Matemática Recreativa

Editores:
Jorge Picado e Paula Mendes Martins

6174: um problema com números de quatro algarismos

Paulo Eduardo Oliveira
CMUC, Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra
e-mail: `paulo@mat.uc.pt`

Resumo: Aborda-se um problema clássico da chamada matemática recreativa. Uma operação definida para números com quatro algarismos, com pelo menos um distinto dos outros, é tal que, quando iterada, converge rapidamente para o número mágico 6174. Apresentamos uma descrição completa do número de iterações necessárias para se chegar ao 6174 e calcula-se o número esperado de iterações quando escolhemos arbitrariamente o número inicial. Referem-se algumas extensões deste problema clássico.

Abstract: We treat a classical problem in recreational mathematics. An operation defined on numbers with four non equal digits shows a peculiar behaviour: when iterated the observed values rapidly reach the magical number 6174. We give a complete description of the number of iterations necessary to reach 6174 and compute the expected number of iterations when the starting number is randomly chosen. Finally, we mention some extensions of the problem.

palavras-chave: constante de Kaprekar; iteração; ponto fixo.

keywords: Kaprekar's constant, iteration, fixed point.

Uma das matérias clássicas em problemas de olimpíadas de Matemática são questões à volta da manipulação de números. O problema que vamos discutir, embora tenha surgido na literatura bastante mais cedo, foi proposto aos participantes na final das Olimpíadas Portuguesas de Matemática em 1992 como sobremesa (literalmente, já que foi proposto fora da competição, num final de almoço):

Escolha-se um qualquer número com quatro algarismos que não sejam todos iguais entre si; reordenem-se estes algarismos por ordem decrescente e também por ordem crescente; faça-se a diferença entre o maior e o menor destes dois novos números; finalmente, com o resultado desta operação, repita-se o procedimento (podem considerar-se números com menos algarismos desde que se completem com 0 à esquerda para obter os quatro algarismos).

Por exemplo, escolha-se o número inicial 7483. A operação definida consiste em calcular $8743 - 3478 = 5265$. Repetindo agora o procedimento com este resultado obtemos:

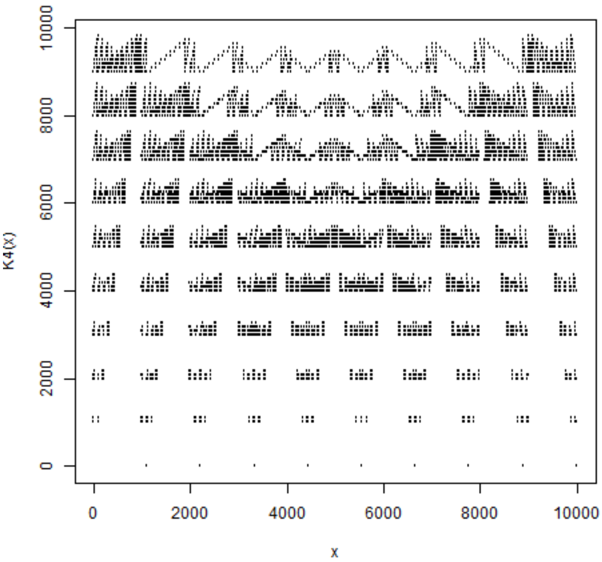
$$\begin{aligned} &6552 - 2556 = 3996 \longrightarrow 9963 - 3699 = 6264 \\ &\qquad \longrightarrow 6642 - 2466 = 4176 \longrightarrow 7641 - 1467 = 6174, \end{aligned}$$

sendo agora óbvio que esta operação nos manterá no número 6174.

É simples verificar que este comportamento ocorre se escolhermos qualquer outro número de quatro algarismos que não sejam todos iguais entre si. Ao final de algumas, relativamente poucas, repetições desta operação encontramos o número mágico 6174.

Este problema foi introduzido pelo matemático indiano D.R. Kaprekar em 1949, que descobriu esta curiosa propriedade dos números de quatro algarismos. Kaprekar teve um particular interesse no estudo de propriedades de números deixando várias contribuições na área da Teoria dos Números e tornando-se uma figura conhecida na Matemática Recreativa. Para uma descrição da vida e contribuições matemáticas de Kaprekar sugere-se a consulta de Mohanty [4] ou Gupta [2]. O número 6174 acabou por ficar conhecido na literatura como *constante de Kaprekar*. Mereceu a atenção de muitos dos interessados em matemática recreativa e resolução de problemas. No que se segue vamos explicar o que se passa com esta operação, nomeadamente verificar que o 6174 é o único número que é transformado nele próprio, que chegamos sempre ao 6174 qualquer que seja o número inicial e, principalmente, dado um qualquer número vamos determinar o número de repetições desta operação que são necessárias para chegarmos ao 6174.

