Sobre um resultado de A. A. Monteiro e M. M. Peixoto

Dinamérico P. Pombo Jr. e *Daniel P. S. de Souza*
Instituto de Matemática
Universidade Federal Fluminense
Rua Mário Santos Braga, s/nº
24020–140 Niterói, RJ Brasil
e-mail: dpombo@terra.com.br
daniel.parasio@ig.com.br

Resumo: No artigo [4], A. A. Monteiro e M. M. Peixoto provaram que uma condição necessária e suficiente para que um espaço métrico M possua a propriedade de Lebesgue é que toda função real contínua definida em M seja uniformemente contínua, fornecendo ainda seis outras condições equivalentes às duas mencionadas. O objetivo deste artigo de divulgação é adicionar duas novas condições equivalentes àquelas consideradas no artigo citado.

Palavras-chave: espaço métrico, propriedade de Lebesgue, espaço semimétrico, continuidade uniforme.

Abstract: A. A. Monteiro and M. M. Peixoto have proved in [4] that for a metric space M to have the Lebesgue property it is necessary and sufficient that every real continuous function on M be uniformly continuous, and have also furnished six other equivalent conditions to these two conditions. The purpose of this expository article is to provide two new equivalent conditions to the ones considered in the article just mentioned.

Keywords: metric space, Lebesgue property, semimetric space, uniform continuity.

É conhecido que todo espaço métrico compacto M satisfaz as seguintes propriedades:

(i) toda cobertura aberta de M possui um número de Lebesgue ([5], p.86);

(ii) toda função contínua de M em um espaço métrico arbitrário é uniformemente contínua ([5], p. 110).

No artigo citado acima, António Aniceto Monteiro e Maurício Matos Peixoto provaram que, para um espaço métrico M arbitrário, as condições (i) e (ii) são equivalentes, fornecendo ainda seis outras condições equivalentes a (i) e (ii). O objetivo desta nota é adicionar duas novas condições equivalentes àquelas mencionadas no referido artigo. Mas, antes de enunciar o teorema que será aqui estabelecido, consideramos pertinente apresentar alguns preliminares ([1, §1]; [5, cap. XVIII]).

Seja N um conjunto não vazio. Uma função $\rho\colon N \times N \to \mathbb{R}$ é uma semidistância em N quando as seguintes propriedades são satisfeitas para quaisquer $x, y, z \in N$: $\rho(x,y) \geq 0$, $\rho(x,x) = 0$, $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ e $\rho(x,z) \leq \rho(x,y)+\rho(y,z)$. Se, além disso, as condições $x, y \in N$ e $\rho(x,y) = 0$ implicam $x = y$, ρ é uma distância (ou métrica) em N. Se Γ (respectivamente ρ) é uma família de semidistâncias (respectivamente uma métrica) em N, o par (N,Γ) (respectivamente (N,ρ)) é um espaço semimétrico (respectivamente espaço métrico). É fácil ver que toda família de semidistâncias define uma estrutura uniforme, sendo esta última noção devida a A. Weil [6]. Por outro lado, é possível provar que toda estrutura uniforme provém de uma família de semidistâncias. A cada família $\Gamma = (\rho_j)_{j\in J}$ de semidistâncias em N está associada uma única topologia τ_Γ em N de modo que, para cada $x \in N$, todas as interseções finitas de conjuntos da forma $B_{j,r}(x) = \{y \in N : \rho_j(y,x) < r\}$ $(j \in J, r > 0)$ constituem um sistema fundamental de τ_Γ-vizinhanças abertas de x. Quando olharmos para um espaço semimétrico (N,Γ) como espaço topológico, subentender-se-á N munido de τ_Γ.

Consideremos um conjunto não vazio N e vejamos alguns exemplos:

(i') A função $\rho\colon N\times N \to \mathbb{R}$, definida por $\rho(x,y) = 1$ se $x \neq y$ e $\rho(x,x) = 0$, é uma métrica em N, dita a métrica discreta em N.

(ii') Se g é uma função de N em $\mathbb{R}$, a função $\rho(x,y) = |g(x) - g(y)|$ é uma semidistância em N, a qual é uma métrica se e só se g é injetora. Mais geralmente, se $(g_j)_{j\in J}$ é uma família de funções de N em $\mathbb{R}$, então $(\rho_j)_{j\in J}$ é uma família de semidistâncias em N, onde $\rho_j(x,y) = |g_j(x) - g_j(y)|$ para $j \in J$.

