

O PROBLEMA DE VALOR INICIAL PARA AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN

Jorge Drumond Silva

Centro de Análise Matemática, Geometria e Sistemas Dinâmicos
Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa
Av. Rovisco Pais
1049-001 Lisboa, Portugal
e-mail: jsilva@math.tecnico.ulisboa.pt

Resumo: Pretende-se, com este texto, fazer uma introdução resumida ao problema de valor inicial para as equações de Einstein, a um nível bastante elementar, sem recorrer a demonstrações ou definições matematicamente técnicas, assumindo apenas conhecimentos básicos de equações diferenciais parciais e geometria Riemanniana. Devido ao carácter hiperbólico das equações de Einstein, começamos por fazer uma breve revisão do problema de valor inicial na física clássica, com ênfase na equação das ondas. Construímos a partir daí um paralelismo baseado na compreensão de algumas das propriedades fundamentais comuns a este tipo de equações, em particular na velocidade finita de propagação de informação e no princípio do domínio de dependência, para apresentar a formulação do problema de valor inicial para as equações de Einstein. Apesar do enquadramento profundamente geométrico da teoria da relatividade geral, pretendemos desta forma salientar muitas das analogias conceptuais com as equações da física clássica, assim como o papel igualmente central do problema de valor inicial para as equações de Einstein. Terminamos com uma apresentação dos resultados clássicos de Y. Choquet-Bruhat e de Y. Choquet-Bruhat com R. Geroch, sobre a existência e unicidade de desenvolvimentos de Cauchy maximais para o problema de valor inicial para as equações de Einstein no vácuo, e a consequente motivação para a conjectura da censura cósmica forte.

Abstract: The goal of this article is to present a summarized introduction to the initial value problem for the Einstein equations, at a very elementary level, without recourse to mathematically technical proofs or definitions, assuming only a basic knowledge of partial differential equations and Riemannian geometry. Due to the hyperbolic character of the Einstein equations, we start by reviewing the initial value problem in classical physics, with an emphasis on the wave equation. Based on understanding some of the fundamental properties for these types of equations, in particular the finite speed

of propagation and the domain of dependency principle, we build a parallel reasoning to present the formulation of the initial value problem for the Einstein equations. Despite the deep geometric framework of the general theory of relativity, we intend to highlight the many conceptual analogies with the equations of classical physics, as well as the equally central role of the initial value problem for the Einstein equations. We finish the paper with a presentation of the classical results by Y. Choquet-Bruhat and Y. Choquet-Bruhat with R. Geroch, on the existence and uniqueness of maximal Cauchy developments for the initial value problem associated to the vacuum Einstein equations, and the ensuing motivation for the strong cosmic censorship conjecture.

palavras-chave: Relatividade geral; equações de Einstein; problema de Cauchy.

keywords: General relativity; Einstein equations; Cauchy problem.

1 Introdução

O problema de valor inicial para equações diferenciais, também conhecido por problema de Cauchy, é absolutamente central na física clássica e está intimamente ligado ao princípio do determinismo e à previsibilidade dos fenómenos físicos. Resumidamente, nos sistemas físicos que são descritos matematicamente por equações diferenciais, a questão prende-se com a determinação da evolução no tempo das quantidades envolvidas, a partir do seu conhecimento num instante de tempo de partida.

Pretende-se, neste artigo, mostrar como o problema de valor inicial é também a formulação adequada para as equações de Einstein, tal como o é para as equações da mecânica clássica Newtoniana, ou para todos os outros variadíssimos exemplos de modelos matemáticos da física em que o problema de Cauchy para equações diferenciais de evolução é a forma mais natural de estudo das soluções. A complexidade inerente ao modelo matemático da relatividade geral, com forte componente geométrica, dificultou historicamente, não só a resolução, mas até simplesmente a correta clarificação e formulação das equações de Einstein sob a forma de um problema de valor inicial, só tendo esse trabalho sido finalmente estabelecido por Yvonne Choquet-Bruhat em 1952 ([11]), quase quarenta anos após a formulação das equações por Albert Einstein, em 1915 ([7]). Os artigos recentes [2] e [17] incidem precisamente sobre as origens do problema de valor inicial para as

equações de Einstein, e devem ser consultados pelo leitor interessado por essa faceta histórica, a qual não iremos aprofundar aqui.