Figura 1: O gráfico de K_4.



Dado um número natural $n \leq 9999$, representemos por $K_4(n)$ o resultado da operação definida. Por exemplo, $K_4(7483) = 5265$. A Figura 1 mostra o gráfico de K_4 para valores de n entre 0 e 9999. O exemplo referido acima sugere que, se traçarmos a bissectriz dos quadrantes ímpares esta apenas encontra um único ponto do gráfico na Figura 1, o correspondente à abcissa 6174.

Uma primeira observação óbvia: se permutarmos a ordem dos algarismos de 7483, a imagem por K_4 não se altera, isto é, por exemplo, $K_4(4837) = 5265$. Esta propriedade é válida para qualquer número com quatro algarismos. Assim, para obter uma primeira simplificação iremos analisar diretamente apenas o caso em que os algarismos de n estão ordenados por ordem decrescente. Para melhor descrever o efeito de K_4 introduzimos mais uma representação para números com quatro algarismos: se a, b, c, d são algarismos, o número obtido por justaposição $abcd$ representa $1000a + 100b + 10c + d$. Assim, o número n em que os seus algarismos estão ordenados por ordem decrescente pode-se representar na forma $(u+k_3)(u+k_2)(u+k_1)u$ onde $u \in \{0, \ldots, 9\}$, $k_3 \geq k_2 \geq k_1 \geq 0$ com $k_3 \geq 1$ por forma a garantir que os quatro algarismos não são todos iguais entre si e tal que $u + k_3 \in \{0, \ldots, 9\}$. Podemos agora descrever de forma mais eficiente o efeito da operação K_4. Para isso distinguimos dois casos:

Caso 1: $k_1 = k_2$. Para números desta forma temos,

$$\begin{aligned}
&K_4\Big((u+k_3)(u+k_1)(u+k_1)u\Big)\\
&\quad = (u+k_3)(u+k_1)(u+k_1)u \;-\; u(u+k_1)(u+k_1)(u+k_3)\\
&\quad = (k_3-1)99(10-k_3).
\end{aligned}$$

Isto é, após a primeira aplicação de K_4 encontramos sempre um número da forma $(k_3-1)99(10-k_3)$. Note-se que o algarismo das unidades u é irrelevante após esta utilização de K_4. Basta agora analisar os casos em que $k_3 = 1, \ldots, 5$, tendo em conta a observação acima sobre a invariância de K_4 quando se permutam os seus algarismos. A inspeção direta destes cinco casos indica o número de repetições adicionais da operação K_4 até encontrarmos o 6174:

$(k_3-1)99(10-k_3)$	Número de repetições
0999	4
1998	3
2997	5
3996	3
4995	5

Há que não esquecer que, para descrever o número de repetições em relação ao número inicial, há que adicionar 1 ao número de repetições calculado acima:

$(u+k_3)(u+k_1)(u+k_1)u$	Número de repetições
$k_3 = 1$	5
$k_3 = 2$ ou $k_3 = 9$	4
$k_3 = 3$ ou $k_3 = 8$	6
$k_3 = 4$ ou $k_3 = 7$	5
$k_3 = 5$ ou $k_3 = 6$	6

Caso 2: $k_2 > k_1$, isto é, $k_2 \geq k_1 + 1$. Temos agora

$$\begin{aligned}
&K_4\Big((u+k_3)(u+k_2)(u+k_1)u\Big)\\
&\quad = (u+k_3)(u+k_2)(u+k_1)u \;-\; u(u+k_1)(u+k_2)(u+k_3)\\
&\quad = k_3(k_2-k_1-1)(9+k_1-k_2)(10-k_3)\\
&\quad = k_3(k_2-k_1-1)(8-(k_2-k_1-1))(10-k_3).
\end{aligned}$$

