acta Mathematica* e, sob o escrutínio dos matemáticos Karl Weierstrass, Magnus Mittag-Leffler e Charles Hermit, decide promover um concurso internacional para a melhor resolução de um problema científico no âmbito da Mecânica Celeste. Onze trabalhos foram submetidos, tendo os franceses Henri Poincaré e Paul Appel recebido o pré-

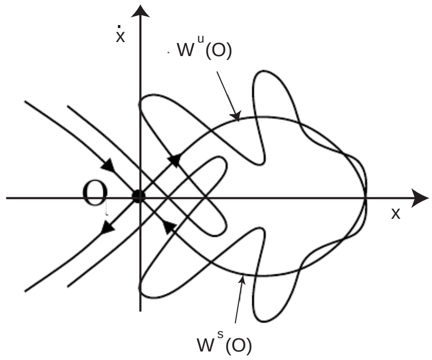


Figura 2: Ligação homoclínica em que as variedades instável, $W^u(O)$, e estável, $W^s(O)$, se intersectam transversalmente.

mio com os trabalhos *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique* e *Sur les intégrales des fonctions à multiplicateurs*[2].

A atribuição do prémio a Poincaré causa uma grande celeuma na comunidade científica alemã dado que, alegadamente, o seu trabalho não tinha uma aplicabilidade imediata na Mecânica Celeste. No entanto, estava implícito que a razão do mal-estar se prendia intimamente com o facto de Poincaré ser francês e ter recebido um grande elogio no parecer que Weierstrass elaborou sobre o seu trabalho[3]:

> *(...) this work cannot indeed be considered as furnishing the complete solution of the question proposed, but (...) it is nevertheless of such importance that its publication will inaugurate a new era in the history of celestial mechanics.*

No seguimento deste trabalho, em 1892, 1893 e 1899, Poincaré publica *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* [36, 37, 38], uma obra com três volumes e mais de mil páginas. Sobre esta colectânea Paul Appel, em 1925, faz o prognóstico certeiro (fonte: Chenciner [17]):

> *Il est probable que, pendant le prochain demi-siècle, ce livre sera la mine d'où des chercheurs plus humbles extrairont leurs matériaux.*

[2] Ambos os trabalhos foram publicados em *Acta Mathematica 13, 1890.*

[3] Fonte: `http://en.wikipedia.org/wiki/User:Alba/Workspace/Poincare`; ver também Shilnikov [51].

No âmbito da Mecânica Newtoniana, Poincaré estudou equações diferenciais do tipo

$$m\ddot{x} = f(x), \tag{1}$$

onde $x \in \mathbf{R}$, $f(x)$ representa a intensidade da força física e $\ddot{x}$ a aceleração de um corpo com massa m sujeito a essa força. No plano $(x, \dot{x})$, é habitual aparecerem pontos de equilíbrio do tipo *sela* (isto é, pontos que possuem variedades estável e instável não triviais) e órbitas bi–assimptóticas para essa sela quando $t \to \pm\infty$ – veja-se a abordagem contemporânea em Arnold [12, 13]. A este tipo de soluções dar-se-á o nome de *trajectória homoclínica.* À união da sela com a trajectória dar-se-á o nome de *ciclo homoclínico* – ver figura 1. Soluções assimptóticas para uma sela A no passado e para uma sela B no futuro designam-se *soluções heteroclínicas* de A para B. Soluções bi–assimptóticas para uma trajectória fechada não trivial podem, de igual modo, ser consideradas se, à equação (1) se adicionar uma variável cíclica θ tal que $\dot{\theta} = 1$; é claro que o espaço de fase destes sistemas passa a ser $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{S}^1$, $\theta \in \mathbf{R} \pmod{2\pi}$.

Antes dos trabalhos de Poincaré, eram conhecidos alguns casos integráveis em que as variedades instáveis e estáveis associadas a uma solução periódica coincidem, como na figura 1 – veja-se a abordagem posterior em Lyapunov [30, 31]. Em casos não conservativos, Poincaré estudou exemplos de equações em que as variedades invariantes se intersectam transversalmente, como na figura 2, profeciando desde logo um comportamento bastante complexo na sua dinâmica (fonte: Poincaré [38], capítulo XXXIII, secção 397):

> *Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées; chacune des deux courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier sur elle même d'une manière très complexe pour venir recouper une infinité de fois toutes les mailles du réseau.*
>
> *On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner un idée de la complication du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de Dynamique (...)*

Em 1898, Hadamard [25] publica o artigo *Les surfaces à courbures op-*

posées et leur lignes géodesiques no *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, terminando-o com a pergunta:

> *Les cirsconstances que nous venons de rencontrer se trouveront-elles dans d'autres problèmes de la Mécanique?*

Apesar de as trajectórias no problema dos três corpos não serem similares às linhas geodésicas descritas no trabalho de Hadamard (geodésicas em superfícies com curvatura negativa), sete anos mais tarde Poincaré assinala a importância do artigo de Hadamard uma vez que, pela primeira vez, a análise de um problema é feita com recurso a *dinâmica simbólica*.

Nos inícios da década de 30, numa outra competição em homenagem ao Papa Pio XI, o americano George David Birkhoff [15] – ver também [14] – submete um trabalho onde mostra que qualquer difeomorfismo analítico que preserve área e que possua uma sela com uma órbita homoclínica, exibindo uma intersecção transversal das variedades invariantes, tem infinitas soluções periódicas dando um qualquer número de voltas em torno da homoclínica original[4]. No mesmo trabalho, Birkhoff conjectura acerca da possibilidade de descrever completamente a dinâmica de todas as órbitas numa vizinhança do ciclo homoclínico em termos de linguagem simbólica (com recurso a uma *infinidade* de símbolos). Até aqui, as aplicações dos trabalhos de dinâmica simbólica de Birkhoff estavam limitadas a fluxos geodésicos.

Entretanto, em Moscovo, vivendo o clima do Pós-Guerra, o físico Leonid Mandelshtam explora o mundo da propagação de ondas e investiga meios para optimizar a recepção de sinais de rádio através do acoplamento de antenas. De uma forma assumida, de acordo com [18], Mandelshtam desenvolvia estes conceitos de *Teoria das Oscilações* no sentido de unificar diversos campos do saber científico, como a óptica, a acústica e a radio-engenharia. Convicto de que o mundo era profundamente não-linear, sugere ao seu aluno Aleksandr Andronov o estudo de circuitos elétricos em contextos semelhantes aos que já haviam sido desenvolvidos pelo holandês Balthasar Van der Pol para a *Philips*. Diante do árduo desafio, a solução que Andronov encontrou foi a de recorrer aos modelos abstractos de equações diferenciais presentes nos trabalhos de Poincaré e de Lyapunov. Andronov iniciava assim a implementação de uma promissora técnica de análise.

[4]Uma abordagem recente a este assunto, que inclui uma resenha história acerca de dinâmica simbólica em ciclos que envolvem trajectórias periódicas, pode ser encontrada em Rodrigues *et al* [41, 42].

Figura 3: Localização de Nizhny Novgorod na Rússia. Antes da queda do império soviético, esta cidade chamava-se Gorky.

3 A Escola de Andronov

No sentido de estudar a dinâmica na vizinhança de ciclos homoclínicos associados a selas e a bifurcações *sela-nó*, e de continuar os trabalhos de Poincaré, Hadamard e Birkhoff em contextos não conservativos, no início do século XX foi fundada pelo físico Andronov uma escola russa onde matemáticos e físicos aplicavam os métodos de Poincaré e Lyapunov na análise de problemas práticos – este era, de facto, um dos princípios-chave desta escola. Essa escola situava-se no *Gorky Physico-Technical Researche Institute*, na cidade de Nizhny Novgorod, a terceira maior da URSS, localizada a cerca de 500 Km de Moscovo – veja-se o mapa na figura 3. Em 1932, a cidade de Nizhny Novgorod mudou o nome para Gorky, por ordem de Estaline, designação que manteve até à queda da "era soviética". Em 1990, a cidade readoptou o nome original, tal como aconteceu com Leningrado, agora São Petersburgo.

