

Optimização / Investigação Operacional

Editor Convidado: Ana Luísa Custódio

João Gouveia, Richard Z. Robinson e Rekha Thomas

Representações mínimas de polítopos 145

Teresa Grilo, Fernando Lobo Pereira e Sílvio Gama

Controlo óptimo de sistemas dinâmicos impulsionados por escoamentos de Couette 149

Marta Pascoal e Marisa Resende

Informação imprecisa na forma de conjuntos aproximativos – aplicação à otimização em redes 153

Susana Fernandes

Representação proporcional – um problema de otimização inteira 157

REPRESENTAÇÕES MÍNIMAS DE POLÍTOPOS

João Gouveia

Departamento de Matemática da FCTUC
Largo D. Dinis
3001-501 Coimbra, Portugal
e-mail: jgouveia@mat.uc.pt

Richard Z. Robinson, Rekha Thomas

University of Washington
Box 354350
Seattle, WA 98195-4350, USA
e-mail: rzr@uw.edu
rrthomas@uw.edu

Resumo: Polítopos com muitas facetas podem muitas vezes ser escritos como projecções de objectos muito mais simples, como por exemplo polítopos com muito menos facetas. Esta observação permite, por vezes, otimizar eficientemente sobre polítopos aparentemente muito complicados, técnica que tem dado frutos em optimização combinatoria. Põe-se então a questão de, dado um polítopo, saber qual o conjunto “mais simples” do qual este é uma projecção. Apresentamos aqui o resultado clássico de Yannakakis, que responde a esta pergunta no caso de representações lineares, e generalizamo-lo para representações semidefinidas, resultado que utilizamos para caracterizar polítopos com representações semidefinidas mínimas.

Abstract: Polytopes with many facets can many times be written as projections of simpler objects, namely, polytopes with a much smaller number of facets. This observation allows us, sometimes, to optimize efficiently over apparently complicated polytopes, a technique that has been very useful in combinatorial optimization. The question arises of, given a polytope, determining the “simplest” set of which it is a projection. Here, we present the classic result of Yannakakis that solves the question for the case of linear representations, and we generalize it to semidefinite representations, allowing us to characterize polytopes with minimal such representations.

palavras-chave: Polítopos; Programação Semidefinida; Raízes de Hadamard.

keywords: Polytopes; Semidefinite Programming; Hadamard Square Roots.

1 Introdução

Um *polítopo* P é um subconjunto compacto de \mathbb{R}^n definido por um sistema de inequações lineares. Assumindo que P tem dimensão máxima, ou seja que o espaço afim mínimo que contém P é \mathbb{R}^n , existe um único (a menos de multiplicação por escalares positivos) sistema mínimo de inequações lineares não redundantes que definem P , cada uma das quais definindo uma *faceta* de P . Os *vértices* de P são o subconjunto V (finito) mínimo de P tal que P é o invólucro convexo de V . Qualquer polítopo pode ser representado por $\{x \in \mathbb{R}^n : a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n \geq 0\}$, onde os a_i são vectores em \mathbb{R}^m , m o número de facetas e a desigualdade é considerada entrada a entrada.

Um problema central da programação linear é a optimização de uma função linear sobre um polítopo. Os algoritmos correntes resolvem este problema em tempo polinomial no tamanho dos dados. Se representarmos o polítopo usando as facetas, isso significa que estes algoritmos terão problemas em polítopos com muitas facetas. Poderíamos em alternativa representar o polítopo pelos seus vértices, mas isso não resolveria esta situação quando os polítopos têm muitas facetas e muitos vértices simultaneamente.

Isto motiva a necessidade de encontrar formas alternativas de representar o polítopo, que permitam uma optimização mais eficiente. Uma forma clássica de o fazer é escrever o polítopo como projecção de um objecto mais simples. Neste artigo apresentamos alguns resultados sobre a existência de representações eficientes de polítopos por meio de programação linear e programação semidefinida.

2 Teorema de Yannakakis

Uma *representação linear* de um polítopo P é uma descrição do polítopo P dada por

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists y, a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_{n+1}y_1 + \dots + a_{n+m}y_m \geq 0\},$$

ou seja, uma descrição de P como projecção de um polítopo numa dimensão maior. O *tamanho* da representação linear será o tamanho dos vectores a_i ou, equivalentemente, o número de facetas do polítopo cuja projecção é P . A motivação para considerar estas representações prende-se com o facto bem conhecido de um polítopo poder ter muito menos facetas que a sua projecção. Um exemplo deste fenómeno é o resultado de Ben-Tal e Nemirovski [1], de que o polígono regular de n -lados pode ser escrito como a projecção de um polítopo de $2\lceil \log_2(n) \rceil$ lados. Na Figura 1 podemos ver a ilustração desse

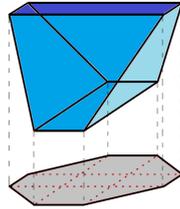


Figura 1: Octógono regular como projecção de um poliedro de seis facetas.

resultado para $n = 8$. Dado um polítopo fixo pretendemos caracterizar o número mínimo de facetas de um polítopo que o tenha como projecção. Para isto temos de introduzir duas definições adicionais. Seja P um polítopo com facetas dadas por $h_1(x) \geq 0, \dots, h_f(x) \geq 0$, e vértices p_1, \dots, p_v . A *matriz de folgas de P* é a matriz $S_P \in \mathbb{R}^{f \times v}$ definida por $S_P(i, j) = h_i(p_j)$.