Mais uma vez, o algarismo das unidades u é irrelevante após esta aplicação de K_4. Além disso, após a operação K_4 a soma do algarismo das unidades com o das dezenas de milhar é sempre igual a 10 e a soma dos algarismos das dezenas e das centenas é igual a 8. Tal como no caso anterior há que analisar diretamente o que acontece aos números desta forma. Atendendo à invariância de K_4 por permutações dos algarismos, basta considerar os casos em que $k_3 = 5, 6, 7, 8, 9$ e $k_2 - k_1 - 1 = 4, 5, 6, 7, 8$, o que perfaz um total de 25 números a inspecionar diretamente. A tabela abaixo resume o número de aplicações da operação K_4 a partir de $k_3(k_2-k_1-1)(8-(k_2-k_1-1))(10-k_3)$ até encontrarmos o 6174:

k_3	$k_2 - k_1 - 1$: 4	3 ou 5	2 ou 6	1 ou 7	0 ou 8
5	4	1	4	6	6
4 ou 6	4	3	2	1	6
3 ou 7	4	2	5	4	2
2 ou 8	6	1	4	5	2
1 ou 9	6	6	2	2	3

Para a tradução desta tabela para a descrição do número de repetições de K_4 a partir do número inicial $(u + k_3)(u + k_2)(u + k_1)u$ adiciona-se 1 ao número de repetições encontrado, tendo o cuidado de não o fazer nos casos em que se encontra logo o 6174 na primeira aplicação de K_4. Isto vai fazer depender a resposta do algarismo das unidades. De facto, para que $k_3(k_2 - k_1 - 1)(9 + k_1 - k_2)(10 - k_3) = 6174$, é necessário que $k_3 = 6$, $k_2 - k_1 = 2$ e $u \leq 3$, de forma a que $u + k_3 = u + 6 \leq 9$. Podemos assim construir a tabela que descreve o número de repetições da operação K_4 até encontrarmos o 6174:

k_3	$k_2 - k_1$: 5	4 ou 6	3 ou 7	2 ou 8	1 ou 9
5	5	2	5	7	7
4 ou 6	5	4	3	0, 1 ou 2*	7
3 ou 7	5	3	6	5	3
2 ou 8	7	2	5	6	3
1 ou 9	7	7	3	3	4

* Igual a 0 se o número inicial for o 6174, igual a 1 se $k_3 = 6$, $k_2 - k_1 = 2$ e $u \leq 3$, e igual a 2 nos restantes casos.

A conclusão surpreendente das tabelas acima é que são necessárias no máximo 7 repetições de K_4 para chegar ao único número de quatro algarismos que verifica $K_4(n) = n$, isto é, ao único ponto fixo de K_4. Além disso, qualquer número de repetições inferior ou igual a 7 pode ocorrer, incluindo o 0 que corresponde ao próprio 6174.

Consideremos agora a seguinte pergunta: *se escolhermos um número ao acaso quantas repetições de K_4 podemos esperar fazer até obter o 6174?* Para dar uma resposta necessitamos de contar quantos números com quatro algarismos encontramos correspondentes a cada um dos casos em que efetuámos a contagem do número de repetições da aplicação de K_4.

Contagens no caso 1: Recorde-se que o número, após a ordenação dos seus algarismos, é da forma $(u+k_3)(u+k_1)(u+k_1)u$ e que $k_3 \in \{1,\ldots,9\}$.

- Comecemos com o caso $k_3 = 1$. Como $k_3 \geq k_1 \geq 0$, os números a considerar são de uma das seguintes formas: $(u+1)uuu$ ou $(u+1)(u+1)(u+1)u$. Para cada uma destas formas u pode assumir todos os valores desde 0 até 8, pois $u+1 \leq 9$. Finalmente, há que considerar todas as permutações dos algarismos, para o que basta escolher a posição em que se coloca o único algarismo distinto dos outros, o que dá portanto 4 possibilidades. Assim, há $9\times2\times4 = 72$ números de quatro algarismos que, após a ordenação dos seus algarismos produzem um número da forma $(u+k_3)(u+k_1)(u+k_1)u$ com $k_3 = 1$.