Começaremos por rever o problema de valor inicial nas equações da física clássica, começando pelos sistemas de equações diferenciais ordinárias da mecânica Newtoniana, mas prestando particular atenção à equação das ondas. Devido ao carácter hiperbólico das equações de Einstein, muitas das propriedades mais relevantes para a compreensão da formulação do problema de valor inicial já se observam, numa forma mais simples e transparente, na equação das ondas linear, e por isso dedicamos algum cuidado a revê-las, em particular a velocidade finita de propagação de informação, as relações causais entre os valores da solução em diferentes pontos do espaço e do tempo, e o correspondente princípio do domínio de dependência. Depois disso, faremos uma breve introdução às equações de Einstein, salientando as suas características profundamente geométricas, em particular o facto de, em certa medida, a solução ser agora o próprio domínio, facto que lhes dão uma aparência muito diferente das equações da física clássica e que tornaram historicamente difícil a compreensão do problema de valor inicial. Mantendo o paralelismo conceptual com a equação das ondas da física clássica, tentaremos destacar como, apesar do formalismo geométrico, o problema de valor inicial para as equações de Einstein é, no entanto, posto de forma inteiramente análoga na teoria da relatividade geral. Por fim, terminamos com a apresentação dos resultados de existência e unicidade de soluções locais e maximais para o problema de valor inicial das equações de Einstein no vácuo, obtidas nos trabalhos pioneiros de Yvonne Choquet-Bruhat ([11]), em 1952, e posteriormente por Yvonne Choquet-Bruhat e Robert Geroch ([3]), em 1969, concluindo com a motivação, que deriva destes resultados, para a formulação da famosa conjectura da censura cósmica forte, de Roger Penrose.

Abordando o mesmo tópico do presente artigo, mas de forma muito mais aprofundada e exaustiva, com apresentação cuidadosa das técnicas matemáticas necessárias ao seu estudo rigoroso, recomenda-se vivamente o livro de Hans Ringström, [16], sobre o problema de Cauchy para as equações de Einstein, para aqueles que queiram estudar este fascinante tema mais seriamente.

2 O problema de valor inicial na física clássica

Na opinião de Einstein ([8]), a maior contribuição de Newton para a ciência moderna foi precisamente a descoberta de que os sistemas físicos são

modelados por equações diferenciais, as quais genericamente determinam a evolução desses sistemas a partir de condições iniciais apropriadas.

O paradigma do problema de valor inicial, na mecânica clássica, é precisamente a determinação da trajetória, ou seja, da posição ao longo do tempo $\mathbf{x}(t)$, de partículas materiais de massa m , a partir das suas posições e velocidades num instante inicial t_0 , de acordo com a segunda lei de Newton (assumindo também o conhecimento total das forças F presentes, as quais modelam o sistema mecânico em questão). Do ponto de vista puramente matemático este problema corresponde à resolução de um sistema de equações diferenciais ordinárias de 2ª ordem, com imposição de condições iniciais às derivadas de ordem zero e de ordem um, da incógnita,

$$\begin{cases} m \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ \dot{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{v}_0. \end{cases} \quad (1)$$

A existência de soluções para um problema de valor inicial é, sem dúvida, a primeira questão que sempre se impõe responder. De uma forma um pouco mais precisa, é fundamental saber se a equação diferencial de evolução tem sempre soluções, dadas condições iniciais arbitrárias (ou restritas a algum conjunto definido). O tempo de duração dessas soluções também é outra questão relevante, distinguindo-se entre soluções locais, aquelas para as quais só se garante a existência durante um pequeno intervalo de tempo que inclua t_0 , ou soluções globais, quando é possível estabelecer a sua existência para a máxima duração de tempo possível (podendo esta ser infinita, se a solução existir para qualquer intervalo de tempo, ou finita, no caso em que a ocorrência de algum fenómeno singular impede a solução de continuar a evoluir indefinidamente). Mas o modelo só se verifica ser determinístico se, além da existência de soluções, estas forem únicas, para as mesmas condições iniciais, ou seja, se não existirem várias evoluções distintas de um mesmo problema de valor inicial. Em resumo, o princípio do determinismo obriga a terem-se respostas afirmativas para as questões de existência e unicidade de soluções, primordiais num problema de valor inicial.