(iii') Seja $\Gamma = (\rho_j)_{j\in J}$ uma família de semidistâncias em N. Sejam M um conjunto não vazio qualquer e $\mathcal{F}(M,N)$ o conjunto de todas as funções de M em N. Para $j \in J$ e $x \in M$ fixados, a função

$$\begin{array}{rccc} \lambda_{j,x}\colon & \mathcal{F}(M,N) \times \mathcal{F}(M,N) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \mapsto & \rho_j\big(f(x), g(x)\big) \end{array}$$

é uma semidistância em $\mathcal{F}(M,N)$. Logo, $\Gamma_s = (\lambda_{j,x})_{j\in J, x\in M}$ é uma família de semidistâncias em $\mathcal{F}(M,N)$. τ_{Γ_s} é dita a *topologia da convergência simples.*

(iv') Sejam Γ, M e $\mathcal{F}(M,N)$ como em (iii'). Então, para cada $j \in J$, a função

$$\begin{array}{rccc} \nu_j: & \mathcal{F}(M,N) \times \mathcal{F}(M,N) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \mapsto & \min\left\{1, \sup\limits_{x \in M} \rho_j(f(x), g(x))\right\}, \end{array}$$

é uma semidistância em $\mathcal{F}(M,N)$. Logo, $\Gamma_u = (\nu_j)_{j \in J}$ é uma família de semidistâncias em $\mathcal{F}(M,N)$. τ_{Γ_u} é dita a *topologia da convergência uniforme.*

(v') Seja $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Se p é uma seminorma em um espaço vetorial E sobre $\mathbb{K}$ ([5], p. 240), a função $\rho(x,y) = p(x-y)$ é uma semidistância em E. Além disso, ρ é uma métrica se p é uma norma.

(vi') Sejam M um espaço topológico não vazio e $\mathcal{C}(M)$ o espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ das funções contínuas de M em $\mathbb{K}$. Para cada $K \subset M$ compacto, a função $p_K(f) = \sup\{|f(x)| : x \in K\}$ é uma seminorma em $\mathcal{C}(M)$. Assim,

$$\Gamma_0 = \{\rho_K : K \subset M \text{ compacto}\}$$

é uma família de semidistâncias em $\mathcal{C}(M)$, onde $\rho_K(f,g) = p_K(f-g)$. τ_{Γ_0} é dita a *topologia compacto-aberta.*

Sejam (M,Λ) e (N,Γ) dois espaços semimétricos, com $\Lambda = (\theta_i)_{i \in I}$ e $\Gamma = (\rho_j)_{j \in J}$, e $\mathcal{X}$ um conjunto de funções de M em N. $\mathcal{X}$ é equicontínuo em $a \in M$ se para quaisquer $j \in J$ e $r > 0$ existem $i_1, \ldots, i_m \in I$ e $s > 0$ de modo que as relações $x \in M$, $\theta_{i_1}(x,a) < s, \ldots, \theta_{i_m}(x,a) < s$, $f \in \mathcal{X}$ implicam $\rho_j(f(x), f(a)) < r$; $\mathcal{X}$ é equicontínuo se $\mathcal{X}$ é equicontínuo em todo $a \in M$. $\mathcal{X}$ é uniformemente equicontínuo se para quaisquer $j \in J$ e $r > 0$ existem $i_1, \ldots, i_m \in I$ e $s > 0$ de modo que as relações $x, y \in M$, $\theta_{i_1}(x,y) < s, \ldots, \theta_{i_m}(x,y) < s$, $f \in \mathcal{X}$ implicam $\rho_j(f(x), f(y)) < r$. No caso em que $\mathcal{X}$ se reduz a uma única função f, diz-se simplesmente que f é contínua ou uniformemente contínua. É claro que o conceito de equicontinuidade uniforme é mais forte do que o de equicontinuidade.

Sejam (M,ρ) um espaço métrico e $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma cobertura aberta de M. No caso em que L é finito (respectivamente possui dois elementos), diz-se que $\mathcal{C}$ é uma cobertura finita (respectivamente cobertura binária) e aberta de M. Diz-se que $\epsilon > 0$ é um número de Lebesgue de $\mathcal{C}$ se para todo

$x \in M$ existe $\lambda \in L$ tal que $B_\epsilon(x) = \{y \in M : \rho(y,x) < \epsilon\} \subset C_\lambda$. Diz-se que (M,ρ) possui a propriedade de Lebesgue se toda cobertura aberta de M admite um número de Lebesgue.