- Suponhamos agora que $k_3 = 2$, isto é, temos um número que, após ordenação dos algarismos, têm a forma $(u+2)(u+k_1)(u+k_1)u$. Os valores admissíveis para u são agora $0,\ldots,7$ pois $u+2 \leq 9$. Como $k_3 \geq k_1 \geq 0$, os valores possíveis para k_1 são 0, 1 ou 2. Se $k_1 = 0$, o número é da forma $(u+2)uuu$, existindo 4 possibilidades quando se permutam os algarismos. Se $k_1 = 2$ temos também as mesmas 4 possibilidades já que o número é da forma $(u+2)(u+2)(u+2)u$. Finalmente, se $k_1 = 1$ o número fica com a forma $(u+2)(u+1)(u+1)u$. Para contar quantos números produzem esta forma após ordenação temos de determinar todas as maneiras de colocar os dois algarismos iguais entre si e multiplicar por 2 atendendo à colocação de $u+1$ e u: $2\times\binom{4}{2} = 12$. Assim, com $k_3 = 2$ temos $8\times2\times4 + 8\times1\times12 = 160$ possibilidade de escolha de números com quatro algarismos que, após ordenação dos seus algarismos, têm a forma $(u+2)(u+k_1)(u+k_1)u$, com $k_1 = 0,1,2$.

- Reproduzindo os argumentos acima para o caso $k_3 = 3$ encontramos $7\times2\times4 + 7\times2\times12 = 224$ números com quatro algarismos que, após ordenação dos seus algarismos, têm a forma $(u+3)(u+k_1)(u+k_1)u$, com $k_1 = 0,1,2,3$.

Prosseguindo da forma descrita construímos facilmente a tabela abaixo que apresenta a contagem dos números existentes para cada escolha possível para k_3:

k_3	
1	$9{\times}2{\times}4 = 72$
2	$8{\times}2{\times}4 + 8{\times}1{\times}12 = 160$
3	$7{\times}2{\times}4 + 7{\times}2{\times}12 = 224$
4	$6{\times}2{\times}4 + 6{\times}3{\times}12 = 264$
5	$5{\times}2{\times}4 + 5{\times}4{\times}12 = 280$
6	$4{\times}2{\times}4 + 4{\times}5{\times}12 = 272$
7	$3{\times}2{\times}4 + 3{\times}6{\times}12 = 240$
8	$2{\times}2{\times}4 + 2{\times}7{\times}12 = 184$
9	$1{\times}2{\times}4 + 1{\times}8{\times}12 = 104$

Contagens no caso 2: Pretendemos agora contar números que após a ordenação dos seus algarismos sejam da forma $(u+k_3)(u+k_2)(u+k_1)u$ com $k_3 \geq k_2 > k_1 \geq 0$. Comecemos por notar que, para cada k_3, o valor de $k_2 - k_1$ só pode variar entre 1 e k_3.

- Suponhamos que $k_3 = 1$, o que implica então que $k_2 - k_1 = 1$, isto é, temos necessariamente um número da forma $(u+1)(u+1)uu$. Como $u + 1 \leq 9$, u pode variar em 0 e 8, isto é, há 9 escolhas possíveis. Falta ainda contar as diferentes permutações dos algarismos: $\binom{4}{2} = 6$. Assim, existem $9 \times 6 = 54$ números de quatro algarismos que, após ordenação dos seus algarismos, produzem um número da forma $(u+k_3)(u+k_2)(u+k_1)u$ com $k_3 = 1$ e $k_3 \geq k_2 > k_1 \geq 0$.

- Se $k_3 = 2$ temos $k_2 - k_1 = 1$ ou $k_2 - k_1 = 2$.

  - $k_2 - k_1 = 1$: Procuramos números que após ordenação dos seus algarismos sejam da forma $(u+2)(u+k_1+1)(u+k_1)u$. Como $u+2 \leq 9$, existem 8 valores possíveis para u: $0, \ldots, 7$. Quanto a k_1 pode ser 0 ou 1, pois $k_1 + 1 \leq 2$. Se $k_1 = 0$ o número após ordenação dos algarismos é da forma $(u+2)(u+1)uu$. Para obter a contagem há que ter em conta as escolhas possíveis para a colocação dos dois algarismos iguais, $\binom{4}{2} = 6$, e multiplicar por 2, por causa da colocação de $u+1$ e $u+2$. Encontramos assim 8×12 números. Analogamente, se $k_1 = 1$ o número com os algarismos ordenados tem a forma $(u+2)(u+2)(u+1)u$, sendo a contagem efetuada de forma semelhante. Assim, quando $k_2 - k_1 = 1$ encontramos um total de $8{\times}2{\times}12 = 192$ números de quarto algarismos.

