Problemas

Editor:
Jorge Nuno Silva

Notas sobre o Problema anterior e *A cadeira da noiva*

Jorge Nuno Silva

Os leitores são convidados a enviar, para eventual publicação, soluções, comentários, propostas de problemas, etc. Essa correspondência deve ser enviada para a SPM, ao cuidado do editor desta secção. Há livros da Gradiva para sortear entre as soluções recebidas em cada número.

Relembremos o problema do número anterior.

Elevadores malditos

Gamow e Stern relataram uma situação curiosa, que viveram quando trabalhavam no mesmo edifício, em andares diferentes, e se tentavam visitar.[1]

Gamow trabalhava no primeiro andar, Stern no quinto de um prédio com seis andares. Quando Gamow queria apanhar o elevador para subir até ao gabinete do seu colega, ficava irritado por a maioria dos elevadores surgir no seu andar em sentido descendente. De uma forma análoga, quando Stern queria descer ao primeiro andar, era surpreendido por muitos elevadores a subir. Haveria alguma conspiração para os manter afastados?

Para abordar este problema matematicamente é necessário proceder a alguma idealização. Vamos supor um prédio de N andares com elevadores

[1] George Gamow & Marvin Stern, *Puzzle-Math*, New York: Viking Press, 1958.

que, independentemente uns dos outros, se deslocam à mesma velocidade, num vai-vem contínuo entre o Piso 0 e o Piso N.

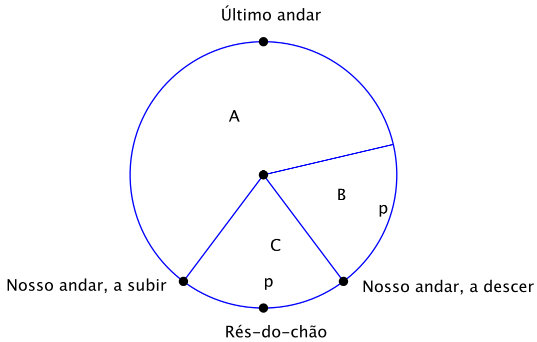
Vamos colocar-nos no k-ésimo andar e calcular a probalidade de o próximo elevador a passar no nosso andar o fazer a descer.

No caso de haver somente um elevador, os cálculos são simples. Num momento arbitrário em que procuremos o ascensor, a probabilidade de ele nos surgir a subir é igual à probabilidade de ele se encontrar abaixo do andar k, isto é, k/N. Sendo que a probabilidade de aparecer a descer é de $1 - k/N$. No caso particular de Gamow ($k = 1$, $N = 6$) vemos que a sorte lhe é adversa 5 em cada 6 vezes.

E se houver vários elevadores?

Este problema foi resolvido por Knuth[2] essencialmente de duas maneiras, uma analítica, muito elaborada e outra baseada na representação do ciclo de cada elevador por um ponto que gira numa circunferência de perímetro unitário, em sentido retrógrado.

[2] *Selected Papers on Fun & Games*, CSLI, Stanford 2011.



Na notação usada acima, seja $p = {}^{k}/_{N}$. Marquemos um arco de comprimento p cujos extremos marcam o nosso andar, atingido em sentidos contrários. Marquemos ainda outro arco com o mesmo comprimento, obtendo a divisão da circunferência em três partes, A, B e C.

Notemos agora que se os n pontos que representam os n elevadores se encontrarem todos em A (o que sucede com uma probabilidade $(1-2p)^n$) então o próximo elevador a chegar ao nosso andar vai a descer. Mas se um ou mais elevadores estiver em B ou C (a que corresponde uma probabilidade $1-(1-2p)^n$) as probabilidades de vir a subir ou a descer são iguais. Assim, a probabilidade procurada é

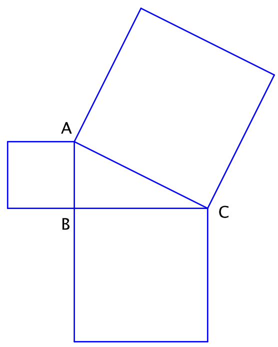
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-2p)^n \,.$$

Em rigor estes cálculos valem para $p \leqslant 0{,}5$. No caso geral temos

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-2p)|1-2p|^{n-1} \,.$$

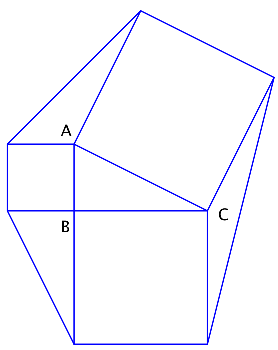
A cadeira da noiva

A figura que habitualmente acompanha a prova do Teorema de Pitágoras é conhecido por vários nomes populares. Na Rússia, chamam-lhe «as calças de Pitágoras», nós vamos usar «a cadeira da noiva».



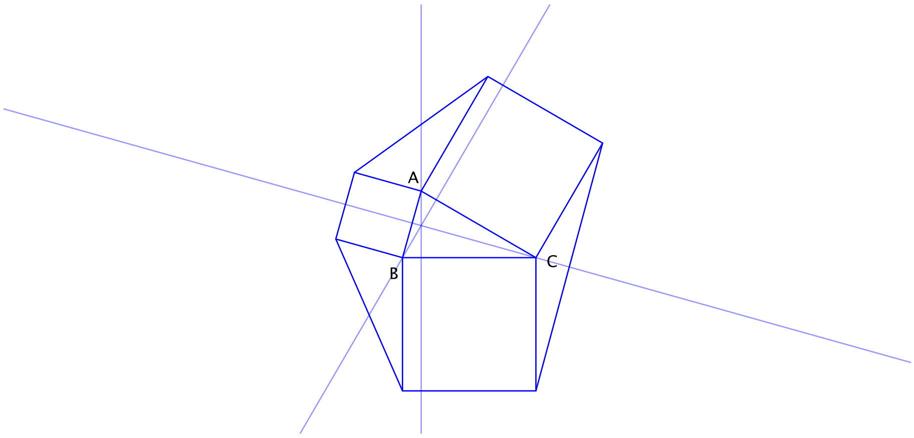
A Cadeira da Noiva

Unamos os vértices dos quadrados de forma a construir três novos triângulos.



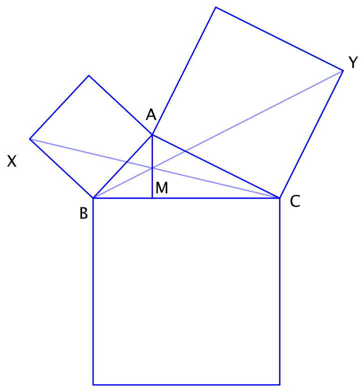
Questão 1: Mostre que cada um destes três novos triângulos tem a mesma área do que ABC.

Determinemos as medianas destes novos triângulos. Consideremos os seus prolongamentos.



Questão 2: Mostre que estas medianas são alturas do triângulo ABC, mesmo que este não seja rectângulo.

Tracemos XC e YB, que se encontram em M.



Questão 3: Mostre que AM é uma altura do triângulo ABC, mesmo que este não seja rectângulo.