Cálculo Fraccionário

Rui A. C. Ferreira
Grupo Física-Matemática, Universidade de Lisboa
Av. Prof. Gama Pinto, 2, 1649-003 Lisboa, Portugal
e-mail: `raferreira@fc.ul.pt`

Resumo: Nesta nota, pretendemos fazer uma breve exposição do denominado *Cálculo Fraccionário.* Introduzimos alguns conceitos, bem como explicitamos e comentamos algumas de suas propriedades. Algumas perspectivas sobre o futuro da área são também mencionadas. Finalmente, os principais livros escritos sobre o assunto, são referenciados para conveniência do leitor.

Abstract: In this note we intend to make a brief exposition of the so-called *Fractional Calculus.* We introduce some concepts as well, made explicit and make some comments on some of its properties. Some perspectives on the future of the area are also mentioned. Finally, the main books written on the subject, are referenced to the reader's convenience.

palavras-chave: Cálculo fraccionário; derivada de Riemann–Liouville, derivada de Caputo .

keywords: Fractional calculus; Riemann–Liouville derivative; Caputo's derivative.

1 A origem do Cálculo Fraccionário

A notação $d^n y/dx^n,\ n \in \mathbb{N}$, para a derivada de uma função é atribuída originalmente a Leibniz. Em 1695, L'Hôpital numa carta escrita a Leibniz, formulara a *simples* e ao mesmo tempo elegante questão: e se $n = \frac{1}{2}$?

Havia nascido o Cálculo Fraccionário!

Na sua carta de resposta a L'Hôpital, Leibniz escreve profeticamente, citando:

> ...This is an apparent paradox from which, one day, useful consequences will be drawn.

Subsequentemente, vários matemáticos contribuiram directa ou indirectamente para o estabelecimento (e desenvolvimento) desta teoria; destacam-se nomes como Euler, Lagrange ou Riemann e, mais recentemente, G. H. Hardy, J. E. Littlewood e H. Weyl (o leitor pode consultar [3] onde a história do cálculo fraccionário é descrita pormenorizadamente).

2 Integrais e derivadas de ordem arbitrária

O título desta secção não é inocente. De facto, a ordem dos operadores que iremos definir mais adiante poderá ser um número real qualquer e não apenas um número fraccionário. No entanto, a nomenclatura *Cálculo Fraccionário* ainda hoje é usada tendo em consideração a pergunta que conduziu ao início do estudo das derivadas de ordem não-inteira (cf. Secção 1).

Comecemos então por definir um integral de ordem real: sejam $a \in \mathbb{R}$ e f uma função real de variável real e integrável para $t \geq a$. Se $n \in \mathbb{N}$ e

$$I_a^n f(t) = \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_{n-1}} f(s)ds,$$

então é fácil demonstrar por indução que

$$I_a^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s)ds. \tag{1}$$

Ora, como $(n-1)! = \Gamma(n)$, onde

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \ x > 0,$$

é a função *Gamma*, então o lado direito de (1) pode ter sentido para valores não inteiros de n.

Define-se assim o *Integral de Riemann–Liouville* de ordem $\alpha > 0$ de uma função f por

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds, \tag{2}$$

desde que o lado direito de (2) exista.

Impondo condições bastante razoáveis à função f (e.g. continuidade), é possível demonstrar que $\lim_{\alpha\to 0} I_a^\alpha f(t) = f(t)$ (cf. [4, Secção 2.3.2]). Por essa razão, define-se $I_a^0 f(t) = f(t)$.

Calculamos a título de exemplo o integral de Riemann–Liouville (de ordem $\alpha > 0$) da função potência: $f(t) = (t-a)^\beta$, $\beta > -1$. Temos que:

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (s-a)^\beta ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-a-r(t-a))^{\alpha-1} r^\beta (t-a)^\beta (t-a) dr \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+\beta} \int_0^1 r^\beta (1-r)^{\alpha-1} dr \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta} B(\beta+1,\alpha)$$
$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\alpha+\beta},$$

onde $B(x,y)$ é a denominada função beta (ver [3, pag. 299–300]).

Tendo definido um integral de ordem arbitrária, definimos agora as duas derivadas *fraccionárias* mais utilizadas na literatura (para outras definições o leitor poderá consultar e.g. [5]). A *Derivada de Riemann–Liouville* de ordem $\alpha > 0$ de uma função f é definida por

$$ {}_aD^\alpha f(t) = D^n I_a^{n-\alpha} f(t), \quad \text{onde } n = \lceil \alpha \rceil, \tag{3}$$

e a *Derivada de Caputo* de ordem $\alpha > 0$ de uma função f é definida por

$$ {}_a^C D^\alpha f(t) = I_a^{n-\alpha} D^n f(t), \quad \text{onde } n = \lceil \alpha \rceil, \tag{4}$$

sempre que o lado direito de (3) e de (4) estejam bem definidos, respectivamente.