A Escola de Andronov desenvolvia, na altura, a teoria de oscilações não lineares para sistemas de equações diferenciais autónomas de duas variáveis (no plano). O resultado que mais se destacou enquadrava-se no contexto de equações diferenciais autónomas a um parâmetro

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \qquad x \in \mathbf{R}^2 \tag{2}$$

onde f é um campo de vectores C^r $(r \geq 1)$ com um ponto de equilíbrio

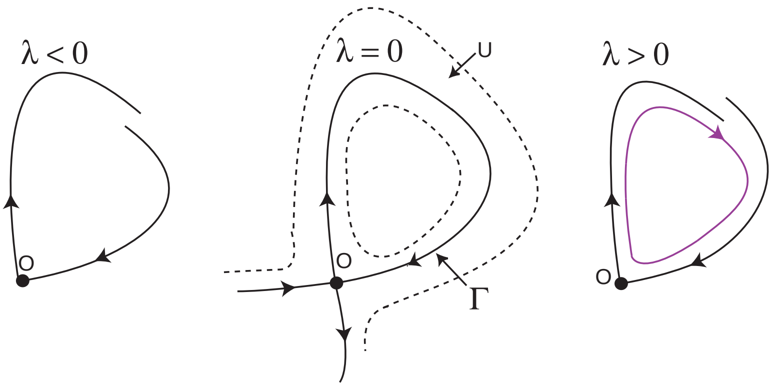


Figura 4: Bifurcação homoclínica associada ao ponto de equilíbrio hiperbólico não ressonante O (em $\mathbf{R}^2$): quando $\lambda = 0$, observa-se a ligação homoclínica Γ e o aberto $U \supset \Gamma$.

hiperbólico[5] (admita-se que é a origem). O parâmetro $\lambda \in \mathbf{R}$ é tal que o fluxo associado a $\dot{x} = f(x, 0)$ tem uma ligação homoclínica Γ associada à origem e, para $\lambda \neq 0$, a ligação homoclínica é destruída e as variedades invariantes posicionam-se como na figura 4. Em particular, a origem é um ponto de equilíbrio tipo *sela* e os valores próprios da linearização do campo f na origem são reais. Definindo o *valor de sela* da origem, σ, como sendo a soma dos valores próprios da linearização $df|_{(0,0)}$ do campo f na origem, e admitindo que U é um aberto contendo Γ, o resultado pode ser enunciado do seguinte modo:

Teorema 1 (Andronov e Leontovich, 1937) *Relativamente ao fluxo associado à equação (2) e admitindo que a origem é um ponto de equilíbrio com $\sigma \neq 0$, tem-se:*

1. *Se $\sigma < 0$, então, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, existe uma única solução periódica atractora $L(\lambda)$ perto de U. Quando $\lambda \to 0^+$, o período de $L(\lambda)$ tende para $+\infty$ e $L(\lambda) \to \Gamma$; para valores negativos de λ não existem ciclos-limite.*

2. *Se $\sigma > 0$, então, para $\lambda < 0$ suficientemente pequeno, existe uma única solução periódica repulsora $L(\lambda)$ perto de U. Quando $\lambda \to 0^-$, o período de $L(\lambda)$ tende para $+\infty$ e $L(\lambda) \to \Gamma$; para valores positivos de λ não existem ciclos-limite.*

[5] Diz-se que $p_0 \in \mathbf{R}^n$ é um ponto de equilíbrio hiperbólico da equação $\dot{x} = f(x)$ se $f(x_0) = 0$ e se os valores próprios de $Df(x_0)$ são não-nulos.

A prova deste resultado assenta na redução do problema à forma normal de Birkhoff de grau 2 e no facto de a aplicação de primeiro retorno a uma secção transversal ao ciclo ter apenas um ponto fixo instável ou estável, conforme σ seja positivo ou negativo, respectivamente[6]. Este resultado clássico (entre outros) consta da monografia [5] que Andronov escreveu com Vitt e Khaikin. Na primeira edição deste livro de 1930, não aparece o nome de Khaikin porque este foi alvo das purgas de Estaline; em 1966, o trabalho foi traduzido para inglês e já apareceu o nome do autor – ver Andronov *et al* [6].

Doze anos após o fim da Primeira Grande Guerra, nos anos 30, a necessidade de caracterizar modelos matemáticos no âmbito da rádio-engenharia levou Andronov a generalizar os resultados para sistemas multi-dimensionais não conservativos. Ainda nesta década, Andronov e Pontryagin [9] introduzem a noção de *robustez* no plano: um sistema é robusto se qualquer sistema $\dot{x} = \tilde{f}(x)$ que esteja C^1–perto de $\dot{x} = f(x)$ for topologicamente equivalente ao inicial, isto é, se existir um homeomorfismo h próximo da identidade tal que $h \circ \tilde{f} \equiv f \circ h$; a função h envia as trajectórias de um sistema nas trajectórias do outro[7]. Muito mais tarde, em 1962, este conceito é re-introduzido por Maurício Peixoto [35] com a designação de *estabilidade estrutural* – o requisito do homeomorfismo estar perto da identidade foi abandonado.

Em 1952, Andronov morre mas devido à política organizacional da sua escola, esta persiste de *boa saúde*, continuando a investigação em muitas áreas da física, da matemática e da engenharia. Dentro da escola, continuando o estudo das oscilações não lineares, a esposa de Andronov, Evgenija Leontovich–Andronova, uma reconhecida aluna de Mandelshtam em Moscovo, encabeça o Departamento de Equações Diferenciais do *Institute of Mathematics and Cybernetics*, na altura dedicado unicamente à pesquisa. Ela completa e publica os trabalhos [7, 8] do seu marido, classificando a dinâmica perto de ciclos homoclínicos planares no contexto dissipativo. Estuda ainda o caso hiperbólico ressonante ($\sigma = 0$), recorrendo à *sequência de Dulac*, onde se prova que múltiplos ciclos limites podem surgir após a quebra da ligação homoclínica. Em Shilnikov *et al* [53], poderá consultar-se o enunciado e a curta prova deste resultado no capítulo 13; os autores de [53]

[6]A prova original de Andronov e Leontovich do Teorema 1 foi sujeita às seguintes restrições: o campo de vectores f é C^1 e está definido no plano. Em Shilnikov *et al* [53] (pp. 701) é feita a generalização deste resultado para superfícies não–orientáveis.

[7]Note-se que, na definição de *sistema robusto*, não se exige que a orientação das trajectórias seja preservada. Em textos subsequentes de Shilnikov, a preservação da orientação das soluções é exigida.

(a) (b)

Figura 5: L. P. Shilnikov nos anos 60 (a) e nos anos 70 (b). Cortesia de Andrey Shilnikov

fazem notar que a extensa prova original de Leontovich–Andronova esteve *guardada* mais de trinta anos no arquivo VINITI de Moscovo, com acesso somente permitido a investigadores da União Soviética – mais detalhes no artigo de Ilyashenko e Yakovenko [27].