Já lembramos que todo espaço métrico compacto possui a propriedade de Lebesgue. Entretanto, a recíproca dessa afirmação não é verdadeira em geral, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 1 Sejam $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e ρ a métrica discreta em $\mathbb{N}$. Como $\mathbb{N}$ é infinito, $(\mathbb{N},\rho)$ não é compacto. Seja $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma cobertura aberta arbitrária de $\mathbb{N}$. Então 1 é um número de Lebesgue de $\mathcal{C}$. Realmente, como $B_1(n) = \{n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e como $\mathcal{C}$ é uma cobertura de $\mathbb{N}$, conclui-se que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $\lambda \in L$ tal que $B_1(n) \subset C_\lambda$. Logo, $(\mathbb{N},\rho)$ possui a propriedade de Lebesgue.

Enunciaremos agora o resultado prometido:

Teorema 1 *Para um espaço métrico (M,ρ), as seguintes condições são equivalentes:*

(a) toda cobertura binária e aberta de M possui um número de Lebesgue;

(b) toda cobertura finita e aberta de M possui um número de Lebesgue;

(c) para quaisquer F, F' fechados em M e não vazios, com $F \cap F' = \emptyset$, tem-se $\rho(F,F') = \inf\{\rho(x,y) : x \in F, y \in F'\} > 0$;

(d) (M,ρ) possui a propriedade de Lebesgue;

(e) para todo espaço semimétrico (N,Γ), toda função contínua de M em N é uniformemente contínua;

(f) para todo espaço semimétrico (N,Γ), todo conjunto equicontínuo de funções de M em N é uniformemente equicontínuo;

(g) para todo espaço métrico (M',ρ'), toda função contínua de M em M' é uniformemente contínua;

(h) toda função contínua de M em $\mathbb{R}$ é uniformemente contínua;

(i) toda função contínua e limitada de M em $\mathbb{R}$ é uniformemente contínua;

(j) para todo espaço métrico (M',ρ'), toda função contínua e limitada de M em M' é uniformemente contínua.

Demonstração: Como a equivalência entre as condições (a), (b), (c), (d), (g), (h), (i) e (j) foi estabelecida em [4] e como a implicação (f) $\Rightarrow$ (g) é evidente, resta provar que (d) $\Rightarrow$ (e) $\Rightarrow$ (f), o que passamos a fazer.

Argumentaremos como na demonstração do Lema 5 de [4] para mostrar que (d) $\Rightarrow$ (e). Com efeito, sejam $(N,\Gamma)(\Gamma = (\rho_j)_{j\in J})$ um espaço semimétrico e $f\colon M \to N$ uma função contínua, ambos arbitrários. Sejam $j \in J$ e $r > 0$ arbitrários. Como $N = \bigcup_{z\in N} B_{j,\frac{r}{2}}(z)$ e como cada conjunto $f^{-1}\big(B_{j,\frac{r}{2}}(z)\big)$ é aberto em M (pela continuidade de f), segue que $\mathcal{C} = \big(f^{-1}\big(B_{j,\frac{r}{2}}(z)\big)\big)_{z\in N}$ é uma cobertura aberta de M. Logo, por hipótese, $\mathcal{C}$ admite um número de Lebesgue $s > 0$. Sejam $x, y \in M$ arbitrários tais que $\rho(x,y) < s$. Então existe $z \in N$ tal que $B_s(x) \subset f^{-1}\big(B_{j,\frac{r}{2}}(z)\big)$, o que fornece $\rho_j(f(x),z) < \frac{r}{2}$ e $\rho_j(f(y),z) < \frac{r}{2}$. Consequentemente,

$$\rho_j(f(x),f(y)) \leq \rho_j(f(x),z) + \rho_j(f(y),z) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

e, portanto, f é uniformemente contínua.

Finalmente, provemos que (e) $\Rightarrow$ (f). De fato, sejam $(N,\Gamma)\,(\Gamma = (\rho_j)_{j\in J})$ um espaço semimétrico e $\mathcal{X}$ um conjunto equicontínuo de funções de M em N, ambos arbitrários. Consideremos o espaço semimétrico $(\mathcal{F}(\mathcal{X},N), \Gamma_u)$ mencionado em (iv'), onde $\Gamma_u = (\nu_j)_{j\in J}$, e definamos $\phi\colon M \to \mathcal{F}(\mathcal{X},N)$ por $\phi(x)(f) = f(x)$ para quaisquer $x \in M$ e $f \in \mathcal{X}$. Afirmamos que ϕ é contínua. Realmente, sejam $a \in M$, $j \in J$ e $r > 0$ arbitrários. Pela equicontinuidade de $\mathcal{X}$ em a, existe $\alpha > 0$ tal que as relações $x \in B_\alpha(a)$, $f \in \mathcal{X}$ implicam $\rho_j\big(f(x), f(a)\big) \leq r$. Daí resulta que, para todo $x \in B_\alpha(a)$,