A teoria matemática clássica para equações diferenciais, desenvolvida ainda no séc. XIX, em particular o teorema de Picard-Lindelöf, baseado no princípio da contração e no teorema de ponto fixo de Banach, garante existência de soluções, unicidade e extensão a intervalos de tempo máximos de definição, para problemas de valor inicial associados a equações diferenciais ordinárias, como é o caso da segunda lei de Newton (1), numa classe bastante

ampla de situações (para funções contínuas e localmente Lipschitzianas na variável da incógnita).

Refira-se, ainda, que determinismo não implica, só por si, previsibilidade: um lançamento duma moeda ou dum dado, por exemplo, sendo em princípio fenómenos determinísticos, por serem descritos com grande exatidão pela mecânica Newtoniana, e portanto cobertos pela teoria geral de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias descrita atrás, são, no entanto, altamente imprevisíveis, ao ponto de serem considerados essencialmente aleatórios. A questão aqui é ainda outra: a estabilidade das soluções. Pequenas variações nas condições iniciais, como por exemplo a velocidade e posição exatas com que a moeda e o dado saem da mão do lançador (ou das condições de fronteira, como a forma precisa do dado, ou dos ressaltos numa mesa) conduzem a resultados finais totalmente diferentes e o sistema, ainda que determinístico, é para todos os efeitos imprevisível por ser fortemente sensível a pequenas perturbações, as quais, na prática, são impossíveis de determinar com precisão total. Existem variadas formas de estudar a estabilidade de um sistema descrito por equações diferenciais, conduzindo a diferentes tipos de definições. A mais elementar, e que normalmente se procura responder logo de início, recorrendo ao mesmo tipo de teoremas que garantem existência e unicidade, é a dependência contínua das soluções relativamente aos dados iniciais, ou a parâmetros das equações.

Ao conjunto destas três questões fundamentais, de existência, unicidade e dependência contínua de soluções relativamente aos dados iniciais dum problema de valor inicial, chama-se *boa colocação*. Um problema de Cauchy com resposta afirmativa às três questões diz-se *bem posto* ou *bem colocado*, localmente ou globalmente no tempo, consoante o intervalo de tempo de existência é, respetivamente, apenas uma vizinhança de t_0 ou arbitrariamente grande¹.

A passagem dum conjunto discreto de partículas para um meio contínuo conduz à introdução de equações diferenciais parciais. Historicamente, os primeiros exemplos em que isso foi feito devem-se a D'Alembert e Euler, em meados do séc. XVIII. Para modelar a vibração de uma corda, D'Alembert introduziu a chamada equação das ondas (unidimensional)

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2)$$

em que ρ representa a densidade de massa, por unidade de comprimento da corda, e τ a tensão a ela aplicada. A incógnita $u(t, x)$ representa a

¹Local/Global well posedness (LWP/GWP), na terminologia em inglês.

posição vertical da corda, relativamente ao nível de referência em repouso, no instante de tempo t e na posição x ao longo do seu comprimento.