Depois do plano, a pergunta natural que surge é o da possível extensão dos resultados para dimensões mais altas. Esta extensão já era anunciada na introdução do livro de Andronov, Vitt e Khaikin, *Theory of oscillations* (na sua versão russa de 1930, [5]). Entre os fundadores da Escola de Andronov, em plena década de 60, só Mayer se dedica ao estudo da robustez de sistemas multidimensionais. Até aqui, só sistemas com dinâmicas simples, os actualmente designados por *sistemas Morse–Smale*, eram considerados como robustos.

Na URSS, até aos anos 50, a principal fonte de divulgação de ciclos homoclínicos e dos avanços de Hadamard e Birkhoff era o livro de Nemytsky e Stepanov, *Qualitative theory of differential equations*, de 1949 – tradução para inglês em [33]. Neste livro, seguia-se o estilo original de Birkhoff, constituindo uma obra de difícil leitura para os investigadores da época.

4 O aparecimento de L. P. Shilnikov

Filho de operários, L. P. Shilnikov nasceu em 1934, na região russa de Kotelnich Kirov. Concluiu o equivalente ao ensino secundário em 1952 e graduou-se em 1957 na *Physics and Mathematics Gorky State University*. Como jo-

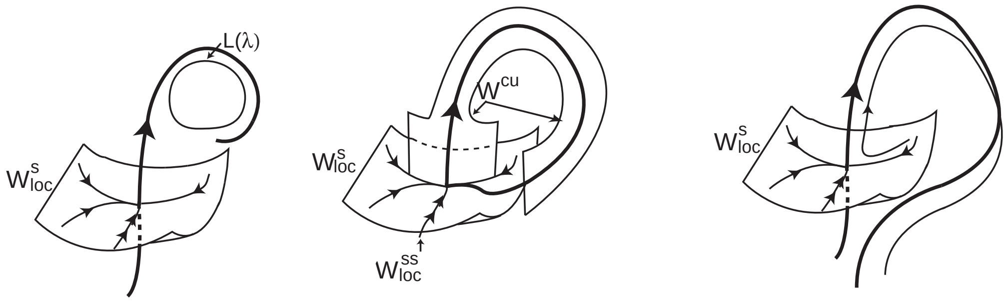


Figura 6: Bifurcação homoclínica associada a O em $\mathbf{R}^3$. A linearização do campo de vectores em O tem três valores próprios reais não nulos e não ressonantes.

vem membro da escola de Andronov, L. P. Shilnikov começou por estudar métodos perturbativos e sistemas lineares contínuos por pedaços, tema relacionado com a teoria do controlo automático que florescia nesta década. Achando esta área desinteressante e bastante saturada, uma vez que muita gente a estudava, Shilnikov passou a dedicar-se à extensão dos resultados de Andronov e Leontovich para dimensões mais altas, envolvendo outro tipo de selas invariantes que não apenas pontos de equilíbrio. Em 1960, Shilnikov concluiu os seus primeiros estudos de pós-graduação com a tese *The birth of periodic motions from singular trajectories*, generalizando os resultados de Andronov e Leontovich.

No seguimento do seu trabalho de pós-graduação, em 1963, Shilnikov publica o artigo [44] no qual estuda equações diferenciais autónomas a um parâmetro

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \qquad x \in \mathbf{R}^3, \tag{3}$$

onde f é um campo de vectores C^r $(r \geq 1)$ com um ponto de equilíbrio cuja linearização apenas admite valores próprios reais não nulos – suponha-se, mais uma vez, que é a origem. O parâmetro $\lambda \in \mathbf{R}$ é tal que o fluxo associado a $\dot{x} = f(x, 0)$ tem uma ligação homoclínica Γ associada à origem; para $\lambda \neq 0$, a ligação homoclínica é destruída e as variedades invariantes posicionam-se como na figura 6. Para o decorrer da exposição, excluir-se-ão, tal como foi feito na altura por Shilnikov, os casos degenerados de ligações homoclínicas – *orbit flip* e *inclination flip* – ver detalhes nas secções 5.1.6 e 5.1.7 do artigo de Homburg e Sandstede [26].

Shilnikov estuda os casos em que a linearização do campo de vectores em torno da origem apenas assume valores próprios λ_1, λ_2 e λ_3 tais que $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ e $\lambda_3 > 0$, e o que se obtém deste invertendo a direcção do tempo[8]. Analogamente ao estudo feito em $\mathbf{R}^2$, defina-se o *valor de sela* da origem, σ, como sendo:

$$\sigma = \lambda_3 + \max_{i \in \{1,2\}} \lambda_i.$$

Topologicamente, pode acontecer que a variedade centro-instável, $W^{cu}(O)$, seja difeomorfa a um cilindro ou a uma tira de Moebius – ver figura 7. Daqui em diante, vai-se supor que ocorre o primeiro caso; no entanto, o Teorema 2 permanece válido no segundo caso, com as devidas adaptações. Shilnikov [44] prova que as trajectórias do fluxo associado a (3) tendem para uma solução periódica, para o ciclo homoclínico Γ ou para a origem, ou saem de uma vizinhança U de Γ definitivamente.

Teorema 2 (Shilnikov, 1963) *Relativamente ao fluxo associado à equação (3), admitindo que a origem é um ponto de equilíbrio não ressonante e que a variedade centro-instável associada à origem é orientável (caso (a) da figura 7), tem-se (ver figura 6):*

1. *Se $\sigma < 0$, então, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, uma única solução periódica $L(\lambda)$ atractora bifurca do ciclo homoclínico Γ. Quando $\lambda \to 0^+$, o período de $L(\lambda)$ tende para $+\infty$ e $L(\lambda) \to \Gamma$; para valores negativos de λ não existem ciclos-limite.*

2. *Se $\sigma > 0$, então, para $\lambda < 0$ suficientemente pequeno, uma única solução periódica $L(\lambda)$ repulsora bifurca do ciclo homoclínico Γ. Quando $\lambda \to 0^-$, o período de $L(\lambda)$ tende para $+\infty$ e $L(\lambda) \to \Gamma$; para valores positivos de λ não existem ciclos-limite.*

Analisando a aplicação de primeiro retorno a uma secção transversal a Γ, o resultado anterior pode ser refinado do seguinte modo: se $|\lambda_1| > \lambda_3$ e $|\lambda_2| > \lambda_3$, a solução periódica $L(\lambda)$ que bifurca é um poço (isto é, a variedade instável de $L(\lambda)$ é reduzida ao ciclo-limite); se $|\lambda_1 + \lambda_2| > \lambda_3$ e $|\lambda_1| < \lambda_3$ ou $|\lambda_2| < \lambda_3$, a solução periódica que surge é uma sela; e, se $|\lambda_1 + \lambda_2| < \lambda_3$, a solução periódica que bifurca é uma fonte (a variedade estável é reduzida a $L(\lambda)$) – consulte-se Wiggins [57] para uma abordagem contemporânea bastante acessível.

Assumindo que $0 < -\lambda_2 < \lambda_3 < -\lambda_1$, na presença de duas ligações homoclínicas $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (simétricas ou não), como ilustrado na figura 8, Shilnikov provou a existência de um conjunto de Cantor invariante pela aplicação Ψ,

[8] Na década de 90, Pumariño e Rodriguez [39] estudaram os casos degenerados envolvendo ressonâncias dos valores próprios.