Seja M uma matriz m por n , não negativa. M tem uma *factorização não negativa* de ordem k , se existirem vectores não negativos a_1, \dots, a_m e b_1, \dots, b_n em \mathbb{R}^k tais que $M_{i,j} = \langle a_i, b_j \rangle$, ou seja, se existirem A , m por k , e B , k por n , não negativas com $M = AB$. A *característica não negativa* de M é o menor k para o qual tal factorização existe.

Teorema 2.1 (Yannakakis [4]) *Dado um polítopo P , o tamanho mínimo de uma sua representação linear corresponde à característica não negativa da sua matriz de folgas.*

3 Representações semidefinidas

Uma *representação semidefinida* de um polítopo P é uma descrição

$$P = \{x : \exists y, A_0 + A_1x_1 + \dots + A_nx_n + A_{n+1}y_1 + \dots + A_{n+m}y_m \succeq 0\},$$

onde os A_i são matrizes reais simétricas e $A \succeq 0$ significa que A é uma matriz semidefinida positiva. Optimizar sobre esta representação pode ser feito em tempo polinomial no tamanho das matrizes A_i (que denominaremos por *tamanho da representação semidefinida*), recorrendo à programação semidefinida. Para estabelecer um paralelo com o teorema de Yannakakis temos de apresentar uma nova noção de factorização de matrizes: dizemos que uma matriz não negativa M , m por n , tem uma *factorização semidefinida* de ordem k , se existirem matrizes positivas semidefinidas A_1, \dots, A_m e B_1, \dots, B_n em $\mathbb{R}^{k \times k}$ tais que $M_{i,j} = \langle A_i, B_j \rangle$ para todas as entradas de M .

A *característica semidefinida* de M é o menor k para o qual tal factorização existe.

Teorema 3.1 (G.-Parrilo-Thomas [2]) *Dado um polítopo P , o tamanho mínimo de uma sua representação semidefinida corresponde à característica semidefinida da sua matriz de folgas.*

Não é difícil provar que a matriz de folgas de um polítopo de dimensão d tem característica semidefinida maior ou igual que $d + 1$, o que nos levou a questionar quais são exactamente os polítopos de dimensão d que possuem representações semidefinidas mínimas, isto é, de tamanho $d + 1$. Terminaremos este artigo com alguns resultados nesta direcção.

Seja M uma matriz não negativa. Uma *raiz quadrada de Hadamard*, que denotaremos por $\sqrt[H]{M}$, é uma matriz cujo quadrado entrada a entrada coincide com M . Note-se que $\sqrt[H]{M}$ está definida apenas a menos de trocas de sinal nas suas entradas pelo que definiremos a *característica de Hadamard* de M como sendo a característica (usual) mínima de entre todas as suas raízes de Hadamard.

Teorema 3.2 G.-Robinson-Thomas [3] *Um polítopo P de dimensão d tem uma representação semidefinida de tamanho $d + 1$ se e só se a sua matriz de folgas tiver característica de Hadamard $d + 1$.*

Usando este resultado podemos obter resultados interessantes em dimensões baixas, incluindo a caracterização total para \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , que pode ser encontrada parcialmente em [3], mas muito permanece ainda por fazer.

Referências

- [1] A. Ben-Tal e A. Nemirovski, “On polyhedral approximations of the second-order cone”, *Mathematics of Operations Research*, Vol. 26, No. 2 (2001), pp. 193–205.
- [2] J. Gouveia, P. Parrilo e R. Thomas, “Lifts of convex sets and cone factorizations”, *Mathematics of Operations Research*, a aparecer.
- [3] J. Gouveia, R. Robinson e R. Thomas, “Polytopes of minimum positive semidefinite rank”, *preprint*, arXiv:1205.5306.
- [4] M. Yannakakis, “Expressing combinatorial optimization problems by linear programs”, *Journal of Computer and System Sciences*, Vol. 43, No. 3 (1991), pp. 441–466.

CONTROLO ÓPTIMO DE SISTEMAS DINÂMICOS IMPULSIONADOS POR ESCOAMENTOS DE COUETTE

Teresa Grilo^{1,2}, *Fernando Lobo Pereira*¹

¹Instituto de Sistemas e Robótica - FEUP
Rua Roberto Frias s/n
4200-465 Porto, Portugal
e-mail: up200906085@fc.up.pt, flp@fe.up.pt

*Silvio Gama*²

²Centro de Matemática - FCUP
Rua do Campo Alegre, nº687
4169-007 Porto, Portugal
e-mail: smgama@fc.up.pt

Resumo: Apresenta-se um problema de tempo mínimo associado ao movimento de uma partícula que se desloca num escoamento de Couette, bem como a sua resolução usando o princípio do máximo. Este estudo é um primeiro passo para o desenvolvimento de uma estrutura matemática para o controlo e optimização de sistemas dinâmicos que evoluem através da interacção de EDO's e EDP's, com aplicação no controlo de planadores subaquáticos e peixes mecânicos.