$$\begin{aligned}\nu_j\left(\phi(x),\phi(a)\right) &= \min\left\{1, \sup_{f\in\mathcal{X}} \rho_j\big(\phi(x)(f),\phi(a)(f)\big)\right\}\\ &= \min\left\{1, \sup_{f\in\mathcal{X}} \rho_j\big(f(x), f(a)\big)\right\} \leq r,\end{aligned}$$

mostrando que

$$\phi(B_\alpha(a)) \subset \{h \in \mathcal{F}(\mathcal{X},N) : \nu_j\left(h,\phi(a)\right) \leq r\}.$$

Portanto, ϕ é contínua em a, o que implica a continuidade de ϕ. Assim, por hipótese, ϕ é uniformemente contínua. Sejam j e r como acima e $r_0 = \min\{1, r\}$. Logo, existe $s > 0$ tal que se $x, y \in M$ e $\rho(x,y) < s$, então

$$\begin{aligned}\nu_j\left(\phi(x),\phi(y)\right) &= \min\left\{1, \sup_{f\in\mathcal{X}} \rho_j\left(\phi(x)(f),\phi(y)(f)\right)\right\}\\ &= \min\left\{1, \sup_{f\in\mathcal{X}} \rho_j\big(f(x),f(y)\big)\right\} < r_0.\end{aligned}$$

Logo, as relações $x, y \in M$, $\rho(x,y) < s$, $f \in \mathcal{X}$ implicam $\rho_j\big(f(x),f(y)\big) < r_0 \leq r$, provando a equicontinuidade uniforme de $\mathcal{X}$.

Isto conclui a demonstração do teorema. ■

Observação 1 A continuidade (respectivamente continuidade uniforme) da função ϕ, considerada na demonstração do Teorema 1, equivale à equicontinuidade (respectivamente equicontinuidade uniforme) de $\mathcal{X}$.

Observação 2 Argumentando exatamente como na demonstração de (e) $\Rightarrow$ (f), prova-se que as duas referidas condições permanecem equivalentes se substituirmos o espaço métrico (M,ρ) por qualquer espaço semimétrico (ver também [**?**]).

Observação 3 Foi provado em [2] que todo espaço métrico conexo (M,ρ) satisfazendo a condição (h) é compacto.

O enunciado do Teorema 1 suscita a seguinte pergunta:

Fixado um espaço métrico (M,ρ), a existência de um espaço métrico (M',ρ') tal que toda função contínua de M em M' é uniformemente contínua equivale às condições do referido teorema (como ocorre se tomarmos $(M',\rho') = \mathbb{R}$)?

Mostraremos no exemplo abaixo que a resposta à pergunta formulada é negativa.

Exemplo 2 Tomemos $M = \mathbb{R}$ munido da métrica usual e $M' = \{0,1\}$ munido da métrica discreta. Se $f : M \to M'$ é uma função contínua arbitrária, então f é constante (pois M é conexo); logo, f é uniformemente contínua. Entretanto, a condição (h) não é válida, já que a função $x \in M \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ é contínua, apesar de não ser uniformemente contínua.

Referências

[1] N. Bourbaki. *Topologie générale*, chapitre 9. 2ª ed. Actualités Scientifiques et Industrielles 1045. Hermann, 1958.

[2] K. Iséki. "Notes on Topological Spaces. II. Some Properties of Topological Spaces with Lebesgue Property". Em: *Proceedings of the Japan Academy* 32 (1956), pp. 171-173.

[3] N. C. Bernardes Jr. e D. P. Pombo Jr. "Uniform spaces where all continuity is uniform". Em: *Kyungpook Mathematical Journal* 34 (1994), pp. 247–257.

[4] A. A. Monteiro e M. M. Peixoto. "Le nombre de Lebesgue et la continuité uniforme". Em: *Portugaliæ Mathematica* 10 (1951), pp. 105-113.

[5] L. Schwartz. *Topologie générale et analyse fonctionnelle* Collection Enseignement des sciences 11. Hermann, 1970.

[6] A.Weil. *Sur les espaces a structure uniforme et sur la topologie générale.* Actualités Scientifiques et Industrielles, 551. Hermann, 1937.