  - $k_2 - k_1 = 2$: O número com os algarismos ordenados é da forma $(u+2)(u+2)uu$. Há 8 valores possíveis para u e, para cada escolha, existem $\binom{4}{2} = 6$ permutações dos algarismos, isto é, existem $8\times 6 = 48$ números.

- Seja $k_3 = 3$. O algarismo das dezenas de milhar é $u + 3$, pelo que existem agora 7 valores possíveis para a escolha de u. Quanto a $k_2 - k_1$ existem três valores possíveis.

  - $k_2 - k_1 = 1$: O número é da forma $(u + 3)(u + k_1 + 1)(u + k_1)u$. Como $k_1 + 1 \leq 3$, os valores possíveis para k_1 são 0, 1 ou 2.

    * $k_1 = 0$: Neste caso temos o número $(u+3)(u+1)uu$ havendo $2\times\binom{4}{2} = 12$ permutações destes algarismos. Existem portanto 7×12 números a considerar.
    * $k_1 = 1$: Temos então números da forma $(u+3)(u+2)(u+1)u$, havendo $4! = 24$ permutações distintas dos algarismos.
    * $k_1 = 2$: O número fica da forma $(u + 3)(u + 3)(u + 2)u$, cuja contagem é análoga ao caso em que $k_1 = 0$, isto é, existem 7×12 números.

    Portanto, existem $7\times 12\times 2 + 7\times 24 = 336$ números.

  - $k_2 - k_1 = 2$: O número tem a forma $(u + 3)(u + k_1 + 2)(u + k_1)u$. Os valores possíveis para k_1 são 0 ou 1 obtendo-se números da forma $(u+3)(u+2)uu$ ou $(u+3)(u+3)(u+1)u$, cujas contagens se fazem de forma análoga para encontrar $7\times 12\times 2 = 168$ números.
  - $k_2 - k_1 = 3$: O número fica da forma $(u + 3)(u + 3)uu$, havendo $7\times 6 = 42$ permutações a considerar.

- Se $k_3 = 4$ há 6 valores possíveis para a escolha de u. Repetindo os argumentos dos casos anteriores conclui-se que existem

  - $6\times 12\times 2 + 6\times 24\times 2 = 432$ números correspondentes a $k_2 - k_1 = 1$;
  - $6\times 12\times 2 + 6\times 24\times 1 = 288$ números correspondentes a $k_2 - k_1 = 2$;
  - $6\times 12\times 2 = 144$ números correspondentes a $k_2 - k_1 = 3$, e
  - $6\times 6 = 36$ números correspondentes a $k_2 - k_1 = 4$.

- Se $k_3 = 5$ há 5 valores possíveis para a escolha de u. Existem

  - $5\times 12\times 2 + 5\times 24\times 3 = 480$ números correspondentes a $k_2 - k_1 = 1$;
  - $5\times 12\times 2 + 5\times 24\times 2 = 360$ números correspondentes a $k_2 - k_1 = 2$;

– $5{\times}12{\times}2 + 5{\times}24{\times}1 = 240$ números correspondentes a $k_2 - k_1 = 3$;

– $5{\times}12{\times}2 = 120$ números correspondentes a $k_2 - k_1 = 4$, e

– $5{\times}6 = 30$ números correspondentes a $k_2 - k_1 = 5$.

É agora simples completar as contagens de números utilizando sempre o mesmo princípio. A tabela abaixo condensa a informação sobre a contagem de números, indicando a negrito, o número de repetições de K_4 até obtermos 6174.

	$k_2 - k_1$								
k_3	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	54; **4**								
2	192; **3**	48; **6**							
3	336; **3**	168; **5**	42; **6**						
4	432; **7**	288; **2**	144; **3**	36; **4**					
5	480; **7**	360; **7**	240; **5**	120; **2**	30; **5**				
6	480; **7**	384; **1***	288; **3**	192; **4**	96; **5**	24; **4**			
7	432; **3**	360; **5**	288; **6**	216; **3**	144; **5**	72; **3**	18; **6**		
8	336; **3**	288; **6**	240; **5**	192; **2**	144; **7**	96; **2**	48; **5**	12; **6**	
9	192; **4**	168; **3**	144; **3**	120; **7**	96; **7**	72; **7**	48; **3**	24; **3**	6; **4**

* Inclui o próprio 6174 (após ordenação dos algarismos) para o qual são necessárias 0 repetições de K_4.