Abstract: We present a minimum time control problem of a particle advected by a Couette flow, and solve it by using the maximum principle. This study is a first step of an effort aiming at the development of a mathematical framework for the control and optimization of dynamic control systems whose state variable is driven by interacting ODE's and PDE's, and which can be applied in the control of underwater gliders and mechanical fishes.

Palavras-chave: Controlo óptimo; Princípio do máximo; Equações diferenciais ordinárias; Equações com derivadas parciais; Sistemas dinâmicos.

Keywords: Optimal control; Maximum principle; Ordinary differential equations; Partial differential equations; Dynamical systems.

1 Introdução

Este artigo representa um primeiro passo para o controlo óptimo de sistemas dinâmicos cujo estado evolui através da interacção de equações diferenciais ordinárias e às derivadas parciais. Na figura 1 encontram-se dois exemplos

representativos da classe de aplicações consideradas: (i) planadores subaquáticos, i.e., veículos, possivelmente não tripulados, cujo movimento depende das condições do meio ambiente e da sua configuração neste; e (ii) peixes robóticos. Modelizações do movimento destes tipos de sistemas encontram-se em [2] e [1], respectivamente.

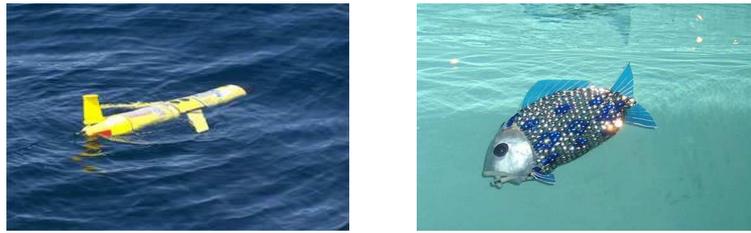


Figura 1: Planador subaquático (esquerda), peixe robótico (direita).

2 Problema de controlo do tempo mínimo

Considere-se um canal de largura L contendo um fluido com um determinado campo de velocidades. Coloca-se uma partícula nesse fluido. Seja $(0, b)$ a posição inicial da partícula, onde $0 \leq b \leq L$.

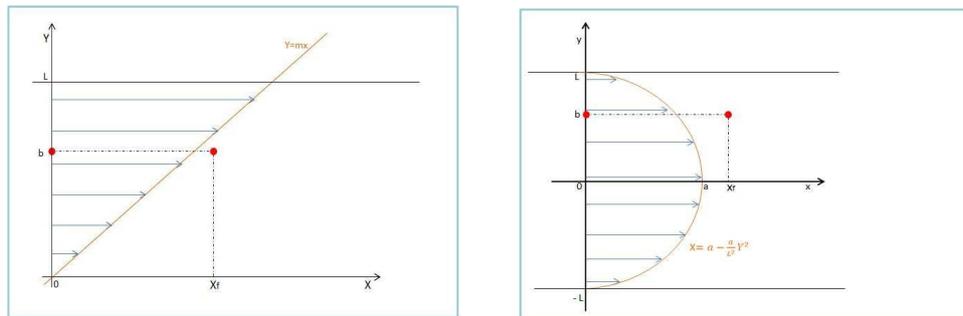


Figura 2: Campo de velocidades linear (esquerda) e quadrático (direita).

O objectivo deste problema consiste em determinar o controlo $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ que se aplica na partícula, para que se possa movê-la no canal até um ponto final (x_f, b) em tempo mínimo, usando também a velocidade do fluido. Sendo $X(t) = (x(t), y(t))$ a posição da partícula em cada instante, o problema de controlo consiste em

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } T \\ & \text{s.a. } \dot{X} = F(X, u), \quad X(0) = (0, b), \quad X(T) = (x_f, b), \\ & \quad y(t) \in [0, L], \quad \|u(t)\|_\infty \leq 1, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (1)$$

2.1 Caso linear

No caso do escoamento linear (de declive m), o campo de velocidades do fluido é dado por $v(x, y) = (\frac{y}{m}, 0)$. Logo, a dinâmica do problema de controlo é dada por $F(X, u) = (\frac{y}{m} + u_1, u_2)$.