A interpretação física da equação (2) é óbvia: do lado esquerdo da equação temos a massa vezes a aceleração vertical da corda, por unidade de comprimento; do lado direito temos a força de restituição interna da corda, dada pela sua curvatura de deformação e proporcional à tensão com que está esticada. Em resumo, estamos em presença, de novo, da segunda lei de Newton, numa versão contínua unidimensional, por unidade de comprimento de corda e aplicada ao seu movimento vertical. Aliás, se se quiser modelar a presença de outras forças transversais externas, como por exemplo o peso da própria corda por efeito da força da gravidade, basta acrescentá-las ao lado direito da equação nos chamados termos de fonte. Esta análise permite-nos, em total analogia com (1), formular o problema de valor inicial adequado à equação das ondas: será necessário, portanto, acrescentar duas condições iniciais à equação, correspondentes à posição e velocidade vertical inicial em cada ponto da corda, ou seja u e $\frac{\partial u}{\partial t}$, as quais são agora funções da variável x , num instante de tempo inicial t_0 . A mais do que uma dimensão - por exemplo para modelar a vibração dum tambor, no caso bidimensional, ou das ondas sonoras, no caso tridimensional - a segunda derivada no espaço é substituída pelo Laplaciano $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$, obtendo-se assim o problema de Cauchy para a equação das ondas (linear) em n dimensões espaciais

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = F(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ u(t_0, x) = u_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x) = v_0(x), \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3)$$

em que o parâmetro $c (= \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ no caso do modelo unidimensional (2)) é a velocidade de propagação das ondas e F é o termo de fonte, correspondente à presença de forças externas. O lado esquerdo da equação denomina-se de operador das ondas, ou D'Alembertiano, e representa-se por

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta, \quad (4)$$

pelo que a equação da vibração livre, isto é, na ausência de quaisquer forças externas, pode simplesmente ser escrita como $\square u = 0$.

Como apresentado em (3), o problema corresponde ao modelo de movimento ondulatório transversal de todo o domínio ilimitado \mathbb{R}^n . É frequente

também a formulação de um problema análogo, para domínios limitados $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, como é o caso duma corda ou dum tambor finitos. Mas isso obriga à imposição de *condições de fronteira*, na periferia de Ω , para todo o $t > 0$, e o problema passa a denominar-se de valor inicial e de fronteira.

A resolução do problema (3), ou seja a prova de existência e de unicidade para uma classe ampla de dados iniciais u_0 e v_0 nalgum espaço determinado de funções, é bastante mais complexo que (1). Aliás, como é bem sabido, não existe, no caso das equações diferenciais parciais, nenhum teorema geral de existência e unicidade, como é o caso do teorema de Picard-Lindelöf para equações diferenciais ordinárias. Um método específico de resolução do problema de valor inicial (3) para a equação das ondas linear homogénea, de coeficientes constantes, em qualquer dimensão (ou seja $\square u = 0$, com $F = 0$), começa por utilizar médias esféricas para dimensões espaciais ímpares, de forma a reduzir o problema à equação de onda unidimensional (2) onde é possível aplicar a fórmula de resolução de D'Alembert. Para as dimensões espaciais pares intermédias, utiliza-se depois o método da descida de Hadamard, recorrendo à solução obtida anteriormente para a dimensão ímpar imediatamente acima. O caso da equação não homogénea, ou seja com $F \neq 0$, resolve-se com recurso à solução homogénea correspondente e à chamada fórmula de Duhamel. Os detalhes podem ser consultados em textos introdutórios de equações diferenciais parciais, recomendando-se, para o caso da resolução de (3) o livro de G. Folland, [9]. Rapidamente, no entanto, o problema de valor inicial para a equação das ondas se torna de resolução mais difícil, quer no caso linear, se os coeficientes forem variáveis, quer no caso geral da equação incluir termos não lineares. O leitor interessado na teoria moderna de equações de onda, lineares e não lineares, encontrará exposições bastante completas e atuais em [15], [12], [19] ou [20]. Outra situação na qual o problema de valor inicial para equações de onda, mesmo as lineares, pode assumir um elevado grau de complexidade é no caso do domínio subjacente deixar de ser Euclidiano, para passar a ser uma variedade com geometria não trivial: nesse caso, é através da forma como a métrica da variedade altera os coeficientes das derivadas da equação que ela incorpora um acrescido grau de dificuldade o que, escrito em coordenadas locais, pode ser equiparado a uma equação com coeficientes variáveis. Esta é, aliás, a situação mais próxima das que são frequentemente encontradas na teoria matemática da relatividade geral, em particular das equações de Einstein. Um texto clássico sobre equações de onda em espaços-tempo curvos é [10], enquanto que [6] aborda especificamente o tema, de elevado interesse cien-

tífico atual, relativo às propriedades de soluções de equações de onda em espaços-tempo associados a buracos negros.

