Problemas

Editor:
Jorge Nuno Silva

Notas sobre o Problema anterior e Não julgue um número pelo aspecto!

Jorge Nuno Silva

Os leitores são convidados a enviar, para eventual publicação, soluções, comentários, propostas de problemas, etc. Essa correspondência deve ser enviada para a SPM, ao cuidado do editor desta secção. Há livros para sortear entre as soluções recebidas em cada número.

Relembremos o problema do número anterior.

Estética e crítica

No último encontro anual *MathsJam*, que se realiza habitualmente perto de Manchester, no Reino Unido, tomámos conhecimento de um *blog* focado em *puzzles* matemáticos. O seu nome, *Puzzle Critic*, diz ao que se propõe: a promoção de elegantes desafios matemáticos. Percorrer os seus arquivos é um prazer, damos com questões muito bem concebidas, de enunciado claro e conteúdo substancial.

Deste *site* vem nossa selecção para hoje, que se resume a três questões sobre números.

1. Seja n um número inteiro positivo qualquer. De cada um dos números $n+1, \ldots, 2n$ seleccione o maior divisor ímpar. Prove que a soma desses divisores é n^2.

2. Seja n um número inteiro positivo qualquer. Mostre que n tem um múltiplo cuja soma dos dígitos é ímpar.

3. As dízimas infinitas $0.abab\ldots$ e $0.abcabc\ldots$ verificam

$$0.abab\ldots + 0.abcabc\ldots = \frac{33}{37}\cdot$$

Determine os dígitos a, b, e c.

1. Note que se dois números diferentes tiverem o mesmo maior divisor ímpar, então um deles é pelo menos o dobro do outro. Assim, os maiores divisores ímpares dos n números $n+1,\ldots, 2n$ são os primeiros n números ímpares, e é sabido que a respectiva soma é n^2.

   Como o autor do *blog* refere, este problema reune várias boas qualidades: é bonito, o seu enunciado é simples, a resolução também é simples (embora difícil de encontrar), o resultado é surpreendente e parece uma amostra genuína de boa matemática.

2. Dado um inteiro k, considere os números $A = 10^n - k$ e $B = 10^{n+1} - k$. Para n suficientemente grande, A e B são múltiplos de k e diferem um do outro por B ter mais um dígito 9 do que A. Assim, as paridades das somas dos dígitos são distintas, pelo que uma delas tem de ser par.

3. Notando que

$$0.010101\ldots = \frac{1}{99} \qquad \text{e} \qquad 0.001001001\ldots = \frac{1}{999}$$

a equação dada pode escrever-se

$$\frac{10a+b}{99} + \frac{100a+10b+c}{999} = \frac{33}{97}$$

donde se deduz $2210a + 221b = 9801 - 11c$. Notando que o lado direito deve ser múltiplo de 221 concluímos que $c = 7$. Um pequeno cálculo dá-nos agora $a = b = 4$.

Não julgue um número pelo aspecto!

Os programas doutorais contêm, em algumas universidades, exames de acesso, constituídos por problemas que, ao longo dos anos, vão criando belas colecções, que os estudantes usam para se prepararem. Isto sucede com UC Berkeley, de cujos *Preliminary examination (2016)*, retiramos a nossa proposta de hoje. Este era o primeiro de nove problemas propostos, de que os candidatos deviam resolver seis em três horas.

Mostre que o número

$$\int_4^9 \sqrt{-6+5\sqrt{-6+5\sqrt{-6+5\sqrt{-6+5\sqrt{x}}}}}\,dx$$

é racional.