O princípio do máximo, [3], permite calcular o controlo óptimo $u^* = (u_1^*, u_2^*)$ através da maximização da função de Pontryagin $H(X, P, u)$ (aqui, $P = (p_x, p_y)$ é a variável adjunta que satisfaz $-\dot{P} = \nabla_X H(X, P, u)$, representando, ∇_X o gradiente em ordem a X) quase sempre em relação à medida de Lebesgue (é neste sentido que se especificam as funções dora-vante) articulada com a satisfação das condições de fronteira. Assim, sendo $H(X, P, u) = p_x(\frac{y}{m} + u_1) + (p_y + \gamma)u_2$, onde γ é uma certa função que reflecte a actividade da restrição em y , tem-se que $p_x = K_1$ e $p_y = K_2 - \frac{K_1}{m}t$ com $K_1, K_2 > 0$. Tendo em conta que a posição da partícula em t é dada por

$$x(t) = \frac{b}{m}t + \int_0^t u_1(\tau) d\tau + \frac{1}{m} \int_0^t (t - \tau)u_2(\tau) d\tau, \quad y(t) = b + \int_0^t u_2(\tau) d\tau,$$
 conclui-se através da maximização da função de Pontryagin que $u_1^*(t) = 1$ e que u_2^* é definida por:

- $u_2^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{t^*}{2}[\\ -1, & t \in]\frac{t^*}{2}, t^*] \end{cases}$, no caso de $x_f \leq 2(L - b)$. Substituindo nas equações da posição da partícula, obtém-se que o tempo óptimo de (1) é dado por $t^* = 2 \left(\sqrt{(b+m)^2 + mx_f} - (b+m) \right)$.
- $u_2^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, t_1[\\ 0, & t \in]t_1, t^* - t_1[\\ -1, & t \in]t^* - t_1, t^*] \end{cases}$, onde $t_1 = \sqrt{(b+m)^2 + 2m(L-b)} - (b+m)$,
no caso de $x_f > 2(L - b)$, sendo agora $t^* = \frac{t_1^2 + mx_f}{b + m + t_1}$.

Os casos na definição de u_2^* correspondem à activação ou não da restrição.

2.2 Caso quadrático

Argumentos semelhantes aplicam-se ao caso do escoamento quadrático (com vértice em $(a, 0)$), sendo que, agora, a dinâmica do sistema de controlo é dada por $F(X, u) = (a - \frac{a}{L^2}y^2 + u_1, u_2)$. Importa observar de imediato que (i) a restrição de estado vai estar inactiva ao longo da trajectória óptima, e que (ii) existe simetria em relação ao eixo $y = 0$. Usando estas observações na aplicação do princípio do máximo, bem como o facto da posição da partícula ser dada por

$$x(t) = at - \frac{a}{L^2} \int_0^t y^2(\tau) d\tau + \int_0^t u_1(\tau) d\tau, \quad y(t) = b + \int_0^t u_2(\tau) d\tau,$$

conclui-se que $u_1^*(t) = 1$ (figura 2), e que u_2^* é definida por:

- $u_2^*(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, \frac{t^*}{2}[\\ 1, & t \in]\frac{t^*}{2}, t^*] \end{cases}$, se $x_f \leq 2b$, sendo, neste caso, o tempo mínimo t^* uma raiz do polinómio

$$t^3 - 6bt^{*2} + \left(12b^2 - 12L^2 - \frac{12L^2}{a}\right)t^* + \frac{12L^2}{a}x_f = 0. \quad (2)$$
- $u_2^*(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, t_1[\\ 0, & t \in]t_1, t^* - t_1[\\ 1, & t \in]t^* - t_1, t^*] \end{cases}$, se $x_f > 2b$, sendo o tempo óptimo

$$t^* = \frac{x_f - \frac{2a}{L^2}(\frac{2}{3}t_1^3 - bt_1^2)}{a + 1 - \frac{a}{L^2}(b - t_1)^2}$$
, onde t_1 é metade do valor de t^* obtido em (2) com $x_f = 2b$.

3 Conclusões e trabalho futuro

Os casos de estudo aqui apresentados são bastante simples e a sua diferença relaciona-se com o tipo de perfil de velocidades do fluído. Não só a dinâmica do sistema de controlo pode ser representada por um conjunto de EDO's mas também as condições resultantes da aplicação do princípio do máximo podem facilmente ser resolvidas de forma explícita. O próximo passo consiste em derivar condições de optimalidade na forma de um princípio do máximo por forma a calcular o controlo óptimo de problemas em que as simplificações acima não podem ser exploradas. Este estudo sugere que as condições de optimalidade a desenvolver venham a requerer uma variável adjunta que satisfaça um sistema misto de EDO's e EDP's, por forma a que o controlo óptimo possa ser obtido pela maximização de uma função de Pontryagin adequada, articulada com condições de fronteira adicionais.

Referências

- [1] J. Liu e H. Hu, “Biological inspiration: From carangiform fish to multi-joint robotic fish”, *Journal of Bionic Engineering*, Vol. 7 (2010), pp. 35–48.
- [2] N. Mahmoudian, J. Geisbert e C. Woolsey, “Dynamics and control of underwater gliders I: Steady motions”, Virginia Center for Autonomous Systems, Technical Report No. VaCAS-2007-01 (2009).
- [3] L. Pontryagin, V. Boltyanskiy, R. Gamkrelidze e E. Mishchenko, *Mathematical theory of optimal processes*, Interscience Publ., New York, 1962.