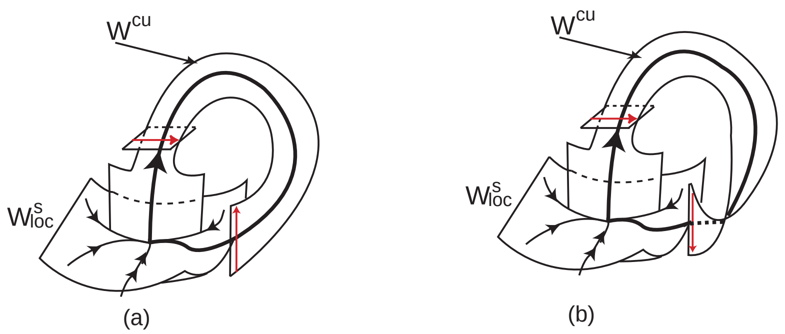


Figura 7: $W^{cu}(O)$ poderá ser difeomorfa a um cilindro (a) ou a uma tira de Moebius (b).

de primeiro retorno a uma secção transversal Σ a $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, para pequenas perturbações do campo inicial que impliquem a quebra simultânea das duas ligações homoclínicas Γ_1 e Γ_2, onde a dinâmica de Ψ é topologicamente conjugada a um shift de dois símbolos. De uma forma *anacrónica*, dir-se-ia que Shilnikov prova a existência de uma *ferradura de Smale suspensa* num dos *lados* do desdobramento do par de ligações homoclínicas $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Mais concretamente, linearizando o campo de vectores numa vizinhança do ponto de equilíbrio, prova-se a existência de um par de rectângulos de condições iniciais, R_1 e R_2, numa secção Σ transversal a $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, com a seguinte propriedade: se $\lambda < 0$ for suficientemente pequeno, R_1 e R_2 retornam a Σ como no caso C na figura 8, dando origem ao que hoje se conhece como *ferradura*. O resultado que se segue é uma *versão moderna* do Teorema que Shilnikov publicou em 1967 – veja-se [46].

Teorema 3 (Shilnikov, 1967 – adaptado) *Existe* $\lambda_0 \in \boldsymbol{R}^-$ *tal que, se* $\lambda_0 < \lambda < 0$*, então a aplicação de primeiro retorno* Ψ *a* Σ *possui um conjunto de Cantor* Λ *invariante onde a dinâmica de* $\Psi|_\Lambda$ *é topologicamente conjugada a um shift com dois símbolos.*

A ideia da construção está patente na figura 8: a região de Σ à direita de $W^s_{loc}(O)$ é enviada pelo campo linear definido em torno de O numa *cunha*, a qual é conduzida, pela aplicação global, a Σ. Se $\lambda \geq 0$ (casos A e B), as dinâmicas destas duas *cunhas*, a da esquerda e da direita, não se misturam. Se $\lambda < 0$ (caso C), existe um valor de λ para o qual uma ferradura de Smale aparece.

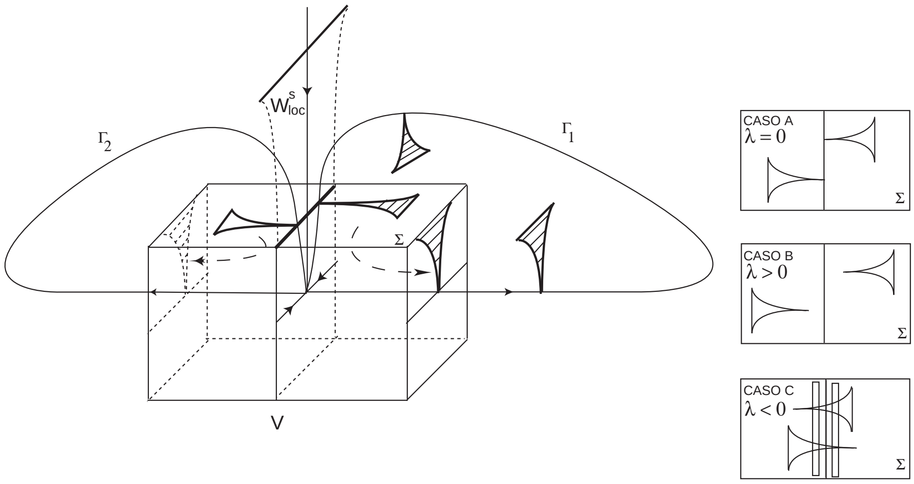


Figura 8: Bifurcação associada a uma ligação homoclínica dupla associada a O (em $\mathbf{R}^3$). À esquerda, encontram-se os ciclos que ocorrem para $\lambda = 0$ (caso A). Os valores próprios da linearização são reais e não nulos. Casos A e B: o ciclo Γ (ou o que resta dele) é repulsor; Caso C: ilustração da ocorrência de dinâmica caótica do tipo *ferradura.*

As consequências dinâmicas do Teorema 3 foram vistas com grande interesse nos anos subsequentes. Repare-se que, para $\lambda \geq 0$, a dinâmica associada à quebra da ligação homoclínica é trivial uma vez que os ciclos são repulsores. No entanto, para $\lambda < 0$, as ferraduras e a dinâmica caótica aparecem *quase* do nada. No espaço unidimensional do parâmetro, surge *quase instantaneamente* um conjunto invariante pelo fluxo com entropia topológica positiva. Por vezes, a este tipo de bifurcação global chama-se de *explosão homoclínica* ou *caos instantâneo*[9]. Mais detalhes e uma generalização podem ser lidos em Afraimovich *et al* [2]. Estes casos de ciclos homoclínicos simétricos têm interesse histórico porque são os que aparecem para alguns valores dos parâmetros da Equação de Lorenz – ver Glendinning e Sparrow [21].

O resultado mais surpreendente e que mais projecção deu a Shilnikov foi publicado em 1968. Nele, o autor estuda ciclos homoclínicos com *selas-foco*, isto é, pontos de equilíbrio cuja linearização do campo tem valores próprios complexos, que se supõem ser $-\rho \pm wi$ e μ, com $\mu \neq \rho$ e $\mu, \rho > 0$ – ver sela-

[9]Actualmente, é conhecido que a ferradura suspensa que surge é uniformemente hiperbólica, o que confere robustez ao conjunto invariante. A estabilidade estrutural da ferradura foi provada mais tarde por Anosov [10, 11].

foco na figura 9. Mais especificamente, Shilnikov [45] considera equações diferenciais autónomas a um parâmetro

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \qquad x \in \mathbf{R}^3, \tag{4}$$

onde f é um campo de vectores C^r ($r \geq 2$) com um ponto de equilíbrio hiperbólico – mais uma vez, pode-se supor que este equilíbrio está na origem O. O parâmetro $\lambda \in \mathbf{R}$ é tal que o fluxo associado a $\dot{x} = f(x, 0)$ tem uma ligação homoclínica Γ associada a O e, para $\lambda \neq 0$, a ligação homoclínica é destruída e as variedades invariantes são tais que $W^u(O)$ se desdobra para *cima* (resp. *baixo*) de $W^s(O)$ para $\lambda > 0$ (resp. $\lambda < 0$), como se ilustra na figura 9. Nestas condições, o principal resultado de Shilnikov [45] pode ser enunciado do seguinte modo[10]:

Teorema 4 (Shilnikov, 1968) *Relativamente ao fluxo associado à equação (4), admitindo que a origem é um ponto de equilíbrio não ressonante, tem-se:*

1. *Se $\mu < -\rho$, o ciclo homoclínico Γ é atractor ($\lambda = 0$), bifurcando dele uma solução periódica atractora para um dos lados do espaço unidimensional do parâmetro.*

2. *Se $\mu > -\rho$, o ciclo homoclínico Γ é acumulado por um número infinito de soluções periódicas do tipo sela.*

A ideia da prova original está ilustrada na figura 10: seja Σ uma secção transversal ao ciclo homoclínico; se $\mu < -\rho$, qualquer rectângulo $R \subset \Sigma$ de condições iniciais é enviado pela aplicação de primeiro retorno Ψ numa espiral em torno da ligação, não intersectando R; no caso em que $\mu > -\rho$, para $\lambda > 0$, existe um rectângulo $R \subset \Sigma$ de condições iniciais que é enviado pela aplicação de primeiro retorno Ψ numa espiral que intersecta R em duas regiões disjuntas. Apesar de não estar explicitamente enunciado nem usar a terminologia actual, é evidente que Shilnikov detecta a suspensão de uma ferradura com infinitos símbolos na vizinhança de um ciclo homoclínico associado a uma sela-foco (no caso em que $\mu > -\rho$), com todas as consequências de dinâmica caótica que hoje se conhecem – Shilnikov [50]. Actualmente, sabe-se que para pequenas perturbações do sistema, esta ferradura *perde* uma infinidade de *"pernas"* – ver [26]. É também sabido que este mecanismo de geração de caos é um dos mais robustos e frequentes fenómenos da natureza.

