Problemas

Editor:
Jorge Nuno Silva

Notas sobre o Problema anterior e Paradoxos e sofismas

Jorge Nuno Silva

Os leitores são convidados a enviar, para eventual publicação, soluções, comentários, propostas de problemas, etc. Essa correspondência deve ser enviada para a SPM, ao cuidado do editor desta secção. Há livros da Gradiva para sortear entre as soluções recebidas em cada número.

Relembremos o problema do número anterior.

Harry Potter vai às compras

Harry Potter desloca-se a Hogsmeade, mais precisamente a uma loja em Diagon Alley, com a intenção de comprar uma vassoura, uma boa vassoura para a prática do Quidditch. Harry muniu-se de quantidade ilimitada de Galleons de ouro, de Sickles de prata e de Knuts de bronze. Relembremos que 1 Galleon = 17 Sickles, 1 Sickle = 29 Knuts.

De quantas formas pode Harry pagar uma vassoura que custa n Sickles usando todas as possíveis combinações de moedas? Seja essa sucessão (a_n).

Boletim da SPM 72, Setembro 2015, pp. 95–98

Para $z \in \mathbb{C}$, determine

$$\sum_n a_n z^n \qquad \text{e} \qquad \lim \frac{a_n}{n^2} \, .$$

Pretende-se a função geradora correspondente à sucessão (a_n). A secção 3.15 do livro *Generatingfunctionology*, de H.S. Wilf (Academic Press 1994), entre outras obras de combinatória, mostra como obter

$$\sum_n a_n z^n = \frac{1}{(1-z)(1-z^{29})(1-z^{17\cdot 29})} \, .$$

O comportamento assimptótico de a_n é determinado pelo pólo de maior ordem, neste caso o pólo de ordem três em $z = 1$. O termo dominante na expansão em torno de $z = 1$ é

$$\frac{1}{7 \cdot 29^2 \cdot (1-z)^3} \, .$$

Como $1/(1-z)^3 = 1 + 3z + \cdots + t_{n+1} z^n + \ldots$, onde t_n representa o n-ésimo número triangular, e se tem $t_n \sim n^2/2$, concluímos que

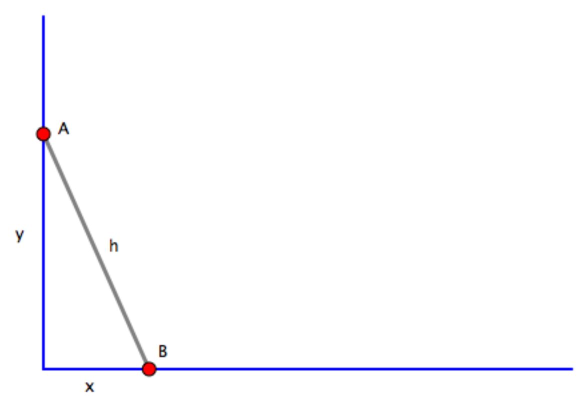
$$\lim \frac{a_n}{n^2} = \frac{1}{17 \cdot 29^2 \cdot 2} \, .$$

Paradoxos e sofismas

A *Mathematical Association of America* publicou em 2013 um livrinho com o título *ParadoXes and Sophisms in Calculus*. Nele os autores, S. Klymchuck e S. Staples, colocam várias perguntas de algibeira sobre funções, séries, derivadas, integrais e outros conceitos típicos do cálculo infinitesimal. Quem lida com a matemática profissionalmente não se deixará enganar por nenhuma das artimanhas propostas. Muitas delas são bem conhecidas dos leitores deste *Boletim*, estou certo, mas escolhemos três que podem ser novidade e convidar alguns a reflectir um pouco.

1. Uma vara AB está encostada a uma parede vertical. A base da vara, representada pela letra B, é arrastada para a direita a uma velocidade constante, até que a vara assente completamente no solo.

   Seja x a distância, crescente, da base à parede e y a distância, decrescente, do topo ao chão.



   Pelo Teorema de Pitágoras, temos $y = \sqrt{h^2 - x^2}$. Derivando em ordem ao tempo, obtemos

$$y' = -\frac{xx'}{\sqrt{h^2 - x^2}} \,.$$

Como a velocidade do ponto B é constante, x' é constante. Calculemos a que velocidade o ponto A se aproxima do solo no momento do impacto:

$$\lim_{x \to h} y' = \lim_{x \to h} \left(-\frac{xx'}{\sqrt{h^2 - x^2}} \right) = -\infty\,.$$

Velocidade infinita! Como pode ser?

2. Um caracol move-se ao longo de uma corda de 1 metro de comprimento, partindo de uma das extremidades, à velocidade constante de 1 cm por minuto. Acontece que a corda é elástica, sendo esticada uniformemente ao fim de cada minuto, acrescentando de cada vez 1 metro ao seu comprimento. Quando a corda é esticada o caracol acompanha o ponto em que se encontra.

   Será que o caracol chega ao fim da corda?

3. Seja x um número real não nulo. A igualdade seguinte é evidente

   $$x^2 = \underbrace{x + \cdots + x}_{x \text{ vezes}}\,.$$

   Derivando ambos os membros, obtemos

   $$2x = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{x \text{ vezes}} = x\,.$$

   Logo $2 = 1$.