INFORMAÇÃO IMPRECISA NA FORMA DE CONJUNTOS APROXIMATIVOS – APLICAÇÃO À OTIMIZAÇÃO EM REDES

Marta Pascoal, Marisa Resende

Instituto de Engenharia de Sistemas e Computadores – Coimbra
Departamento de Matemática da FCTUC
Apartado 3008, EC Santa Cruz
3001-501 Coimbra, Portugal
e-mail: marta@mat.uc.pt
marisacmresende@gmail.com

Resumo: A teoria dos conjuntos aproximativos, proposta por Pawlak nos anos 80, permite caracterizar diferentes tipos de informação, baseada na permissão de serem conhecidos dados incompletos ou imprecisos e por vezes incoerentes. A incerteza pode ser reduzida pela identificação de elementos que não podem ser distinguidos com base nos atributos. Neste trabalho é feita uma breve introdução à teoria dos conjuntos aproximativos aplicando-se estes conceitos a um problema de otimização em redes.

Abstract: The rough set theory, proposed by Pawlak in the 80s, allows to characterize different types of information, based on the premise that inaccurate or incomplete data and sometimes inconsistent are known. The uncertainty can be reduced by identifying elements that can not be distinguished based on the attributes. In this work we briefly introduce the theory of rough sets and apply these concepts to a network optimization problem.

palavras-chave: Conjuntos aproximativos; indiscernibilidade; otimização em redes.

keywords: Rough sets; indiscernibility; network optimization.

1 Introdução

Seja $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ um grafo representado por um conjunto de nós, \mathcal{N} , e um conjunto de arcos, \mathcal{A} . Em formulações clássicas de otimização em redes associam-se parâmetros fixos e bem determinados a cada $i \in \mathcal{N}$ ou cada $(i, j) \in \mathcal{A}$. Numa representação mais fiel da realidade os parâmetros podem ser subjetivos ou sujeitos a fontes de incerteza e imprecisão, podem ser dinâmicos; o seu conhecimento pode ser dispendioso; um grupo de decisão pode não concordar com os valores de cada parâmetro, etc. Na literatura surgiram alguns modelos para lidar com esta incerteza, por exemplo, modelos

“aproximados”, probabilísticos ou robustos. No que se segue considera-se o modelo dos conjuntos aproximativos [1], que lida com informação incompleta ou imprecisa e por vezes incoerente.

2 Conjuntos aproximativos

A teoria dos conjuntos aproximativos é motivada pela necessidade de interpretar, caracterizar e processar a indiscernibilidade entre elementos. O ponto de partida é um sistema de informação, definido como um par $\mathcal{S} = (U, C)$, onde:

- $U \neq \emptyset$ é um conjunto finito de objetos chamado universo,
- $C \neq \emptyset$ é um conjunto finito de condições, ou atributos condicionais.

Cada $a \in C$ está associado a uma função $f_a : U \rightarrow V_a$, onde V_a é o conjunto dos valores permitidos para a . Juntando a estes elementos um conjunto finito $D \neq \emptyset$, disjunto de C , de decisões ou atributos de decisão, obtém-se o sistema de decisão $\mathcal{S} = (U, C, D)$.

Alguns objetos do sistema podem ter as mesmas características (em termos de atributos condicionais). Assim sendo, por forma a identificar uma estrutura capaz de reproduzir o universo associa-se uma relação de equivalência a cada $B \subseteq C$, dita relação de indiscernibilidade, definida como

$$I(B) = \{(x, y) \in U^2 : \forall a \in B, f_a(x) = f_a(y)\}.$$

O conjunto de todas as classes de equivalência em $I(B)$ denota-se por $U/I(B)$. Quando $(x, y) \in I(B)$, diz-se que x e y são B -indiscerníveis. Uma classe de equivalência em $I(B)$ que contém o elemento x denota-se por $[x]_B$.

Dados $B \subseteq C$ e $X \subseteq U$, podem aproximar-se os objetos em X a partir da informação sobre as condições em B . A aproximação B -inferior de X é dada por $\underline{B}(X) = \{x : [x]_B \subseteq X\}$, o que significa que os elementos de $\underline{B}(X)$ são classificados como certamente pertencentes a X , por conhecimento de B . Por sua vez, a aproximação B -superior de X é dada por $\overline{B}(X) = \{x : [x]_B \cap X \neq \emptyset\}$, sendo os seus elementos classificados como possivelmente pertencentes a X , por conhecimento de B . O conjunto $\overline{B}(X) - \underline{B}(X)$ é a B -fronteira de X . Um conjunto diz-se grosseiro/preciso se a sua fronteira é não-vazia/vazia. Estes conceitos podem ser estendidos, de forma análoga, a subconjuntos de D . Quando há inconsistência não é possível especificar a decisão a tomar perante um atributo, pois esta não é a mesma para todos os objetos da classe. Tem-se então uma categoria imprecisa.

