

Matemática Recreativa

Editores:

Jorge Picado e Paula Mendes Martins

ALGUMAS PEÇAS DO JOGO DE XADREZ E SEU VALOR RELATIVO

Pedro Palhares

CIEC - Instituto de Educação

Universidade do Minho

e-mail: palhares@ie.uminho.pt

Resumo: Muita da matemática recreativa incidiu, ao longo dos tempos, sobre o jogo de xadrez. Iremos aqui explorar uma pequena parte desse acervo, discutindo o valor relativo de três peças do xadrez, a torre, o bispo e a dama, através da determinação da sua mobilidade média, que é o método geralmente usado, embora fazendo uma pequena precisão relativamente a cálculos anteriores.

Abstract Much of recreational mathematics focused, over time, on the game of chess. Here we will explore a small part of this collection, discussing the relative value of three chess pieces, the rook, the bishop and the queen, by determining their average mobility, which is the method usually used, although making a small accuracy on calculations above.

palavras-chave: peças de xadrez; mobilidade média; valor relativo.

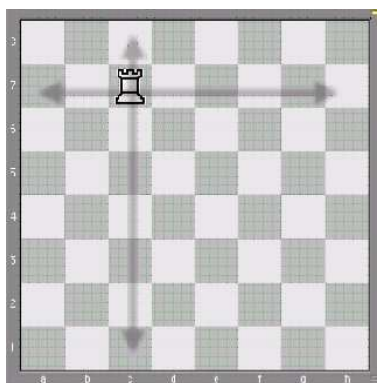
keywords: Chess pieces; average mobility; relative value.

1 Introdução

O tabuleiro de xadrez distingue-se do tabuleiro do jogo das damas jogado em Portugal apenas pelo facto de o quadrado de topo à esquerda ser de cor branca (nas damas é de cor escura). Nas damas de competição internacional joga-se num tabuleiro de 10 quadrados por 10 quadrados. Já em certas variantes alternativas de xadrez joga-se com tabuleiros de diferente tamanhos. Em contrapartida, outros jogos, como o Amazonas, vieram buscar este tabuleiro. No que se segue, o tabuleiro de xadrez será a maior inspiração e instrumento para a expressão do poder relativo das peças, mas poderá pensar-se e adaptar-se os problemas e resultados a tabuleiros dos mais variados tamanhos.

1.1 A torre

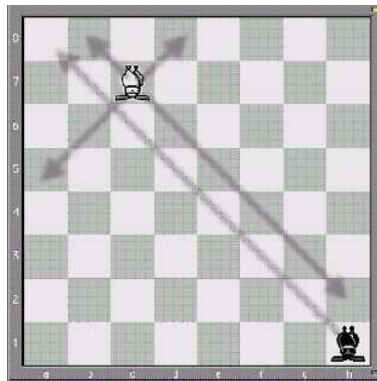
No xadrez a torre desloca-se nas linhas ou nas colunas, quantas casas na mesma fila se quiser. É a única peça do jogo do xadrez que, colocada em qualquer casa do tabuleiro, controla sempre o mesmo número de casas (14).



1.2 O bispo

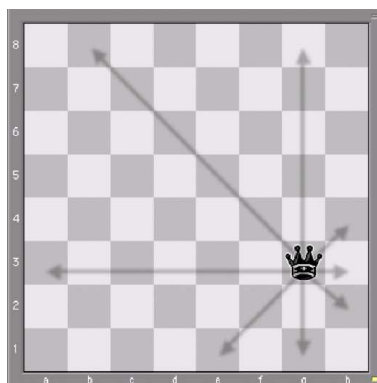
No xadrez o bispo desloca-se apenas segundo as diagonais de quadrados mas quantas casas na mesma direção se quiser. Como consequência só se desloca em casas da mesma cor. No xadrez há um bispo das casas brancas e um bispo das casas negras. O número de casas que consegue controlar varia entre as 7 quando colocado numa linha da orla do tabuleiro e as 13 quando

colocado no centro do tabuleiro, passando por 9 quando colocado a uma casa da orla, 11 quando colocado a duas casas da orla.



1.3 A dama

A dama (ou rainha) do xadrez é uma peça que no jogo tem imenso valor, pois desloca-se na horizontal, vertical ou diagonal, quantas casas se quiser na mesma direção. Combina assim os movimentos do bispo e da torre. A colocação da dama numa dada casa tem influência no número de casas para as quais ela se pode deslocar. De um mínimo de 21 casas possíveis, se for colocada numa posição na orla do tabuleiro, poderá deslocar-se para 27 casas se for colocada no centro do tabuleiro, passando por 23 casas se for colocada numa posição a uma casa de distância da orla e por 25 casas se for colocada numa posição a duas casas de distância da orla.