Podemos agora para cada valor observável $z = 0, \ldots, 7$, fazer a contagem de quantos números necessitam de z repetições de K_4 ou exprimir isso em termos de probabilidades.

z	0	1	2	3
Contagem	1	383	696	2400
Probab.	0.00010	0.03834	0.06967	0.24024
z	4	5	6	7
Contagem	768	1902	1656	2184
Probab.	0.07688	0.19039	0.16577	0.21862

Da tabela acima verificamos facilmente que, escolhendo ao acaso o número inicial, há dois resultados para o número de iterações que correspondem a quase metade da probabilidade. De facto, a probabilidade de número de iterações ser 3 ou 7 perfaz 0.45886. Mas, o mais provável é cairmos num caso em que sejam necessárias 3 iterações. Note-se ainda que a probabilidade de necessitarmos de pelo menos 3 iterações para chegar ao ponto fixo de K_4 é 0.89189, isto é, este será o caso em quase 90% das escolhas. Se calcularmos as probabilidades de necessitarmos no máximo de z repetições, encontramos os seguintes valores:

z	0	1	2	3
Probab. núm. repetições $\leq z$	0.00010	0.03844	0.10811	0.34835
z	4	5	6	7
Probab. núm. repetições $\leq z$	0.42523	0.61567	0.78138	1

Isto é, em cerca de metade dos casos, necessitaremos de até 4 repetições de K_4 para encontrar número 6174. É também imediato calcular o número médio de repetições da operação K_4 até encontrarmos o 6174, igual a 4.68278, enquanto que a mediana fica entre 4 e 5.

É claro que o tratamento anterior pressupõe a escolha ao acaso entre os números cujos quatro algarismos não são todos iguais entre si do ponto de partida. Mas não tem que ser assim... De facto, quando confrontado com este problema e após nos apercebermos de que a repetição de K_4 nos conduz ao 6174, quase sempre se tenta encontrar pontos de partida que aumentem o número de repetições escolhendo números com 2 ou 3 algarismos iguais. É agora simples, utilizando a mesma decomposição, efectuar as contagens nestes universos reduzidos.

Números com três algarismos iguais: É evidente que todos os números com três algarismos iguais estão incluídos no *caso 1* acima. Isto é, teremos números que, após ordenação dos seus algarismos, são da forma $(u+k_3)uuu$ ou $(u+k_3)(u+k_3)(u+k_3)u$. Atendendo a que u e $u+k_3$ são algarismos e $k_3 \geq 1$, existem, para cada uma das formas indicadas, $4\times(10-k_3)$ números de quatro algarismos. Temos assim os seguintes valores:

k_3	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Repetições de K_4	5	4	6	5	6	6	5	6	4
Contagem	72	64	56	48	40	32	24	16	8

Existem, portanto, 360 números de quatro algarismos nestas condições e há apenas 3 possibilidades distintas para o número de repetições:

z	4	5	6
Contagem	72	144	144
Probab.	0.20	0.40	0.40

O valor médio correspondente a esta distribuição é igual a 5.2, um pouco acima do valor médio encontrado no caso anterior.

Números com dois algarismos iguais: Encontramos agora números desta forma entre os tratados no *caso 1* e os tratados no *caso 2*.

- Os que provêm do *caso 1* são agora simples de contar: como temos $k_1 = k_2$ basta descontar às contagens iniciais os casos em que há três algarismos iguais, que foram contados imediatamente acima.
- Quanto aos números incluídos no *caso 2*, comecemos por observar que podemos assumir que $1 \leq k_2 - k_1 \leq k_3$. O número, após ordenação dos algarismos, é da forma $(u+k_3)(u+k_2)(u+k_1)u$ com $k_2 > k_1$, pelo que só terá dois algarismos iguais se $u = u + k_1$ ou $u + k_3 = u + k_2$. Se $k_2 - k_1 = k_3$ só poderemos escolher $k_1 = 0$ encontrando números da forma $(u + k_3)(u + k_3)uu$. A contagem destes números faz-nos encontrar $\binom{4}{2} \times (10 - k_3)$. Em todos os outros casos, isto é quando $1 \leq k_2 - k_1 < k_3$ encontramos $2 \times 2 \times \binom{4}{2} \times (10 - k_3)$ números de quatro algarismos. Podemos agora refazer a tabela da página 123 com as contagens de números com dois algarismos iguais (a negrito indica-se o número de repetições de K_4):

