Problemas

Editor:
Jorge Nuno Silva

Notas sobre o Problema anterior e *Novos horizontes em Geometria*

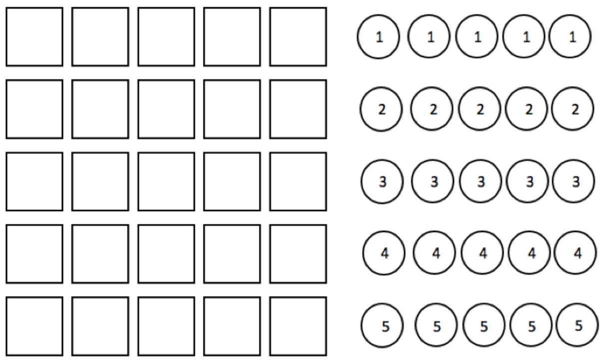
Jorge Nuno Silva

Os leitores são convidados a enviar, para eventual publicação, soluções, comentários, propostas de problemas, etc. Essa correspondência deve ser enviada para a SPM, ao cuidado do editor desta secção. Há livros da Gradiva para sortear entre as soluções recebidas em cada número.

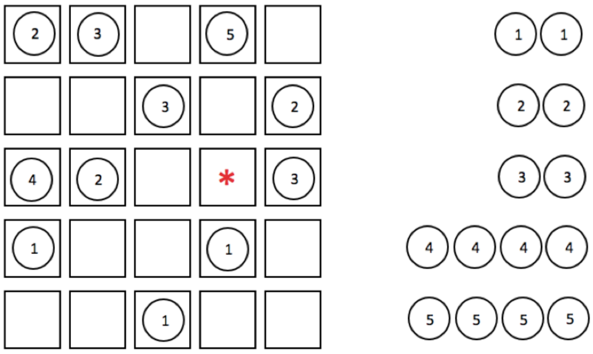
Relembremos o problema do número anterior.

Erdös Latino

Neste jogo cada jogada consiste em colocar um disco com um número num quadrado livre, desde que tal movimento não origine nenhuma repetição em nenhuma linha ou coluna (regras do *quadrado latino*).



Por exemplo



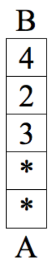
Na casa marcada não se pode introduzir nenhum número

Dois jogadores alternam. O primeiro que, na sua vez, não conseguir jogar por não ter nenhum lance legal ao seu dispor, perde.

Pode acontecer que o tabuleiro fique completamente preenchido com peças. Neste caso o vencedor é o jogador que tiver conquistado mais colunas.

Uma coluna é conquistada pelo jogador que, na sua vez, primeiro consegue uma sequência crescente de comprimento 3 nessa coluna. Crescente, neste contexto, significa que os números crescem de si para o adversário.

Exemplo:



Se o jogador A colocar um 1 numa das casas marcadas com asteriscos, ganhará esta coluna (sequência 1-3-4); se o jogador B colocar o 5 num desses quadrados, ganhará ele a coluna (sequência 2-3-5).

Pode acontecer uma coluna conter sequências crescentes de comprimento 3 para ambos os jogadores, como neste exemplo (1-2-4, 2-3-5):

4
2
3
1
5

Portanto, é importante saber quem o fez primeiro, conquistando a coluna.

Este jogo pode ser praticado em três níveis:

I (Principiante) — As peças baralham-se e cada jogador deve tirar uma à sorte em cada turno.

II (Iniciado) — As peças mostram sempre as suas faces e cada jogador, quando lhe toca a vez, escolhe livremente qual jogar.

III (Misto) — As peças baralham-se no início e distribuem-se 12-13 entre os jogadores. O que recebeu 13 começa.

Dois problemas para os leitores:

1. Mostre que, na versão II, o primeiro jogador pode escolher uma estratégia que lhe permite nunca ficar sem lance legal.

2. Mostre que este jogo, em qualquer das suas versões, nunca pode terminar empatado.

1. A estratégia consiste em começar por colocar o 3 na casa central e, a partir daí, sempre que o segundo jogar x, jogar $6 - x$ na casa simétrica relativamente à casa central.

2. Para garantir que cada coluna é ganha por um dos jogadores temos de recorrer a um teorema de Erdös e Szekeres de 1935. Em geral, este resultado estabelece que dada uma sequência com $n^2 + 1$ números diferentes, podemos encontrar uma subsequência crescente com $n + 1$ números ou uma subsequência decrescente com $n + 1$ números. No caso do nosso jogo temos $n = 2$.

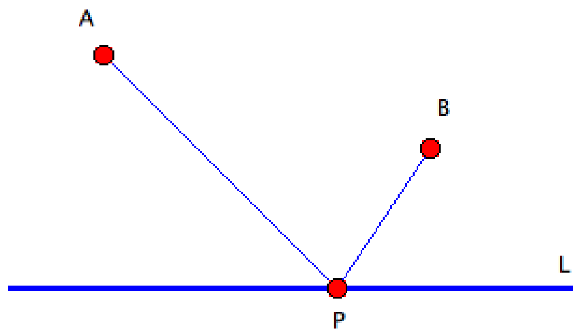
Novos horizontes em Geometria

A Mathematical Association of America publicou em 2012 um livro da dupla Tom Apostol & Mamikon Mnatsakanian intitulado *New horizons in Geometry*. A contracapa esclarece o conteúdo: *Classical calculus problems generalized and solved by innovative elementary geometric methods. With 1000 color illustrations*. A capa é já profusamente ilustrada com imagens retiradas dos diversos capítulos. Aqui encontramos um cilindro a intersectar um cone, uma esfera fatiada, áreas varridas por segmentos, etc.

Apesar desta obra coligir muitos trabalhos já dados à estampa, é um prazer enorme ter na mão uma obra tão inovadora e, ao mesmo tempo, tão belamente apresentada. As mil ilustrações são da autoria de Mamikon e constituem parte essencial da obra.

A génese desta colaboração, que já deu origem a uma vasta bibliografia, bem como a história pessoal de Mamikon, astrofísico arménio surpreendido pelo desmembramento da URSS quando visitava os EUA, onde permaneceu desde então, merecem ser conhecidas. Antes de iniciar colaboração estreita com Apostol, que o auxiliou a encontrar uma posição permanente em Caltech, Mamikon trabalhou para o Departamento de Educação Elementar da Califórnia, numa escola básica, etc. Uma procura rápida na *www* leva-nos sem demoras à página pessoal do inventor do *Visual Calculus*.

De tão vasta e profunda obra deixo dois problemas clássicos sobre distâncias no plano.



Sabendo que o ponto P está restringido ao segmento L, como determinar a sua posição exacta de forma a que

1. A soma das distâncias $AP + PB$ seja mínima.
2. A soma dos quadrados das distâncias $AP^2 + PB^2$ seja mínima.