[10] A prova do resultado só é publicada dois anos mais tarde, em [50].

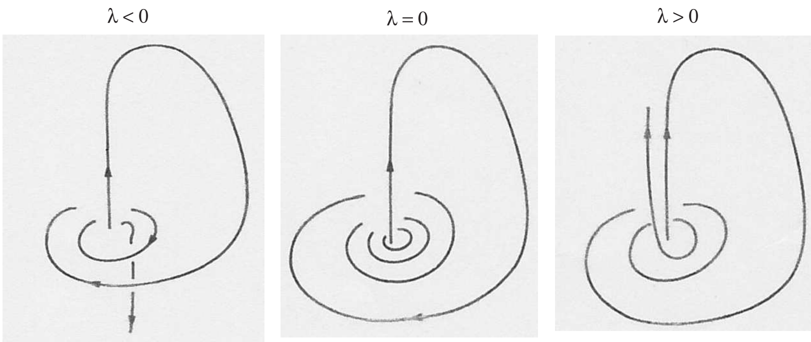


Figura 9: Bifurcação homoclínica associada a uma sela-foco hiperbólica O (em $\mathbf{R}^3$) em que $\dim W^s(O) = 2$.

5 A disseminação dos trabalhos de Shilnikov

No final dos anos 60, L. P. Shilnikov estuda o problema de Poincaré-Birkhoff acerca da caracterização completa do conjunto das trajectórias perto de um ciclo homoclínico transversal associado a uma solução periódica. Em [46, 47], Shilnikov prova que a existência de um ciclo homoclínico transversal a uma solução periódica *origina* caos (ocidentalmente, este facto é atribuído a Steven Smale). Na URSS, nesta mesma década, um outro russo, de nome V. Alekseev, dedica-se à mesma pergunta, no âmbito do Problema dos Três Corpos – ver [4].

Ainda nos anos 60, L. P. Shilnikov introduz uma técnica, actualmente conhecida por *Coordenadas de Shilnikov*, com a qual estuda ligações homoclínicas associadas a equilíbrios ressonantes e a toros bidimensionais. Com este recurso, soluções perto de uma sela são encontradas recorrendo a um problema de valor na fronteira. Enquanto Shilnikov e a sua equipa estudam as formas normais de um modo puro, muitos físicos espalhados pelo mundo estavam interessados na geometria de campos magnéticos com aceleradores no toro, sistemas geralmente não integráveis. Isso levou Melnikov [32] a estabelecer um critério que garantisse a existência de intersecção transversal entre as variedades invariantes associadas a um ponto de equilíbrio, através de uma fórmula complexa.

Até aqui, as ideias russas não transpunham com facilidade a fronteira da URSS. A noção de *ferradura* de Smale [54] chegaria a Gorky depois de uma conferência à qual Leontovich–Andronova assistiu em Kiev (Ucrânia), em 1961. Nesse encontro ninguém queria acreditar que a existência de infinitas

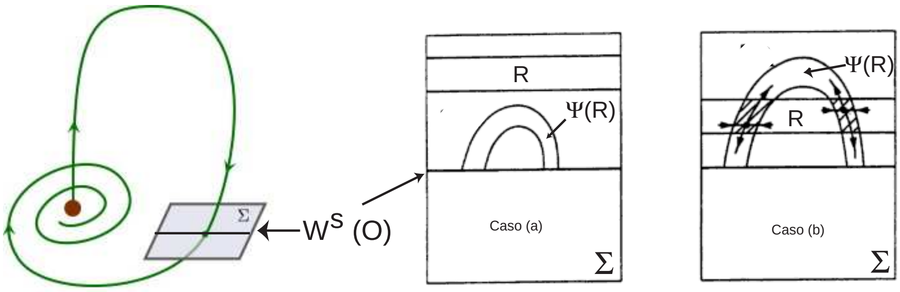


Figura 10: Σ é uma secção transversal a Γ. Caso (a) se $\mu < -\rho$, para $\lambda > 0$, há uma solução periódica atractora; Caso (b) se $\mu > -\rho$, para $\lambda > 0$, existem infinitas soluções do tipo sela.

ferraduras suspensas era uma condição necessária para a geração de um ciclo homoclínico associado a uma sela-foco. Anos mais tarde, Andronova confessou a sua primeira reacção após ter conhecimento da existência de um conjunto com uma infinidade de soluções periódicas (Champneys [16]):

> *I immediatly wanted to say that this simply cannot be.*

A respeito da ferradura de Smale, o próprio Shilnikov escreve em [51]:

> *(...) and this is indeed important, the method of* horseshoe *did not give a complete description of all trajectories lying in a neighbourhood of the closure of the homoclinic orbit, therefore it did not solve the problem of Birkhoff. The complete solution was published by me in 1967.*

Nesta altura, os trabalhos de Shilnikov não eram conhecidos; e mesmo para aqueles que os liam, as provas eram consideradas obtusas[11].

O resultado surpreendente de Shilnikov, respeitante à dinâmica de ciclos homoclínicos associados a uma sela-foco, foi apresentado no *Doklady Akedemii Nauk SSSR* em 1968 [48], tendo a prova completa sido publicada somente no ano de 1970, em [50], e ainda assim permanece para muitos incompreensível e obscura. Shilnikov prossegue a sua investigação, tendo caracterizado a dinâmica perto de novelos homoclínicos, estendido o resultado a dimensões finitas maiores e a outras bifurcações homoclínicas – ver

[11] Mesmo hoje em dia, encontram-se cientistas que acham as demonstrações de Shilnikov completamente incompreensíveis.

[46, 47, 48, 49]. Leontovich–Andronova refere-se a Shilnikov como *Mozart*, alegando que o seu génio matemático tinha uma capacidade ilimitada de descobrir mecanismos de gerar dinâmicas complexas. No final dos anos 60 e em toda a década de 70, Leonid começa a atrair talentosos estudantes de doutoramento, com especial destaque para N. Gavrilov, V. Afraimovich, L. Lerman, L. Belyakov, V. Bykov, S. Gonchenko, D. Turaev, I. Ovsyannikov, M. Shashkov, O. Sten'kin e o seu filho A. Shilnikov[12].

Um dos trabalhos mais significativos na sua carreira foi publicado em 1972. Nele, Shilnikov estuda transições para o caos através de tangências homoclínicas, em colaboração com N. Gavrilov [20]. Ainda com Gavrilov, Shilnikov caracteriza o conjunto dos pontos não errantes na vizinhança de uma tangência homoclínica quadrática, como os esquematizados na figura 11, e estuda a equivalência topológica associada aos multiplicadores de Floquet das soluções periódicas.

