A EQUAÇÃO $ax = xb$ EM CERTAS ÁLGEBRAS DE COMPOSIÇÃO STANDARD DE TIPO II

P. D. Beites
CMA-UBI e Departamento de Matemática
Universidade da Beira Interior
R. Marquês d'Ávila e Bolama
6201-001 Covilhã, Portugal
e-mail: `pbeites@ubi.pt`

A. P. Nicolás
IMUVa e Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Valladolid
Paseo de Belén
7011 Valladolid, España
e-mail: `anicolas@maf.uva.es`

Resumo: Este trabalho mostra como a Álgebra Linear pode contribuir para a discussão da equação $ax = xb$ em contexto de Álgebra Não Associativa, concretamente em álgebras de composição standard de tipo II associadas a uma álgebra de quaterniões e a uma álgebra de octoniões. Caracterizam-se ainda algumas soluções.

Abstract: This work shows how Linear Algebra may contribute to the discussion of the equation $ax = xb$ in Nonassociative Algebra context, concretely in standard composition algebras of type II associated to a quaternion algebra and to an octonion algebra. Furthermore, some solutions are characterized.

palavras-chave: Álgebra de composição; equação linear.

keywords: Composition algebra; linear equation.

1 Introdução

Na classe das álgebras de composição são bem conhecidas as que possuem identidade, pelo que são de dimensão finita, [5]. Estas, estando definidas sobre um corpo de característica diferente de dois, pelo Teorema de Hurwitz generalizado em [4], são isomorfas a uma das seguintes álgebras: o corpo base; uma extensão quadrática separável do corpo base; uma álgebra de quaterniões generalizada; uma álgebra de octoniões generalizada.

Um estudo bastante completo sobre álgebras de composição sem identidade, mas satisfazendo uma condição adicional (ou a associatividade da norma, ou a identidade flexível, ou uma identidade de Moufang, ou a associatividade das terceira e/ou da quarta potências, ou grau dois), foi apresentado em trabalhos da autoria de Cuenca-Mira, Elduque, Myung, Okubo, Osborn, Pérez-Izquierdo e Sánchez-Campos. Todos os detalhes podem ser consultados em [2] e referências aí citadas.

Mais recentemente, em [1], através da topologia de Zariski, provou-se que a identidade $x^2y = n(x)y$ caracteriza as álgebras de composição standard de tipo II. Por outras palavras, se A é uma álgebra de composição de dimensão arbitrária, sobre um corpo de característica diferente de dois, que satisfaz $x^2y = n(x)y$, então A é standard de tipo II.

No presente trabalho, consideram-se as álgebras (não associativas) de composição standard de tipo II associadas a uma álgebra de quaterniões e a uma álgebra de octoniões. Nas referidas primeiras álgebras, toma-se a equação linear $ax = xb$ e, recorrendo a resultados da Álgebra Linear, por um lado, discute-se a mesma e, por outro lado, caracterizam-se algumas soluções.

2 Preliminares

Sejam F um corpo tal que $\mathrm{char}(F) \neq 2$ e A uma álgebra sobre F, com multiplicação denotada por justaposição.

A álgebra A é uma *álgebra de composição* se está munida de uma forma quadrática não degenerada (a *norma*) $n : A \to F$ que é *multiplicativa*, ou seja, para quaisquer $x, y \in A$, $n(xy) = n(x)n(y)$. A forma n ser não degenerada significa que a forma bilinear simétrica associada $n(x, y) = \frac{1}{2}(n(x + y) - n(x) - n(y))$ é não degenerada.

Uma álgebra de composição unital, isto é, uma álgebra de composição com identidade designa-se por *álgebra de Hurwitz*. Numa álgebra de Hurwitz $(U, *)$ com identidade e, a aplicação definida por $x \mapsto \bar{x} = n(x, e)e - x$ é uma *involução*, designada por *conjugação usual*, e, para qualquer $x \in U$, $n(x)e = \bar{x} * x = x * \bar{x}$. Da identidade $\bar{x} * x = n(x)e$ pode obter-se, por linearização, $\bar{x} * y + \bar{y} * x = 2n(x, y)$.