	$k_2 - k_1$								
k_3	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	54; **4**								
2	192; **3**	48; **6**							
3	168; **3**	168; **5**	42; **6**						
4	144; **7**	144; **2**	144; **3**	36; **4**					
5	120; **7**	120; **7**	120; **5**	120; **2**	30; **5**				
6	96; **7**	96; **1**	96; **3**	96; **4**	96; **5**	24; **4**			
7	72; **3**	72; **5**	72; **6**	72; **3**	72; **5**	72; **3**	18; **6**		
8	48; **3**	48; **6**	48; **5**	48; **2**	48; **7**	48; **2**	48; **5**	12; **6**	
9	24; **4**	24; **3**	24; **3**	24; **7**	24; **7**	24; **7**	24; **3**	24; **3**	6; **4**

Finalmente, reorganizando a informação contida na tabela acima, e somando as contagens provenientes do *caso 1* encontramos os seguintes valores para o número de repetições no caso de escolha inicial de um número com dois algarismos iguais:

z	0	1	2	3
Contagem	0	96	360	960
Probab.	0.00000	0.02051	0.07692	0.20513
z	4	5	6	7
Contagem	431	1176	1056	600
Probab.	0.09231	0.25128	0.22564	0.12821

É imediato verificar que, também neste universo reduzido para a escolha o ponto de partida, em cerca de metade dos casos não necessitaremos de mais do que 4 repetições de K_4. O valor médio do número de repetições é agora igual a 4.66669, ou seja, um pouco menos do que aquando da escolha livre do número inicial.

Números com os algarismos todos distintos: Basta agora às contagens globais descontar as obtidas nas análises anteriores para encontrar:

z	0	1	2	3
Contagem	1	287	336	1440
Probab.	0.000202	0.057980	0.067879	0.290909
z	4	5	6	7
Contagem	264	582	456	1584
Probab.	0.053333	0.117576	0.092121	0.320000

O número médio de repetições é, para escolhas ao acaso de números desta família, igual a 4.6604, também um pouco abaixo do valor médio global calculado acima. Note-se ainda que este é o valor médio mais baixo entre os aqui calculados, pelo que serão os números com algarismos todos distintos aqueles que se espera conduzirão ao menor número de repetições de K_4.

Não é difícil, embora seja fastidioso, construir o quadro completo que descreve a aplicação sucessiva da função de Kaprekar K_4. E, naturalmente, a utilização de meios computacionais cada vez mais potentes permite tornar essa tarefa em algo de rotineiro. Foi uma variante desta abordagem que utilizámos para construir o gráfico inicial que representa K_4. Podemos considerar agora a extensão natural deste problema que consiste em saber o que acontece se trabalharmos com números com d algarismos. Isto é, definindo K_d no conjunto dos números com d algarismos em que estes não são todos iguais entre si, como a diferença entre o número que se obtém ordenando por ordem decrescente os algarismos e o número que se obtém ordenando-os por ordem crescente e repetindo esta operação com o resultado, será que se chega a algum ponto fixo? A resposta, obtida por inspeção direta de todos os casos possíveis mostra que se $d = 5$ ou $d = 7$ não existe ponto fixo. Mas existem ciclos de números para os quais a repetição sucessiva de K_d acaba por convergir. Por exemplo, para $d = 5$, a repetição sucessiva da aplicação de K_5 conduzir-nos-á a um dos seguintes conjuntos: $C_{5,1} = \{53955, 59994\}$, $C_{5,2} = \{61974, 82962, 75933, 63954\}$ ou $C_{5,3} = \{62964, 71973, 83952, 74943\}$, sendo simples verificar que se, ao iterar K_5, cairmos dentro de um dos $C_{5,j}$ a continuação da iteração de K_5 manter-nos-á sempre no mesmo $C_{5,j}$. No caso $d = 6$ existem dois pontos fixos (no sentido estrito): 549945 e 631764. Prichett, Ludington e Lapenta [5] estenderam a noção de ponto fixo para poder obter uma descrição mais genérica: n é dito um ponto fixo (generalizado) de K_d se a aplicação iterada desta função pode fazer aparecer o número n. Note-se que esta noção de ponto fixo permite a ocorrência de ciclos nos valores observados, como os que foram referidos no caso $d = 5$. Estes autores mostraram que para $d > 4$, a função K_d tem sempre pelos menos dois pontos fixos, isto é, existem pontos fixos apenas no sentido generalizado. Assim, os únicos casos em que existe um único n com d algarismos tal que $K_d(n) = n$ são $d = 4$, que analisámos aqui, e também $d = 3$, que é bastante mais simples de analisar. Note-se que a abordagem computacional, utilizando um método de força bruta, se torna cada vez mais morosa. De facto, uma simulação simples mostra que quando se passa do cálculo de K_d para o de K_{d+1} descrevendo os valores para todos os números com d e $d+1$ algarismos, respetivamente, o tempo de execução aumenta muito rapidamente: para $d = 4$ leva cerca de 2.5 segundos, para $d = 5$ cerca de 20 segundos, enquanto que para $d = 6$ são necessários mais do que 15 minutos. E estamos a falar apenas do cálculo do K_d para todos os pontos do seu domínio. Falta ainda considerar o tratamento da aplicação iterativa de K_d...