1.4 Outras peças

No xadrez existem outras peças: o rei, o cavalo e o peão. Embora muito importantes (o cavalo é desde sempre a peça mais analisada na matemática recreativa) iremos aqui restringir-nos a estas três peças. Aliás estas três peças vão já dar-nos que fazer.

2 Valor relativo das peças – uma primeira análise

Qual deve ser o valor relativo da torre, do bispo e da dama? Não deveria ser difícil de chegar a uma conclusão. Afinal de contas, a dama combina os movimentos da torre e do bispo, logo deveria ser equivalente a uma torre e um bispo. Por outro lado, se compararmos em termos da sua mobilidade média (tabuleiro vazio), grosso modo, o bispo tem uma média de 10 (entre 7 e 13), a torre sempre 14 e a dama tem média de 24 (entre 21 e 27). Mais uma vez, uma dama deveria igualar uma torre e um bispo.

Podemos fazer um estudo mais preciso da mobilidade, ligando-a à probabilidade de essa mobilidade atacar o rei adversário. Começando pela torre, onde quer que ela esteja colocada, o rei adversário tem outras 63 casas onde pode ficar colocado, das quais 14 colocam-no debaixo de ataque da torre. Ou seja, a probabilidade de o rei ficar sob ataque é de:

$$\frac{14 \times 64}{64 \times 63} = \frac{2}{9}.$$

Quanto ao bispo, pode ocupar 28 posições em que controla 7 casas, 20 posições em que controla 9 casas, 12 posições em que controla 11 casas e 4 posições em que controla 13 casas. A média ponderada conduz-nos à fração $\frac{560}{64} = \frac{35}{4}$. Onde quer que o bispo fique colocado, o rei adversário tem 63 casas restantes onde ficar, das quais em $\frac{35}{4}$ delas estará atacado (em média). A probabilidade de estar sob ataque do bispo é assim de:

$$\frac{35}{4 \times 63} = \frac{5}{36}.$$

Quanto à dama, pode ocupar 28 posições em que controla 21 casas, 20 posições em que controla 23 casas, 12 posições em que controla 25 casas e 4 posições em que controla 27 casas. A média ponderada conduz-nos à fração $\frac{1456}{64} = \frac{91}{4}$. Onde quer que a dama fique colocada o rei adversário poderá ser colocado em 63 casas das quais em $\frac{91}{4}$ estará atacado. A probabilidade de estar sob ataque da dama é de:

$$\frac{91}{4 \times 63} = \frac{13}{36}.$$

Ora, o que não é surpresa, a probabilidade de o rei adversário estar sob ataque da dama é a soma das probabilidades da torre e do bispo. Assim, mais uma vez temos que a dama deveria ser igual em valor a uma torre e um bispo.

Poderíamos ainda afinar estes valores retirando ao rei adversário posições em que tomaria a peça que o estava a atacar. Na verdade, como o rei se desloca uma casa em qualquer direção, teremos de retirar as casas próximas ao rei. No caso da torre teremos de retirar em geral 4 posições que não são seguras enquanto que no caso da orla são 3 posições ou 2 se for nos cantos. Temos assim para a torre uma probabilidade de cheque seguro de:

$$\frac{4 \times 12 + 24 \times 11 + 36 \times 10}{64 \times 63} = \frac{24}{144} = \frac{1}{6}.$$

Para o caso do bispo, temos:

$$\frac{364}{64 \times 63} = \frac{13}{144}.$$

No caso da dama, obtemos:

$$\frac{1036}{64 \times 63} = \frac{37}{144} \text{ (Rouse Ball, 2004).}$$

Mas acontece que:

$$\frac{1}{6} + \frac{13}{144} = \frac{37}{144},$$

ou seja, esta análise não conduz a diferenças no resultado.

3 Os valores obtidos pela análise xadrezística

Apesar desta análise matemática, as análises de valor das peças feitas por xadrezistas diferem destas por alguma margem, desde 1.107 de valor da dama relativamente ao conjunto torre mais bispo (Philidor), entre 1 e 1.25 (Lasker), 1.125 (Euwe), 1.09 (Fischer), 1.04 (Berliner - campeão do mundo de xadrez por correspondência)¹.