No mundo ocidental e no contexto de difeomorfismos, Newhouse [34] estudou em 1979, o caso em que as variedades invariantes de um ponto fixo são tangentes. Provou que, numa família a um parâmetro, existe uma sequência de intervalos nos quais se detecta um conjunto denso de valores do parâmetro para os quais novas tangências são observadas. Isto implica que, apesar de tangências individuais poderem ser removidas através de pequenas perturbações, é impossível evitar o aparecimento de novas tangências. Estas regiões de instabilidade estrutural são agora chamadas de *regiões de Newhouse*. Nelas, sistemas com uma infinidade de poços são densos quando o valor de sela é menor do que 1. Duas décadas mais tarde, num conjunto de artigos, Shilnikov, Gonchenko e Turaev [22, 23] publicam resultados iniciados na década de 70 nos quais provam que a dinâmica de sistemas com tangências homoclínicas nunca pode ser descrita usando apenas subshifts de Markov finitos. Interessante de realçar é a expressão *"suficientemente óbvio"* na citação de Shilnikov [51]:

> *It is sufficiently obvious that when there exists one homoclinic tangency, then an arbitrarily small smooth perturbation of the system can be found such that the perturbed system will have new homoclinic tangencies. (...) Homoclinic tangencies behave*

[12] Numa conversa informal que o autor deste artigo manteve, em 2009, com uma professora do Departamento de Matemática da Universidade de Nizhny Novgorod, há indícios de que Shilnikov não igualava a competência das mulheres com a dos homens para produzir matemática. Não será talvez casual o facto de apenas indivíduos do sexo masculino serem co-autores com Shilnikov.

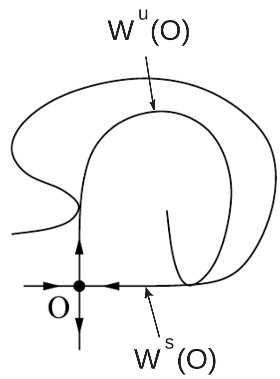


Figura 11: Tangencias quadráticas das variedades invariantes associadas a um ponto fixo. Este ponto é fixo pela aplicação de primeiro retorno de uma solução periódica com a secção que lhe é transversal.

> *in a persistent way (...). Undoubtedly, this kind of picture had already been observed by Poincaré (...).*

A qualidade dos trabalhos de Shilnikov foi sendo reconhecida na Academia de Gorky. Alguns matemáticos dirigiam-se para casa de Shilnikov e falavam de matemática horas a fio, discussões acompanhadas de cigarros, chá e vodka. Curioso é o facto de Sinai ter referido o atractor de Lorenz, em conversa com Shilnikov a caminho de casa deste, tendo-o fascinado de tal modo que, de imediato, aplicou a sua teoria ao atractor de Lorenz. A ideia foi também usada por Bykov, no seu trabalho de doutoramento.

Durante toda a década de 70, Shilnikov manifesta um grande interesse no estudo do atractor de Lorenz conhecido no Ocidente desde 1963. Constitui uma equipa de investigação para estudar este modelo (com intensas simulações numéricas) e constrói um modelo geométrico descrevendo as propriedades do atractor de Lorenz, juntamente com Afraimovich e com Bykov [1], em 1977. É interessante realçar que, poucos anos depois, Guckenheimer e Williams [24] desenvolveram um modelo similar, no mundo dito ocidental. Shilnikov descreveu ainda bifurcações e a estrutura do atractor de Lorenz como um atractor estranho, ao mesmo tempo que vários artigos sobre este tema se sucediam. Segundo [3], a teoria de Afraimovich, Bykov e Shilnikov permaneceu a mais completa e eficiente no que diz respeito a aplicações.

Enquanto a fama de Shilnikov se espalhava pela Academia Russa, este investigador não era muito bem visto na sua própria universidade. Este

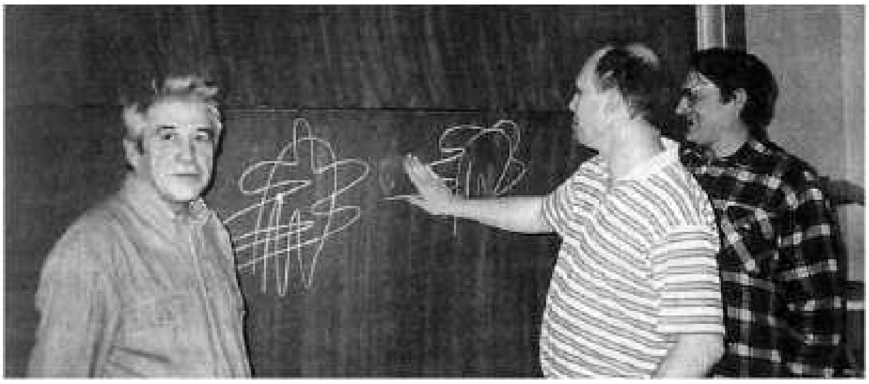


Figura 12: L. P. Shilnikov discutindo com D. Turaev e S. Gonchenko, em Berlim (2004). Cortesia de Andrey Shilnikov.

mal-estar remonta aos seus estudos de mestrado, os quais foram publicados sem a referência ao seu orientador Neimark. O aluno Shilnikov encontrou vários erros em diversos artigos científicos de Neimark e divulgou-os, tendo este ficado profundamente ofendido. Shilnikov concorreu ao grau de (honra) *Doctor in Science*, o qual demorou quatro anos a ser avaliado e depois foi rejeitado. Não repetiu o concurso ao grau de *Doctor in Science* e, apesar de ter sido galardoado com a Medalha de Lyapunov em 1998, nunca foi membro da *Russian Academy of Sciences*. Em 1984, Shilnikov torna-se o chefe de departamento do *Research Institute of Applied Mathematics and Cybernetics*. O seu trabalho com D. Turaev [56] acerca de atractores estranhos pseudo-hiperbólicos disseminava-se entretanto pelo mundo. Em 2002 e 2005, Shilnikov volta a ser galardoado pelo seu trabalho, desta vez com os prémios da *Alexander von Humboldt Foundation of Germany* e da *Lavrentiev Award of National Academy of Science of Ukraine*.

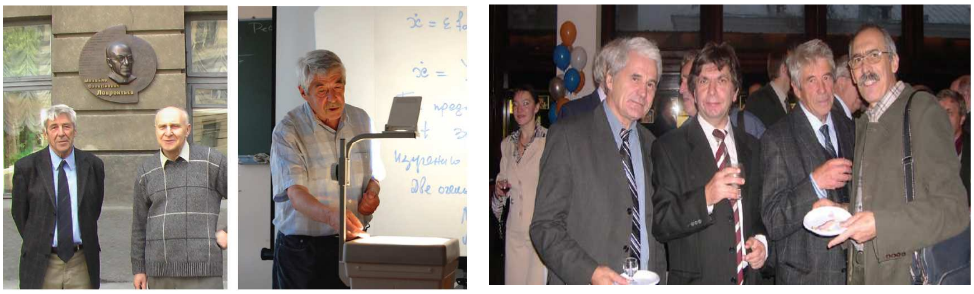
6 O reconhecimento dos trabalhos de Shilnikov pelo Ocidente

A tradução do *Doklady Akademii* para inglês permitiu que o nome de L. P. Shilnikov fosse conhecido no Ocidente. Com esta divulgação, L. P. Shilnikov recebeu vários convites para dar palestras e seminários em universidades internacionais. No entanto, as autoridades soviéticas continuavam a impedir a saída de cidadãos; tipicamente, os convites apareciam abertos e só eram entregues quando a data da conferência já pertencia ao passado.