Dado $B \subseteq C$, a matriz de discernibilidade é definida por $M_D(B) = [m_D(i, j)]_{n \times n}$, $1 \leq i, j \leq n$, com $n = |U/I(B)|$, onde

$$m_D(i, j) = \{a \in B : f_a(E_i) \neq f_a(E_j)\}, \text{ para } i, j = 1, 2, \dots, n,$$

onde o elemento $m_D(i, j)$ é o conjunto de atributos de B que discerne as classes de objetos $E_i, E_j \in U/I(B)$. Note-se que esta matriz é simétrica. A indiscernibilidade entre os objetos pode igualmente ser classificada pela função de discernibilidade, dada pela função *booleana*

$$f(B) = \bigwedge \left\{ \bigvee m_D^*(i, j) : 1 \leq j \leq i \leq n \right\},$$

com $m_D^*(i, j)$ uma variável *booleana* que se associa ao atributo $m_D(i, j)$. Um atributo a diz-se dispensável (ou redundante) relativamente a $B \subseteq C$, se $I(B) = I(B - \{a\})$, caso contrário é indispensável em B . Um reduto de B é um conjunto de atributos $B' \subseteq B$, tal que todo o $a \in B - B'$ é dispensável e $I(B') = I(B)$. Um reduto de um sistema de informação pode ser determinado através da função de discernibilidade, no entanto, a determinação de um reduto com cardinalidade mínima é computacionalmente complexa [2].

3 Exemplo

Mostra-se agora uma aplicação dos conceitos anteriores a um problema de encaminhamento em redes. Considere-se a rede de comunicações na Figura 1, cujos nós identificam *routers*. O encaminhamento é determinado pelos parâmetros de qualidade de serviço das arestas: largura de banda (a_1), propagação do atraso (a_2), probabilidade de falha (a_3). Seja então $S = (U, C, D)$ um sistema de decisão com $C = \{a_1, a_2, a_3\}$,

- a_1 : suficiente (1), disponível (2) e insuficiente (3);
- a_2 : baixa (1), normal (2) e elevada (3);
- a_3 : baixa (1), normal (2) e elevada (3).

e $D = \{B, N, M\}$, onde B denota Bom, N denota Normal e M denota Mau.

Têm-se as seguintes classes de equivalência relativamente a C , $U/I(C) = \{\{(1, 2)\}, \{(1, 3)\}, \{(2, 4)\}, \{(2, 5), (3, 4)\}, \{(3, 5)\}, \{(4, 6)\}, \{(5, 6)\}\}$. As aproximações C -inferior e C -superior de $X = \{x : d(x) = B\}$ são $\underline{C}(X) = \overline{C}(X) = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4)\}$, logo este conjunto é preciso, enquanto que $X' = \{x : d(x) = B \vee d(x) = N\}$ é

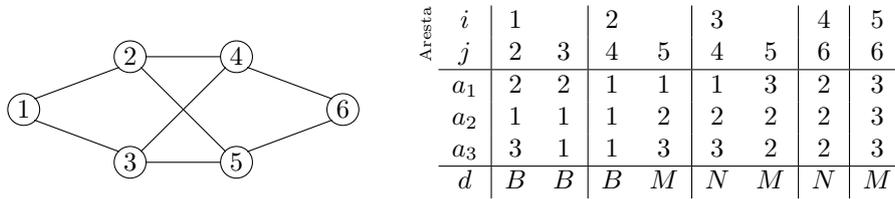


Figura 1: Rede $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ e função f_a .

grosseiro dado que $\underline{C}(X') = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (4, 6)\}$ e $\overline{C}(X') = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$. Analogamente, mas para atributos de decisão, a decisão associada a $\{(1, 2), (1, 3), (2, 4)\}$ é certamente B e a associada a $\{(4, 6)\}$ é certamente N . No entanto, a decisão associada a $\{(2, 5), (3, 4)\}$ pode ser N ou M .

A matriz de discernibilidade do sistema (omitem-se os elementos abaixo da diagonal principal e indica-se a classe de equivalência correspondente após cada linha da matriz) é

$$M_D(C) = \begin{bmatrix} - & a_3 & a_1a_3 & a_1a_2 & a_1a_2a_3 & a_2a_3 & a_1a_2 \\ & - & a_1 & a_1a_2a_3 & a_1a_2a_3 & a_2a_3 & a_1a_2a_3 \\ & & - & a_2a_3 & a_1a_2a_3 & a_1a_2a_3 & a_1a_2a_3 \\ & & & - & a_1a_3 & a_1a_3 & a_1a_2 \\ & & & & - & a_1 & a_2a_3 \\ & & & & & - & a_1a_2a_3 \\ & & & & & & - \end{bmatrix} \begin{matrix} [(1, 2)] \\ [(1, 3)] \\ [(2, 4)] \\ [(2, 5)] \\ [(3, 5)] \\ [(4, 6)] \\ [(5, 6)] \end{matrix}$$

Os atributos a_1 ou a_3 são obrigatórios para discernir objetos. Desprezando as entradas da matriz $M_D(C)$ com pelo menos um destes atributos concluímos também que o atributo a_2 é dispensável, podendo considerar-se apenas a_1 e a_3 , e simplificando assim o sistema inicial. A determinação de uma solução preferencial passaria pela definição de relações de preferência entre os vários atributos ou entre outros introduzidos no problema.