É claro que tem havido nos últimos tempos uma aproximação entre o valor dado por xadrezistas (sempre superior para a dama) e o valor das análises da mobilidade das peças (igualdade entre a dama e o conjunto torre+bispo). Ainda assim, como explicar a consolidada vantagem que a prática do jogo concede à dama (como explicar matematicamente, claro)?

¹http://en.wikipedia.org/wiki/Chess_piece_relative_value

4 Valor relativo das peças – uma segunda análise

Para isso, ensaiarei uma resposta a partir de uma análise ligeiramente diferente, obtida a partir do trabalho de Bonsdorff, Fabel e Riihimaa (1974).

Eles apresentam as fórmulas de mobilidade para tabuleiros de $n \times n$ casas. Essas fórmulas não diferem da análise anterior quando se aplica ao caso particular do tabuleiro de 8×8 peças.

Relevante mesmo é a análise que fazem dos movimentos de duas peças da mesma cor quando estão ambas presentes no tabuleiro. É que assim sendo, há movimentos que não são possíveis porque são estorvados pela presença da outra peça. A fórmula geral que apresentam, independentemente das peças em causa, é:

$$N_{(1,2)} = (n^2 - 1)(N_1 + N_2) - I(1) - I(2),$$

em que $N_{(1,2)}$ é o total de movimentos de duas peças simultaneamente num tabuleiro, n o número de filas ou colunas no tabuleiro, N_1 e N_2 representam os movimentos possíveis de cada peça considerada isoladamente e I os impedimentos provocados por cada peça. Aplicando a fórmula ao caso do bispo e torre em conjunto no tabuleiro 8×8 , encontramos:

$$N_{(B,T)} = (8 \times 8 - 1)(896 + 560) - I(T) - I(B).$$

Os impedimentos da torre, ou seja, o número de movimentos que uma torre não pode efetuar por haver uma peça da sua cor a impedir, tendo em conta todas as combinações das duas peças, é dado por:

$$I(T) = \frac{2}{3}n^2(n^2 - 1).$$

Já o número de impedimentos do bispo é dado por:

$$I(B) = \frac{1}{3}n^2(n^2 - 1),$$

o que faz com que o número de impedimentos mútuos da torre e bispo seja dado por

$$I(B + T) = n^2(n^2 - 1).$$

Aplicando ao tabuleiro de 8×8 casas, teremos

$$I(B + T) = 64 \times 63 = 4032.$$

Substituindo na fórmula, obtemos

$$N(B, T) = 63 \times (896 + 560) - 4032 = 87676.$$

Usando agora a média atendendo às combinações das duas peças, obtemos:

$$\frac{87676}{4032}$$

que é aproximadamente igual a 21.745 e inferior aos $\frac{91}{4}$ para a junção em separado dos movimentos da torre e do bispo.

Refazendo então a probabilidade de um rei estar em cheque quando bispo e torre se encontram no tabuleiro, teremos que onde quer que o bispo e a torre fiquem colocados, o rei adversário tem 62 casas restantes onde ficar, das quais em $\frac{87676}{4032}$ delas estará atacado (em média). A probabilidade de estar sob ataque do bispo ou da torre é assim de:

$$\frac{87676}{4032 \times 62} = \frac{87676}{249984}$$

que é aproximadamente igual a 0.35. Como anteriormente se obteve para a probabilidade de cheque pela dama o valor de $\frac{13}{36}$, dividindo este pelo valor entretanto encontrado para a probabilidade de o rei estar sob ataque do bispo ou da torre quando colocados ambos no tabuleiro (0.35), obtemos o valor aproximado 1.032, isto é, a dama vale aproximadamente 1.032 do conjunto de bispo e torre. Este valor coloca-nos ainda abaixo de todos os valores dados por xadrezistas mas muito perto já do valor dado por Berliner (1.04).

5 Conclusão

Entre os valores de igualdade entre dama, por um lado, e torre mais bispo, por outro, e os valores sempre superiores obtidos para a dama por parte da análise xadrezística, existia uma tensão que se propõe resolver usando a mobilidade média retirando os impedimentos ocasionados pelo estorvo mútuo das duas peças, o que conduz a uma vantagem da dama e conseqüentemente a uma aproximação aos valores de pelo menos um xadrezista.

Referências

- [1] Bonsdorff, E., Fabel, K., Riihimaa, O. (1974). *Ajedrez y Matemáticas*. Barcelona: Ediciones Martinez Roca.
- [2] Rouse Ball, W. W. (2004). *Mathematical Recreations and Essays*. Whitefish, MT: Kessinger Publishing.