Os resultados de Shilnikov ganham especial relevo depois do trabalho de dois estudantes de doutoramento ingleses, Paul Glendinning e Colin Sparrow, em 1980. Os dois estavam empenhados em perceber os artigos obscuros de Shilnikov com assistência computacional. Ambos descrevem a geometria das soluções periódicas perto do ciclo homoclínico associado a uma sela-foco. Quando Glendinning e Sparrow [21] souberam de um trabalho de Pierre Gaspard [19] que convergia na mesma direcção, foi unânime a decisão de publicarem o resultados das suas pesquisas no mesmo jornal: *Journal of Statistics and Physics*. Na mesma época, Charles Tresser [55] publica um artigo do mesmo tema, nos *Annales de l'Institut Henri Poincaré*. Nos anos seguintes, o mecanismo descrito por L. P. Shilnikov foi a fonte de explicação para uma vasta gama de dinâmicas caóticas em diferentes contextos físicos.

Com a *Perestroika*, depois da queda da Cortina de Ferro, em 1990, L. P. Shilnikov obteve licença para visitar o Ocidente, tendo sido convidado, por Neal Abraham para dar uma palestra num congresso norte-americano sobre óptica não linear. Em 1991, decorre em Bruxelas uma conferência em sua honra, tendo tido a presença do seu filho Andrey e dos seus alunos de doutoramento Lerman e Bykov. Os matemáticos russos reparam então que, em muitas aplicações, as bifurcações homoclínicas associadas a uma sela-foco são a ideia-chave. Enquanto estava surpreso com as aplicações da sua própria teoria, Shilnikov encontrava poucos avanços teóricos no que respeita a bifurcações homoclínicas. Nessa altura não sabia que, nos Estados Unidos da América, Xiao Biao Lin [29] e Bjorn Sandstede [43], na Alemanha, estavam a desenvolver o que actualmente é conhecido como *Método de Lin*: trata-se de uma abordagem de análise funcional que permite, sob certas condições, o sombreamento de uma cadeia finita ou infinita de ligações homo e heteroclínicas.

Numa conversa informal que o autor deste artigo teve com Glendinning na Universidade de Exeter (UK), este último relatou que numa noite, com muita vodka, Glendinning, Sparrow e outros colegas ocidentais estavam numa discussão científica com homólogos russos. Dada a falha de comunicação linguística, num quadro eles desenhavam figuras descrevendo bifurcações homoclínicas, que ambos os grupos conheciam. Orgulhosamente, cada diagrama era acompanhado do ano no qual cada assunto havia sido abordado. Para grande lástima dos investigadores europeus e americanos, os russos



(a) (b) (c)

Figura 13: (a) L. P. Shilnikov e A. Sarkovsky, após o primeiro ter sido galardoado com o prémio Lavrentiev (Kiev, 2005); (b) Palestra de L. P. Shilnikov (Nizhny Novgorod Mathematical Society, 2009); (c) A. D Morozov, M. I. Malkin, L. P. Shilnikov e L. M. Lerman na pausa para café de uma conferência (Nizhny Novgorod, 2009) – Cortesia de Andrey Shilnikov.

foram os pioneiros em quase tudo, com alguns anos de antecedência (este relato consta também do documento [16]).

7 Últimos Anos de Shilnikov

Nos últimos vinte anos, L. P. Shilnikov recebeu inúmeros aplausos devido à importância da sua obra, tendo escrito mais de duzentas publicações tornadas acessíveis nas referências [52, 53]. L. P. Shilnikov viveu os seus últimos anos em Nizhny com a sua esposa Lyudmila e com a sua filha. O seu filho, um destacado neurocientista nos Estados Unidos da América, era uma visita frequente da família. A sua outra paixão era a pesca. L. P. Shilnikov continuou a publicar, viajou livremente e teve duas conferências em sua honra, comemorando os seus 70.^{o} e 75.^{o} aniversários. Em 2010, na comemoração do seu 75.^{o} aniversário, três dos seus alunos de doutoramento escreveram a seu respeito:

> *For each and every of us, Leonid Pavlovich is teacher, extraordinary expert and mythic prophet in mathematics and nonlinear dynamics. He has his own, Shilnikov* nonaxiomatic *style: the conditions of his theorems are meant to be verified with ease. Perhaps, because of that Leonid became a global attractor for many colleagues(...). Many scientist acknowledge that Shilni-*

(a) (b)

Figura 14: (a) L.P. Shilnikov em Gorky (2010). (b) L. P. Shilnikov trabalhando na casa do seu filho A. Shilnikov (2010). Cortesia de Andrey Shilnikov.

> *kov's ideas and charisma have greatly influenced their own development, both professional and personal.*
>
> V. S. Afraimovich, L. M. Lerman, S. V. Gonchenko, 2010

Um dos estudantes de Shilnikov, Valery Birakov, tornou-se padre e deu a extrema unção a Shilnikov, um dia antes da sua morte. Também conduziu os serviços fúnebres. No dia 26 de Dezembro, aos 77 anos, Leonid Pavlovich Shilnikov morre, vítima de cancro, rodeado pela sua família, na sua casa em Nizhny Novgorod:

> *For all of us Leonid Pavlovich will be a great scholar, teacher and wonderful person. We will always remember him, develop his ideas and move on in science. He left us a new world that we must not lose.*
>
> D. V. Anosov, V. S. Afraimovich, L. A. Bunimovich, S. V. Gonchenko, V.Z. Grines, Y.S. Ilyashenko, A.B. Rink, S. Kashchenko, V. Kozlov, L. M. Lerman, A. D. Morozov, A. Neustadt, J. B. Pessin, A. Samoilenko, J. G. Sinai, D. Treschev, D. V. Turaev,
>
> A. N. Sharkovskii, A . L. Shilnikov.

Agradecimentos: Agradeço à Professora Maria Carvalho da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, pelo tempo que dedicou à revisão do presente texto, com sugestões que o melhoraram de forma substancial. Ao Professor Andrey Shilnikov, expresso também os meus agradecimentos, pela disponibilidade em facilitar material bibliográfico desde o início da recolha de dados para o artigo.

Figura 15: (a) Para além da matemática, um dos passatempos favoritos de L. P. Shilnikov era a pesca (Lago Lanier, Atlanta – 2007). (b) Shilnikov com a sua esposa Lyidmila (Golfo do México, Flórida – 2007). (c) Shilnikov com a sua esposa Lyidmila. Fotos do Álbum de Família – Cortesia de Andrey Shilnikov.

Referências

[1] V. S. Afraimovich, V. V. Bykov, L. P. Shilnikov, *On the appearance and structure of the Lorenz attractor*, Dokl. Acad. Sci. USSR, No. 234, 336–339, 1977

[2] V. S. Afraimovich, V. V. Bykov, L. P. Shilnikov, *On structurally unstable attracting limit sets of Lorenz attractor type*, Trans. Mosc. Math. Soc., 2, 153–216, 1983

[3] V. S. Afraimovich, L. M. Lerman, S. V. Gonchenko, *Leonid Pavlovich's - special issue on his 70th birthday*, Regular and Chaotic Dynamics, Vol. 15, No. 2–3, 101–106, 2010

[4] V. Alekseev, *Quasirandom dynamical systems. I. Quasirandom diffeomorphisms*, Mat. Sbornik, Tom. 76 (118), No. 1, 72–134, 1968

[5] A. A. Andronov, A. A. Vitt, *Zur Theorie des Mitmehmens von van der Pol*, Archiv fur Elektrotechnik, Bd. XXIV, 99, 1930

[6] A. A. Andronov, A. A. Vitt, S. E. Khaikin, *Theory of Oscillations*, Pergamon Press: Oxford, 1966

[7] A. A. Andronov, E. A. Leontovich, *Dynamical systems of first degree of roughness on the plane*, Amer. Math. Soc., Transl., II, Ser. 75, 149–199, 1968

[8] A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. E. Gordon, A. G. Maier, *The Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on a Plane*, Israel Program of Scientific Translations, Jerusalem, 1971