Referências

- [1] Z. Pawlak, “Rough sets”, *International Journal of Computer and Information Science*, Vol. 11 (1982), pp. 341–356.
- [2] A. Skowron e C. Rauszer, “The discernibility matrices and functions in information systems”, In *Intelligent Decision Support Handbook of Applications and Advances of the Rough Sets Theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Ed. Slowiński, pp. 331–362, 1992.

REPRESENTAÇÃO PROPORCIONAL – UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Susana Fernandes

Universidade do Algarve FCT DM
Campus de Gambelas
8005-139 Faro, Portugal
e-mail: sfer@ualg.pt

Resumo: O atual programa de MACS inclui nos seus conteúdos programáticos métodos de representação proporcional. No entanto, a maioria dos professores de matemática não teve qualquer formação nesta área. Neste documento evidencia-se que os métodos dos divisores resolvem problemas de otimização inteira e sugere-se que estes sejam introduzidos nos cursos de (ensino em) matemática, em disciplinas da área da investigação operacional.

Abstract: The apportionment problem is currently taught in portuguese high schools, included in the syllabus of MACS. Most teachers of mathematics, however, have no training in this area. The methods of divisors solve integer programming problems, so we encourage the inclusion of these methods in the syllabus of operations research subjects.

palavras-chave: MACS; Representação Proporcional; Otimização Inteira.

keywords: MACS; Apportionment; Integer Programming.

1 Introdução

O atual programa da disciplina Matemática Aplicada a Ciências Sociais (MACS) do ensino secundário inclui a representação proporcional. Neste âmbito são abordados em MACS alguns métodos de origem norte-americana e os dois métodos de origem europeia mais usados atualmente. Todos os métodos abordados (exceto o de Hamilton) são métodos de divisores modificados e os dois métodos europeus (D'Hondt e Sainte-Laguë) são de fato equivalentes a dois dos métodos americanos (Jefferson e Webster).

A maioria dos professores de matemática não teve no entanto qualquer formação nesta área e os materiais de apoio existentes são escassos e não sem algumas lacunas. Encontramos na literatura inúmeros trabalhos sobre a formação de professores que evidenciam a necessidade da existência de programas de educação em matemática que apoiem conexões entre os conteúdos dos cursos de nível universitário e os conteúdos do ensino secundário (ver por exemplo [4] e os trabalhos que o referenciam).

Neste documento apresentamos os métodos de divisores abordados em MACS, expondo como as soluções dadas por estes métodos correspondem à otimização de uma função objectivo diferente, consequência de concepções distintas de traduzir matematicamente o que é mais justo. Assim sendo, sugerimos que se apresentem alguns destes métodos nas disciplinas da área da investigação operacional em cursos de (ensino em) matemática.

2 O problema da representação proporcional

Nos Estados Unidos da América (EUA) cada estado recebe um número de lugares na câmara de representantes proporcional à sua população. Em inúmeros países da Europa cada lista eleitoral recebe um número de mandatos no parlamento proporcional ao número de votos obtidos nas eleições.

Seja V o número total de votos válidos de uma eleição, que se distribuem por N listas eleitorais, sendo v_i o número de votos na lista eleitoral i . Seja M o número total de mandatos (a distribuir pelas listas eleitorais de acordo com a sua proporção de votos v_i/V). Seja $D = V/M$ o divisor que indica o número de eleitores representados por cada mandato no parlamento. A quota de mandatos da lista eleitoral i será $q_i = M \times v_i/V$ (ou $q_i = v_i/D$), que em geral não é um número inteiro. Encontramos uma solução para o problema ao determinar o número de mandatos m_i a atribuir a cada lista i , sendo os m_i inteiros não negativos tais que $\sum_{i=1}^N m_i = M$, como indica a formulação da Figura 1.

$$\begin{aligned} \text{objectivo} & \text{ distribuir os } m_i \text{ de acordo com as } q_i = M \times \frac{v_i}{V} \\ \text{s. a.:} & \quad \sum_{i=1}^N m_i = M \\ & \quad m_i \in Z_0^+, \forall i \in \{1, \dots, N\} \end{aligned}$$

Figura 1: Formulação do problema da representação proporcional

No início do funcionamento na câmara de representantes dos EUA, o número de lugares não era fixo, fixando-se sim o rácio do número de cidadãos por lugar na câmara de representantes - o divisor D . Definido D , determina-se a quota de cada estado de acordo com a sua população $q_i = v_i/D$, restando o problema de definir o número inteiro de lugares correspondente a cada quota (m_i). O número de mandatos a atribuir a cada estado é encontrado arredondando as quotas segundo algum critério (os vários métodos diferem apenas no critério de arredondamento). A partir do momento em que se fixa

o número de lugares na câmara de representantes M , o número de cidadãos representado por cada mandato passa a depender do total da população V , sendo o divisor definido de acordo com estes valores $D = V/M$. Se o total de lugares distribuídos por arredondamento das quotas não é igual a M , o divisor é modificado $D \rightarrow D'$ e recalculam-se as quotas $q'_i = v_i/D'$. O processo poderá necessitar de várias iterações até encontrar uma solução.