As álgebras de Hurwitz são o ingrediente principal para construir, em dimensão finita, álgebras de composição sem identidade. De facto, dada uma álgebra de Hurwitz com multiplicação $*$, norma n e ϕ, ψ duas isometrias de n, então a multiplicação

$$xy = \phi(x) * \psi(y) \tag{1}$$

define uma nova álgebra de composição com a mesma norma n mas, em geral, não unital, [5]. Reciprocamente, dadas uma álgebra de composição A, de dimensão finita, com multiplicação denotada por justaposição e norma n, para qualquer elemento a com $n(a) \neq 0$, os operadores de multiplicação esquerda e direita, L_u e R_u, onde $u = \dfrac{a^2}{n(a)}$, são isometrias de n. Logo, a nova multiplicação

$$x * y = (R_u^{-1}(x))(L_u^{-1}(y))$$

providencia uma álgebra de Hurwitz com norma n e identidade u^2, [5]. Como a dimensão de qualquer álgebra de Hurwitz é finita e igual a $1, 2, 4$ ou 8, então a dimensão de qualquer álgebra de composição com dimensão finita é também igual a $1, 2, 4$ ou 8.

De acordo com [3], sobre um corpo algebricamente fechado, a modificação da multiplicação $*$ de uma álgebra de Hurwitz $(A, *)$ como em (1) conduz a uma nova álgebra de composição, relativamente à mesma forma quadrática n, com "menos graus de simetria" exceto para as multiplicações definidas por

$$\text{(I) } x * y \quad \text{(II) } \overline{x} * y \quad \text{(III) } x * \overline{y} \quad \text{(IV) } \overline{x} * \overline{y},$$

onde $x \mapsto \overline{x}$ denota a involução usual de $(A, *)$. As novas álgebras são chamadas *álgebras de composição standard* do correspondente *tipo*, ou seja, I, II, III, IV, respetivamente, *associadas a* $(A, *)$. Se a dimensão de A é 1, então todas as álgebras de composição são o corpo base F. Em dimensões superiores, as álgebras de composição standard de diferentes tipos não são isomorfas, [3].

3 Associada a $\mathbb{H}$

Daqui em diante, pode-se assumir, estendendo escalares se necessário, que F é algebricamente fechado. Seja $(\mathbb{H}, *)$ a álgebra de quaterniões sobre F com base $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ e tabela de multiplicação dada por

$$e_1 * e_1 = e_2 * e_2 = e_3 * e_3 = e_1 * e_2 * e_3 = -e_0,$$

onde e_0 é a identidade. Considere-se agora $\mathcal{H}$, a álgebra de composição standard de tipo II associada a $(\mathbb{H}, *)$, sobre F. A sua multiplicação, denotada por justaposição, é dada por

$$xy := \overline{x} * y.$$

Considere-se ainda a tabela seguinte.

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	$-e_1$	e_0	$-e_3$	e_2
e_2	$-e_2$	e_3	e_0	$-e_1$
e_3	$-e_3$	$-e_2$	e_1	e_0

Tabela 1: Tabela de multiplicação de $\mathcal{H}$, onde e_0 é a sua identidade esquerda.

Seja $a = \sum_{i=0}^{3} a_i e_i \in \mathcal{H}$. Denotem-se por $l(a)$ e $r(a)$, respetivamente, as matrizes coordenadas da multiplicação esquerda por a e da multiplicação direita por a. Então, calculando ax e xa, tem-se

$$l(a) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ -a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix} \text{ e } r(a) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & -a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & -a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & -a_0 \end{bmatrix}.$$

Teorema 3.1. *Sejam a e b elementos não nulos de $\mathcal{H}$. A equação linear*

$$ax = xb \tag{2}$$

tem, pelo menos, uma solução não trivial se e só se $n(a) = n(b)$ ou $a + b$ é isotrópico.

Demonstração. A equação linear (2) em $\mathcal{H}$ pode ser escrita, de modo equivalente, como

$$(l(a) - r(b))X = 0_{4\times 1}, \tag{3}$$

que é uma equação matricial linear sobre F. Logo, (2) tem uma solução não trivial se e só se (3) a possui. Tal é equivalente a $\det(l(a) - r(b)) = 0$, onde, efetuando cálculos,

$$\det(l(a) - r(b)) = (n(a) - n(b))n(a + b).$$ □

Corolário 3.2. *Sejam a e b elementos não nulos de $\mathcal{H}$.*

1. *Se $n(a+b) \neq 0$ e $n(a) = n(b)$ então as soluções de (2) são os múltiplos escalares de $a + b$.*

2. Se $n(a+b)=0$ *e* $n(a)=n(b)$ *então os múltiplos escalares de* $a+b$ *são soluções de* (2).

3. Se $n(a+b)=0$ *e* $n(a)\neq n(b)$ *então as soluções não triviais de* (2) *são elementos isotrópicos não pertencentes ao subespaço gerado por* $a+b$.