Não sendo objetivo deste artigo deter-se aprofundadamente nas equações de onda em geral, a sua estreita relação com as equações de Einstein e a ubiquidade de certas propriedades fundamentais, obriga-nos no entanto a lembrar uma dessas propriedades em particular, que será útil no que apresentaremos à frente: trata-se do *princípio do domínio de dependência*, o qual está intimamente associado à propriedade de propagação de perturbações com velocidade finita em equações do tipo hiperbólico. Com efeito, equações diferenciais parciais hiperbólicas, como são a equação de onda (3) ou os sistemas de conservação hiperbólicos (usados nos modelos de mecânica dos fluidos compressíveis), exibem fenômenos particulares de progressão das soluções, no espaço e no tempo, que têm um caráter ondulatório e que estão matematicamente relacionados com as direções características das equações, não se verificando, em geral, noutro tipo de equações: são eles que dão o nome à equação. Uma forma simples de observar este efeito em $\square u = 0$ consiste em procurar soluções da forma,

$$u_{\xi,\tau}(t, x) = e^{i(\xi \cdot x + \tau t)} = e^{i|\xi| \left(e_{\xi} \cdot x + \frac{\tau}{|\xi|} t \right)}, \quad (5)$$

denominadas de *ondas planas*, com frequência espacial $\xi \in \mathbb{R}^n$ e frequência temporal² $\tau \in \mathbb{R}$, as quais se propagam oscilatoriamente na direção do vetor unitário definido por ξ , $e_{\xi} = \xi/|\xi|$, e com velocidade - dita de fase - dada por $v = -\tau/|\xi|$. Ora, substituindo (5) em $\square u = 0$ obtém-se a chamada relação de dispersão da equação

$$\tau^2 = c^2 |\xi|^2 \Leftrightarrow \tau = \pm c |\xi|, \quad (6)$$

que restringe as ondas planas que são soluções de $\square u = 0$ apenas àquelas que satisfazem (6). Conclui-se assim que uma onda plana (5) é solução da equação de onda homogênea se e só se é da forma

$$u(t, x) = e^{i|\xi| \left(e_{\xi} \cdot x \pm ct \right)},$$

ou seja, para qualquer frequência espacial $\xi \in \mathbb{R}^n$, as soluções na forma de ondas planas são apenas aquelas que se propagam com velocidade exatamente igual a c , na direção positiva ou negativa definida pelo vetor ξ . Usando métodos de análise de Fourier é possível mostrar, com alguma generalidade, que soluções arbitrárias da equação de onda homogênea $\square u = 0$

²Também conhecidos, respetivamente, por vetor de onda e frequência angular, na literatura física.

podem ser dadas por sobreposição (contínua, na forma de um integral em ξ) destas ondas planas, com diferentes amplitudes. Genericamente, portanto, podemos dizer que as soluções da equação de onda homogênea consistem na sobreposição de ondas planas, em várias direções e com várias frequências espaciais, mas todas propagando-se à velocidade fixa dada pelo parâmetro c . Por isso se chama ao parâmetro c , do D'Alembertiano \square , a velocidade de propagação das ondas.