É também natural considerar a extensão do problema tratando números representados em bases distintas. Por exemplo, Hasse e Prichett [3] mostraram que considerando números de quatro algarismos representados na base g, apenas existem constantes de Kaprekar para as bases $g = 5{\times}2^n$, com $n = 0$ ou n ímpar. A procura de resultados e algoritmos para construção explícita das constantes de Kaprekar, mesmo que no sentido generalizado referido acima, em que a função entre em ciclo, continua a despertar o interesse de matemáticos como, por exemplo, em Walden [6].

Para terminar, alguns comentários em direção à utilização de conceitos matemáticos mais avançados e alguns problemas para os mais destemidos. As considerações acima sugerem uma abordagem explorando as propriedades de ponto fixo. Ora os teoremas de ponto fixo exigem normalmente que a função em estudo seja uma contração relativamente a alguma noção de distância, isto é, se $\mathsf{dist}(n, m)$ representar a distância entre dois números n e m, então deveria existir algum $\alpha \in (0, 1)$ tal que $\mathsf{dist}(K_d(n), K_d(m)) \leq \alpha \mathsf{dist}(n, m)$. No caso presente, uma primeira dificuldade consiste em saber que noção de distância deveremos utilizar. Um resultado curioso, que me foi apontado pelo meu colega Alexander Kovačec, é o seguinte:

Teorema [C. Bessaga[1]]
Seja U uma função definida num conjunto X e com valores em X tal que a

composição com n iterações $U \circ \cdots \circ U$ tem, para cada $n \geq 1$, exatamente um único ponto fixo. Seja ainda $\alpha \in (0,1)$. Então existe uma métrica (completa) dist *em X tal que* $\mathsf{dist}(U(x), U(y)) \leq \alpha \mathsf{dist}(x, y)$*, para todo o $x, y \in X$.*

Voltando ao problema de Kaprekar, é evidente que K_3 e K_4 satisfazem as condições deste teorema. Então qual será a métrica cuja existência o teorema anuncia? E será possível estender este teorema quando apenas existem pontos fixos no sentido generalizado referido acima, isto é, em que a função entra em ciclo?

Referências

[1] C. Bessaga, "On the converse of Banach's 'fixed point principle' ", *Colloq. Math.*, Vol. 7, No. 1 (1959), pp. 41-43.

[2] R.C. Gupta, "D. R. Kaprekar—a birth centenary tribute (1905–1986)", *Indian J. Hist. Sci.*, Vol. 41, No. 2 (2006), pp. 223–226.

[3] H. Hasse e G.D. Prichett, "The determination of all four-digit Kaprekar constants", *J. Reine Angew. Math.*, Vols. 299/300 (1978), pp. 113–124.

[4] S.P. Mohanty, "D. R. Kaprekar—a life-long devotee of mathematics", *Bull. Math. Assoc. India*, Vol. 10, No. 01-04 (1978), pp. 61–73.

[5] G.D. Prichett, A.L. Ludington e J.F. Lapenta, "The determination of all decadic Kaprekar constants", *Fibonacci Quart.*, Vol. 19, No. 1 (1981), pp. 45–52.

[6] B.L. Walden, "Searching for Kaprekar's constants: algorithms and results", *Int. J. Math. Math. Sci.*, Vol. 18 (2005), pp. 2999–3004.