Assumindo que (3) e (4) existem, então as derivadas de Riemann–Liouville e de Caputo estão relacionadas pela seguinte fórmula:

$$ {}_a^C D^\alpha f(t) = {}_aD^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k f(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-a)^{k-\alpha}, \quad n = \lceil \alpha \rceil. \tag{5}$$

Podemos concluir imediatamente que estas derivadas coincidem quando $D^k f(a) = 0,\ k = 0, \ldots, n-1$. De facto, uma das principais razões[1] para um investigador optar pela escolha do operador (3) ou do operador (4) é a definição das condições iniciais para uma determinada equação diferencial (cf. e.g. Secção 5 e Secção 6 em [1]).

Vejamos agora algumas propriedades destes operadores (para a derivada usaremos a de Caputo). Assumindo que para uma determinada função f os operadores estão bem definidos, temos que:

1. $I_a^\alpha I_a^\beta f(t) = I_a^{\alpha+\beta} f(t) = I_a^\beta I_a^\alpha f(t)$.
2. $I_a^\alpha {}_a^C D^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k f(a)}{k!}(t-a)^k$.

[1] A propósito, note-se que a derivada de Riemann–Liouville da função constante não é zero enquanto que a derivada de Caputo da mesma é.

3. ${}_a^C D^\alpha I_a^\alpha f(t) = f(t)$.

A fórmula em 1. é designada por *propriedade de semigrupo* (demonstraremos esta propriedade no final desta secção); as igualdades em 2. e 3. permitem, por exemplo, transformar um problema de valor inicial para a sua (equivalente) forma integral (cf. e.g. [1, Secção 6.1]). Mais propriedades podem ser consultadas em qualquer dos livros referenciados [1, 2, 3, 4, 5], pois não pretendemos de modo nenhum ser exaustivos nesta apresentação. Concluimos esta secção alertando o leitor de que, mesmo para classes de funções f e g bastante gerais, a fórmula de Leibniz (derivada do produto de funções) não é válida em geral para estes operadores, i.e. em geral, ${}_a\mathcal{D}^\alpha fg(t) \neq {}_a\mathcal{D}^\alpha f(t)g(t) + f(t){}_a\mathcal{D}^\alpha g(t)$, onde $\mathcal{D}^\alpha$ representa um operador de ordem α (o leitor pode consultar a fórmula de Leibniz em [1, Theorem 2.18]). Isto apresenta um claro inconveniente aquando da tentativa de provar alguns resultados da teoria de equações diferenciais usando ao invés derivadas fraccionárias (um claro exemplo deste facto é a falta de resultados (fortes) em sistemas dinâmicos usando derivadas fraccionárias).

Demonstração de propriedade 1.:

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha I_a^\beta f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \int_a^s (s-r)^{\beta-1} f(r)drds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(r) \int_r^t (t-s)^{\alpha-1}(s-r)^{\beta-1} dsdr \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(r)(t-r)^{\alpha+\beta-1} dr \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-r)^{\alpha+\beta-1} f(r)dr,
\end{aligned}$$

onde na segunda igualdade usamos o Teorema de Fubini.

3 A actualidade e o futuro do cálculo fraccionário

Presentemente, a teoria e as aplicações do cálculo fraccionário constituem uma área muito activa de investigação. Cientistas ditos “mais puros"bem como outros ditos “mais aplicados"fazem investigação em EDOs ou PDEs e suas aplicações a problemas que emergem do mundo real. Basta para isso fazer uma breve consulta de algumas revistas onde os artigos são publicados (note-se também a qualidade das próprias revistas!): Advances in Mathematics, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Discrete and Continuous Dynamical Systems–Series A, Nonlinear Analysis–Theory, Methods

& Applications, Proceedings of the American Mathematical Society, SIAM Journal on Mathematical Analysis, SIAM Journal on Numerical Analysis e Transactions of the American Mathematical Society. Mais ainda, gostaríamos de referir que a revista de maior relevância e expressividade na área, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, tem um *impact factor* de 2.245, estando classificada em 11º lugar (no ranking dos *impact factor*) na área *Mathematics*, de acordo com a ISI Web of Science.

Tendo em conta o que foi escrito anteriormente, assim como, levando em consideração a opinião de alguns especialistas da área na actualidade, expressa no artigo [6], pensamos poder afirmar que o cálculo fraccionário continuará a ser uma área de grande potencial. Em particular, parece-nos que será bastante importante para a ciência em geral que matemáticos fazendo investigação em equações com derivadas fraccionárias colaborem mais de perto com cientistas provenientes de outras áreas, como por exemplo, biologia, física e engenharias.

Referências

[1] K. Diethelm, *The analysis of fractional differential equations*, Lecture Notes in Mathematics, 2004, Springer, Berlin, 2010.

[2] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava e J. J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, North-Holland Mathematics Studies, 204, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[3] K. S. Miller e B. Ross, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, Wiley, New York, 1993.

[4] I. Podlubny, *Fractional differential equations*, Mathematics in Science and Engineering, 198, Academic Press, San Diego, CA, 1999.

[5] S. G. Samko, A. A. Kilbas e O. I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives*, translated from the 1987 Russian original, Gordon and Breach, Yverdon, 1993.

[6] J. T. Machado, F. Mainardi e V. Kiryakova, "Fractional calculus: quo vadimus? (Where are we going?)", *Fract. Calc. Appl. Anal.*, Vol. 18, No. 2 (2015), pp. 495–526.