[9] A. A. Andronov, L. S. Pontryagin, *Systèmes grossières*, Dokl. Acad. Nauk. SSSR, 14, 5, 247–251, 1937

[10] D. V. Anosov, *Roughness of geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature*, Sov. Math. Dokl., 2, 1068–1070, 1962

[11] D. V. Anosov, *Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature*, Proc. Steklov Inst. Math., 90, 3–210, 1967

[12] V. I. Arnold, *Lectures on bifurcations and versal families*, Recrs. Math. Surv., 27(5), 54–123, 1973

[13] V. I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag (New York), 1982

[14] G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, Amer. Math. Soc., Colloquium Publications, 9, 1927

[15] G. D. Birkhoff, *Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques*, Memorial Pont. Acad. Sci. Novi. Lyncaei, Vol. 53, 1, 85–216, 1935

[16] A. Champneys, *To the memory of L.P. Shilnikov*, Dynamical Systems Magazine, webpage, 2012

[17] A. Chenciner, *Une promenade dans les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Texte écrit à l'occasion du centenaire de la mort de Henri Poincaré – `http://www.imcce.fr/Equipes/ASD/person/chenciner/chen`

[18] A. D. Dalmedico, *Early Developments of Nonlinear Science in Soviet Russia: The Andronov School at Gorky*, Science in Context, 17, 235–265, 2004

[19] P. Gaspard, R. Kapral, G. Nicolis, *Bifurcation phenomena near homoclinic systems: a two parameter analysis*, J. Stat. Phys., 35, 697–727, 1984

[20] N. K. Gavrilov, L. P. Shilnikov, *On three-dimensional dynamical systems close to systems with a structurally unstable homoclinic Poincaré curve*, I. Math. USSR Sb. 17, 467–485, 1972

[21] P. Glendinning, C. Sparrow, *Local and global behaviour near homoclinic orbits*, J. Stat. Phys., 35, 645–696, 1984

[22] S. V. Gonchenko, L. P. Shilnikov, D. V. Turaev, *On models with non-rough Poincaré homoclinic curves*, Physica D, 62, 1–14, 1993

[23] S. V. Gonchenko, L. P. Shilnikov, D. V. Turaev, *Dynamical phenomena in multi-dimensional systems with a structurally unstable homoclinic Poincaré curve*, Russian Acad. Sci. Dokl. Math., 47, 3, 410–415, 1993

[24] J. Guckenheimer, R. F. Williams, *Structural stability of Lorenz attractors*, Publ. Math. IHES, No. 50, 59–72, 1979

[25] J. Hadamard, *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques*, J. Math. Pures et Appl., 4, 27–73, 1898

[26] A. J. Homburg, B. Sandstede, *Homoclinic and Heteroclinic Bifurcations in Vector Fields*, Chapter 8 in Handbook of Dynamical Systems, Vol. 3, Elsevier, 2010

[27] Yu. S. Ilyashenko, S. Yu. Yakovenko, *Finite smooth normal forms of local families of diffeomorphisms and vector fields*, Uspechi. Mat. Nauk., Vol. 46, 1 (277), 1–39, 1991

[28] L. M. Lerman, L. P. Shilnikov, *Homoclinic structures in finite-dimensional system*, Sib. Math. J. 2, No.3, 408-417, 1988

[29] X.-B. Lin, *Using Melnikov's method to solve Shilnikov problems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 116A, 295–325, 1990

[30] A. M. Lyapunov, *Problème générale de la stabilité du mouvement*, Ann. de la Faculté des Sciences de Toulouuse, 9, 203–474, 1950

[31] A. M. Lyapunov, *Stability of Motion*, Academic Press (New York), 1966

[32] V. K. Melnikov, *On the stability of the center for time periodic perturbations*, Trudy Moskov. Mat. Obsc, 12, 3–52, 1963

[33] V. V. Nemytsky, V. V. Stepanov, *Qualitative theory of differential equations*, Princeton Mathematical Series, 22, 1960

[34] S. Newhouse, *The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphism*, Publ. Math. IHES, 50, 101–151, 1979

[35] M. Peixoto, *Structural stability on two-dimensional manifolds*, Topology, 1, 101–120, 1962

[36] H. Poincaré, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste – Tome I*, Gauthier-Villars et fils, 1892

[37] H. Poincaré, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste – Tome II*, Gauthier-Villars et fils, 1893

[38] H. Poincaré, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste – Tome III*, Gauthier-Villars et fils, 1899

[39] A. Pumariño, A. Rodriguez, *Persistence and coexistence of strange attractors in homoclinic saddle-focus connections*, Lect. Notes in Maths, Vol. 1658, Springer-Verlag, 1997

[40] A.A.P. Rodrigues, *Heteroclinic Phenomena* – Tese de Doutoramento, Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, 2012

[41] A.A.P. Rodrigues, I.S. Labouriau, M.A.D. Aguiar, *Chaotic double cycling*, Dynamical Systems: an International Journal, Vol. 26, (2), 199–233, 2011

[42] A.A.P. Rodrigues, I.S. Labouriau, M.A.D. Aguiar, *Um carrossel caótico: dinâmica perto de redes heteroclínicas*, Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, Número Especial, 103–109, 2011

[43] B. Sandstede, *Verzweigungstheorie homokliner Verdopplungen* – Tese de Doutoramento, University of Stuttgart, 1993

[44] L. P. Shilnikov, *Some cases of generation of periodic motion from singular trajectories*, Math. USSR Sbornik (61), 103, 443–466, 1963

[45] L. P. Shilnikov, *A case of the existence of a denumerable set of periodic motions*, Sov. Math. Dokl, No. 6, 163–166, 1965

[46] L. P. Shilnikov, *The existence of a denumerable set of periodic motions in four dimensional space in an extended neighbourhood of a saddle-focus*, Sov. Math. Dokl., 8(1), 54–58, 1967

[47] L. P. Shilnikov, *On a Poincaré–Birkhoff problem*, Math. USSR Sbornik, 3, 415–443, 1968

[48] L. P. Shilnikov, *On the generation of periodic motions from trajectories double asymptotic to an equilibrium state of saddle type*, Math. USSR Sbornik, 6, 427–437, 1968

[49] L. P. Shilnikov, *On a new type of bifurcation of multi-dimensional dynamical systems*, Sov. Math Dokl. 10, 1368–1371 1969

[50] L. P. Shilnikov, *A contribution to the problem of the structure of an extended neighbourhood of a rough equilibrium state of saddle-focus type*, Math. USSR Sbornik, 10, 91–102, 1970

[51] L. P. Shilnikov, *Homoclinic orbits: since Poincaré till today*, Weierstrass Institut fur Angewandte Analysis und Stochastik, Berlin, Pre–print 571, 2000

[52] L. P. Shilnikov, A. L. Shilnikov, D. M. Turaev, L. U. Chua, *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics*, Part I, World Scientific Publishing Co., 1998

[53] L. P. Shilnikov, A. L. Shilnikov, D. M. Turaev, L. U. Chua, *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics*, Part II, World Scientific Publishing Co., 2001

[54] S. Smale, *Diffeomorphisms with many periodic orbits*, Diff. Comb. Topology, ed. S. Cairus, Princeton University Press, 63–86, 1960

[55] C. Tresser, *About some theorems by L. P. Shilnikov*, Ann. Inst. Henri Poincaré, No. 40, 441–461, 1984

[56] D. Turaev, L. P. Shilnikov, *An example of a wild strange attractor*, Sbornik. Math. 189, 2, 291–314, 1998

[57] S. Wiggins, *Global Bifurcations and Chaos: Analytical Methods*, Springer-Verlag, 1988