Demonstração. 1. A equação (2) pode ser escrita como $\bar{a}*x=\bar{x}*b$. Então $\bar{a}*(a+b)=\overline{a}*a+\overline{a}*b=n(a)e_0+\bar{a}*b$, enquanto $\overline{a+b}*b=\bar{a}*b+n(b)e_0$. Logo, tendo em conta que $n(a)=n(b)$, $a+b$ é uma solução de (2). Por outro lado, se x é uma solução de (2) ortogonal a b então $n(x,b)=0$. Logo, $\bar{x}*b+\bar{b}*x=0$, pelo que $\bar{a}*x=\bar{x}*b=-\bar{b}*x$ e, consequentemente, $\overline{a+b}*x=0$. Como $n(a+b)\neq 0$ então $n(\overline{a+b})=n(a+b)\neq 0$ e existe $(\overline{a+b})^{-1}$. Pela associatividade de $(\mathbb{H},*)$, conclui-se que $x=0$. Portanto, a interseção do subespaço das soluções de (2) com o espaço, de dimensão 3, ortogonal a b é trivial. Conclui-se que o subespaço das soluções tem dimensão 1.

2. Se $n(a)=n(b)$ então, para cada $\gamma\in F$, $\gamma(a+b)$ é solução de (2). De facto, $\overline{a}*(\gamma(a+b))=\gamma(n(a)e_0+\overline{a}*b)=\gamma(n(b)e_0+\overline{a}*b)=\overline{\gamma(a+b)}*b$.

3. Pelo Teorema 3.1, seja z uma solução não trivial de (2). Então $az=zb$, ou seja, $\overline{a}*z=\overline{z}*b$. Assim, $n(z)[n(a)-n(b)]=0$ e, atendendo a que $n(a)\neq n(b)$, tem-se $n(z)=0$. Portanto, z é isotrópico. Por último, tendo novamente em conta que $n(a)\neq n(b)$, os elementos isotrópicos $\alpha(a+b)$, onde $\alpha\in F\backslash\{0\}$, não são soluções de (2). De facto, se $a(\alpha(a+b))=(\alpha(a+b))b$, então $\alpha n(a)e_0+\alpha\overline{a}*b=\alpha\overline{a}*b+\alpha n(b)e_0$, obtendo-se a contradição $n(a)=n(b)$. □

4 Associada a $\mathbb{O}$

Como na secção anterior, suponha-se que F é algebricamente fechado. Seja $(\mathbb{O},*)$ a álgebra dos octoniões sobre F com base $\{e_0,e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}$ e tabela da multiplicação dada por

$$e_i*e_i=-e_0 \text{ para } i\in\{1,\ldots,7\},$$

sendo e_0 a identidade, e pelo plano de Fano da Figura 1, onde a ordenação cíclica de cada três elementos sobre a mesma linha é mostrada pelas setas. Considere-se agora $\mathcal{O}$, a álgebra de composição standard de tipo II associada a $(\mathbb{O},*)$, sobre F. A sua multiplicação, denotada por justaposição, é dada por

$$xy:=\overline{x}*y.$$

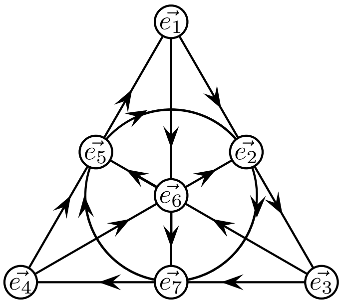

Figura 1: Plano de Fano para $\mathbb{O}$.

Considere-se ainda a tabela subsequente.

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	$-e_1$	e_0	$-e_3$	e_2	$-e_5$	e_4	$-e_7$	e_6
e_2	$-e_2$	e_3	e_0	$-e_1$	$-e_6$	e_7	e_4	$-e_5$
e_3	$-e_3$	$-e_2$	e_1	e_0	e_7	e_6	$-e_5$	$-e_4$
e_4	$-e_4$	e_5	e_6	$-e_7$	e_0	$-e_1$	$-e_2$	e_3
e_5	$-e_5$	$-e_4$	$-e_7$	$-e_6$	e_1	e_0	e_3	e_2
e_6	$-e_6$	e_7	$-e_4$	e_5	e_2	$-e_3$	e_0	$-e_1$
e_7	$-e_7$	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	e_0

Tabela 2: Tabela de multiplicação de $\mathcal{O}$, onde e_0 é a sua identidade esquerda.