Esta propriedade induz, no entanto, uma relação de causalidade fundamental, na estrutura das soluções: o valor duma solução num dado ponto (t_0, x_0) só poderá influenciar a mesma solução num outro ponto (t_1, x_1) , para um instante de tempo futuro $t_1 > t_0$, se a distância espacial entre eles conseguir ser percorrida dentro do limite da “velocidade de transmissão de informação” inerente à equação, durante o intervalo de tempo que os separa, ou seja, se $|x_1 - x_0| \leq c|t_1 - t_0|$. Por outras palavras, a solução em (t_0, x_0) não consegue afetar pontos cuja distância a x_0 seja superior àquela permitida pela velocidade de propagação c . Assim, geometricamente, um ponto (t_0, x_0) pode influenciar apenas os valores da solução em pontos no interior dum cone com vértice nele próprio, e com abertura determinada por c : trata-se do chamado *domínio de influência* de (t_0, x_0) , representado na Figura 1.

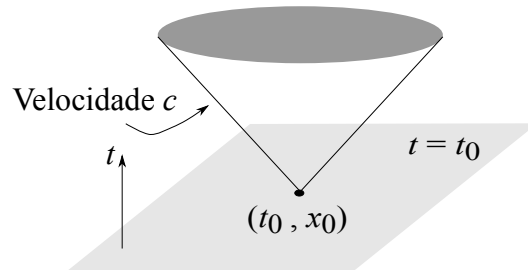


Figura 1: Domínio de influência do ponto (t_0, x_0) .

Equivalentemente, os valores da solução num ponto (t_1, x_1) só são influenciados pelos pontos num cone para o passado, com vértice nele próprio: é o seu *domínio de dependência*³. Ao conjunto formado pelos dois cones, o domínio de influência e o domínio de dependência, num ponto (t, x) denomina-se *cone de luz*, nesse ponto. Observe-se, em particular, que se imaginarmos um

³Obviamente, o domínio de dependência dum ponto é exatamente o mesmo que o seu domínio de influência para o passado, portanto os dois conceitos são essencialmente idênticos, diferenciando-se apenas quando se pressupõe a existência de uma orientação temporal que permite fazer a distinção entre passado e futuro.

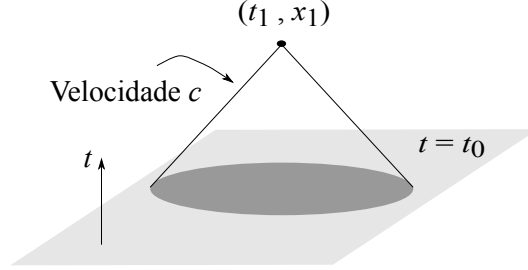


Figura 2: Domínio de dependência do ponto (t_1, x_1) .

problema de valor inicial com tempo de partida em t_0 , os valores da solução no cone com vértice em (t_1, x_1) , representado na Figura 2, serão exclusivamente determinados pelos dados iniciais sobre o conjunto de pontos, em $t = t_0$, que distam, no máximo⁴, $c|t_1 - t_0|$ de x_1 ,

$$\{(t_0, x) : |x - x_1| \leq c|t_1 - t_0|\}. \quad (7)$$

A solução em todo o cone da Figura 2 é, portanto, totalmente indiferente a alterações dos dados iniciais fora desta bola.

Este conjunto de ideias é o que se chama de *princípio do domínio de dependência* e é um dos ingredientes centrais na demonstração de unicidade de soluções de equações de onda, aliado a estimativas de energia, que permitem mostrar que, se os dados iniciais para a equação $\square u = 0$ se anularem no conjunto (7), então a solução anula-se em todo o cone do domínio de dependência de (t_1, x_1) (consultar [9] para os detalhes). Aplicando-se este resultado à diferença de duas soluções de (3), com dados iniciais coincidentes em (7) obtém-se a conclusão que não pode existir mais do que uma solução de (3), no interior do cone de dependência de (t_1, x_1) , para dados iniciais fixos em (7). Fazendo $t_1 \rightarrow \infty$, é possível por fim provar a unicidade em todo o semi-plano superior $t > 0$, quando se impõem condições iniciais em $t = t_0$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

Um último facto que merece ser mencionado aqui, relativamente ao problema de valor inicial para a equação das ondas, é o da superfície onde são