Os métodos de divisores desenvolvidos na Europa vão atribuindo um mandato de cada vez até completar todo o parlamento, verificando a cada passo a que lista eleitoral será atribuído o mandato em consideração. Cada um destes métodos considera uma sequência de divisores $d(m_i)$, $m_i = 0, \dots, M - 1$, $i = 1, \dots, N$. O método começa por atribuir 0 mandatos a todas as listas eleitorais e seleciona a cada iteração o maior rácio $v_i/d(m_i)$, atribuindo por cada rácio selecionado um mandato à lista eleitoral correspondente, como indica o algoritmo da Figura 2. Este corresponde à forma recursiva dos métodos norte-americanos [2], onde os divisores $d(m_i)$ não são mais que os pontos de arredondamento das quotas, conforme a tabela. Note-se que os métodos em que o primeiro divisor é zero atribuem na primeira iteração um mandato a todos os concorrentes, o que, sendo um requisito nas eleições da câmara de representantes dos EUA (todos os estados têm de estar representados), não é viável para a maioria das eleições parlamentares.

Algoritmo

(i) $m_i = 0, \quad i = 1, \dots, N$
 (ii) Repetir até que $\sum_{i=1}^N m_i = M$
 Seja k tal que $\frac{v_k}{d(m_k)} = \max \frac{v_i}{d(m_i)}$
 Fazer $m_k = m_k + 1$ e $m_i = m_i \quad \forall i \neq k$

Métodos de divisores modificados	Divisores $d(m_i)$ $m_i=0, \dots, M-1$	Sequência Divisores
Adams	m_i	0, 1, 2, 3, ...
Dean	$\frac{2m_i(m_i+1)}{m_i+(m_i+1)}$	0, $\frac{4}{3}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{24}{7}$, ...
Huntington-Hill	$\sqrt{m_i(m_i+1)}$	0, $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{12}$, ...
Webster-Sainte-Laguë	$m_i + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, ...
Jefferson \approx D'Hondt	$m_i + 1$	1, 2, 3, 4, ...

Figura 2: Forma recursiva dos métodos dos divisores

Métodos diferentes determinam, em geral, soluções diferentes para uma mesma instância do problema. Qual será a forma mais justa de distribuir os M mandatos pelas N listas eleitorais, de acordo com a correspondente proporção de votos? Poderemos pensar que o número de eleitores que cada mandato representa deveria ser igual para todas as listas, e igual à representatividade de cada mandato pensada na definição da dimensão do parlamento. Esta ideia pode ser traduzida por $Min \sum_{i=1}^N m_i(v_i/m_i - V/M)^2$. Ou, analogamente poderemos pensar na desejável igualdade da proporção de mandatos por cada eleitor, que pode ser representada por $Min \sum_{i=1}^N v_i(m_i/v_i - M/V)^2$. Uma vez que o número de

mandatos atribuídos a cada lista eleitoral não será exatamente igual à sua quota, existirão, neste sentido, listas favorecidas e listas desfavorecidas. Poderemos pensar em minimizar o número de votos por mandato da lista mais desfavorecida, traduzido por $\text{MinMax } v_i/m_i$. Ou minimizar a representação per-capita da lista mais favorecida, traduzido por $\text{MinMax } m_i/v_i$.

Na verdade, cada um dos métodos dos divisores determina a solução ótima para um destes objectivos ([2], [3], [1]), como mostra a Figura 3.

Método	objectivo
Adams	$\min \max \frac{v_i}{m_i}$
Huntington-Hill	$\min \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{v_i}{m_i} - \frac{V}{M} \right)^2 \Leftrightarrow \min \frac{v_i^2}{m_i}$
Webster-Sainte-Laguë	$\min \sum_{i=1}^N v_i \left(\frac{m_i}{v_i} - \frac{M}{V} \right)^2 \Leftrightarrow \min \frac{m_i^2}{v_i}$
Jefferson \approx D'Hondt	$\min \max \frac{m_i}{v_i} \Leftrightarrow \min y \text{ s.a.: } \frac{m_i}{v_i} \leq y, i=1, \dots, N$ $\wedge y \in \mathbb{R}^+$

Figura 3: Objectivos otimizados pelos métodos dos divisores

Note-se que o método de Webster resolve um problema de programação quadrática inteira e o de Jefferson um problema de programação linear mista, estando estes tipos de problemas incluídos nos conteúdos programáticos habituais de disciplinas da área da investigação operacional. Os métodos de Adams e Huntington-Hill resolvem problemas de programação não linear inteira, menos usuais nos programas de licenciatura.

Referências

- [1] M. Balinsky e H. Young, *Fair Representation; Meeting the Ideal of One Man, One Vote*, Bookings Institution Press 2001 (1ª edição 1982).
- [2] E. Huntington, “The apportionment of representatives in congress”, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 30 (1928), pp. 85–110.
- [3] W. Lucas, “The apportionment problem”, in *Modules in Applied Mathematics: Political and related models*, Vol. 2, Springer, 1978, Eds. S. Brams, W. Lucas, Jr. Straffin, pp. 358–396.
- [4] L. Shulman, “Those who understand: Knowledge growth in teaching”, *Educational Researcher*, Vol. 15, No. 2 (1986), pp. 4–14.