Seja $a = \sum_{i=0}^{7} a_i e_i \in \mathcal{O}$. Então as matrizes coordenadas da multiplicação esquerda por a e da multiplicação direita por a são dadas, respetivamente, por

$$l(a) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ -a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 & a_5 & -a_4 & a_7 & -a_6 \\ -a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 & a_6 & -a_7 & -a_4 & a_5 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 & -a_7 & -a_6 & a_5 & a_4 \\ -a_4 & -a_5 & -a_6 & a_7 & a_0 & a_1 & a_2 & -a_3 \\ -a_5 & a_4 & a_7 & a_6 & -a_1 & a_0 & -a_3 & -a_2 \\ -a_6 & -a_7 & a_4 & -a_5 & -a_2 & a_3 & a_0 & a_1 \\ -a_7 & a_6 & -a_5 & -a_4 & a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

e

$$r(a) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ a_1 & -a_0 & -a_3 & a_2 & -a_5 & a_4 & -a_7 & a_6 \\ a_2 & a_3 & -a_0 & -a_1 & -a_6 & a_7 & a_4 & -a_5 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & -a_0 & a_7 & a_6 & -a_5 & -a_4 \\ a_4 & a_5 & a_6 & -a_7 & -a_0 & -a_1 & -a_2 & a_3 \\ a_5 & -a_4 & -a_7 & -a_6 & a_1 & -a_0 & a_3 & a_2 \\ a_6 & a_7 & -a_4 & a_5 & a_2 & -a_3 & -a_0 & -a_1 \\ a_7 & -a_6 & a_5 & a_4 & -a_3 & -a_2 & a_1 & -a_0 \end{bmatrix}.$$

Teorema 4.1. *Sejam a e b elementos não nulos de $\mathcal{O}$. A equação linear*

$$ax = xb \tag{4}$$

tem, pelo menos, uma solução não trivial se e só se $n(a) = n(b)$ ou $a + b$ é isotrópico.

Demonstração. A demonstração que estabelece este resultado é análoga à do Teorema 3.1. Fazendo o cálculo de $\det(l(a) - r(b))$ com recurso ao Maple™, obtém-se $(n(a) - n(b))(n(a + b))^3$. □

Corolário 4.2. *Sejam a e b elementos não nulos de $\mathcal{O}$.*

1. *Se $n(a+b) \neq 0$ e $n(a) = n(b)$ então as soluções de (4) são os múltiplos escalares de $a + b$.*

2. *Se $n(a + b) = 0$ e $n(a) = n(b)$ então os múltiplos escalares de $a + b$ são soluções de (2).*

3. *Se $n(a+b) = 0$ e $n(a) \neq n(b)$ então as soluções não triviais de (4) são elementos isotrópicos não pertencentes ao subespaço gerado por $a + b$.*

Demonstração. Pode ser elaborada de forma semelhante à demonstração do Corolário 3.2 embora, no que se refere a 1., seja necessário utilizar a identidade subsequente:

$$\text{para qualquer } z \in \mathbb{O} \text{ com } n(z) \neq 0,\ z^{-1} * (z * w) = (z^{-1} * z) * w.$$

Efetivamente, contrariamente ao que sucede com a álgebra $(\mathbb{H}, *)$ dos quaterniões, a álgebra $(\mathbb{O}, *)$ dos octoniões não é associativa. □

Agradecimentos

A investigação do primeiro autor decorreu no âmbito das atividades do Centro de Matemática e Aplicações da Universidade da Beira Interior, sendo financiada pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia (Portugal), projeto PEst-OE/MAT/UI0212/2011. O segundo autor foi financiado pelo Ministerio de Educación y Ciencia (España), projeto MTM2010-18370-C04-01.

Referências

[1] P. D. Beites e A. P. Nicolás, "Standard composition algebras of types II and III", (2014), submetido.

[2] J. A. Cuenca-Mira e E. Sánchez-Campos, "Composition algebras satisfying certain identities", *J. Algebra*, Vol. 306, No. 2 (2006), pp. 634–644.

[3] A. Elduque e J. M. Pérez-Izquierdo, "Composition algebras with large derivation algebras", *J. Algebra*, Vol. 190, No. 2 (1997), pp. 372–404.

[4] N. Jacobson, "Composition algebras and their automorphisms", *Rend. Circ. Mat. Palermo*, Vol. 7, No. 1 (1958), pp. 55–80.

[5] I. Kaplansky, "Infinite-dimensional quadratic forms admitting composition", *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 4, No. 6 (1953), pp. 956–960.

[6] F. S. Leite, "The geometry of hypercomplex matrices", *Linear Multilinear Algebra*, Vol. 34, No. 2 (1993), pp. 123–132.

[7] Maple 15 (2011). Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., Waterloo, Ontario.