⁴Para a equação de onda (3) no espaço euclidiano \mathbb{R}^n , com $n > 1$ ímpar, verifica-se o chamado princípio de Huygens, em que o domínio de dependência é apenas a fronteira do cone, e não o seu interior, pelo que em t_0 seria apenas a fronteira da bola, ou seja $|x - x_1| = c|t_1 - t_0|$. Em dimensões espaciais pares a dependência, ou influência, estende-se efetivamente para o interior do cone, tal como se pode verificar experimentalmente atirando uma pedra para um lago em repouso e observando a superfície ondulatória da água, não só na circunferência da frente de onda, em expansão, como em todo o seu interior.

dadas as condições iniciais não ter de ser, necessariamente, um plano de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ com $t = t_0$ fixo. No entanto, ao contrário do que é a percepção geral com que normalmente se fica num estudo introdutório sobre equações diferenciais parciais, também não é suficiente que a (hiper)superfície das condições iniciais apenas seja não característica. Com efeito, devido à estrutura causal descrita atrás das soluções da equação, se uma superfície $\Sigma \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tiver geometria tal que, algum dos seus pontos $(t_1, x_1) \in \Sigma$ esteja no domínio de influência de algum outro $(t_0, x_0) \in \Sigma$ então, as condições iniciais não poderão ser dadas de forma arbitrária em (t_1, x_1) visto os valores da solução nesse ponto estarem causalmente influenciados pelos de (t_0, x_0) . Por outro lado, como as superfícies características da equação das ondas são só aquelas que são tangentes aos cones de luz, em cada ponto, uma superfície da forma $x_i = \text{const.}$, por exemplo, perpendicular à direção da coordenada i de $x \in \mathbb{R}^n$, não sendo portanto característica, ainda assim conduziria a um problema de valor inicial mal posto dado que os seus pontos estão nos domínios de influência e de dependência uns dos outros (ver exemplo explícito em [9]). É necessário, por isso, que a hipersuperfície genérica onde são impostos os dados iniciais de um problema de Cauchy seja tal que não intersekte os cones de luz dos seus próprios pontos. Consideram-se, por isso, de forma mais geral, problemas de valor inicial dados em hipersuperfícies ditas do *tipo espaço*, que satisfazem em todos os seus pontos a condição $|\nu_t| > c|\nu_x|$, onde $(\nu_t, \nu_x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ é a normal a Σ em cada ponto. É possível mostrar que problemas de valor inicial para a equação das ondas,

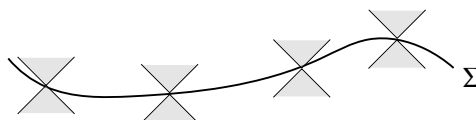


Figura 3: Superfície Σ do tipo espaço.

com condições iniciais em hipersuperfícies do tipo espaço - nesse caso são impostos o valor da solução u e da sua derivada $\partial_\nu u$, na direção ν normal à superfície inicial - estão sempre bem postos.

Para terminar esta breve descrição do problema de valor inicial para as equações de evolução da física clássica, refira-se que a equação da segunda lei de Newton (1) ou a equação das ondas estão longe de ser os únicos casos relevantes onde o problema de Cauchy é a formulação mais apropriada à sua resolução. A equação do calor, que descreve a evolução da temperatura no espaço e no tempo, por difusão num meio condutor; o sistema das equações de Maxwell, do eletromagnetismo (que se reduzem a duas equações de onda,

para o campo elétrico e para o campo magnético, no vácuo); a equação de Schrödinger, da mecânica quântica; o sistema de Navier-Stokes, da mecânica dos fluidos incompressível; etc... todos eles são exemplos de equações diferenciais de evolução da física clássica, onde a formulação do problema de valor inicial para a sua resolução é a norma.

Restringimo-nos, nesta secção, à equação das ondas dado que as equações de Einstein, quando escritas em coordenadas adequadas, também podem ser vistas como equações de onda não lineares e partilham, por isso, várias das propriedades descritas atrás para (3), como iremos ver de seguida.

3 O problema de valor inicial para as equações de Einstein

3.1 Espaço-tempo e as equações de Einstein

O conceito central da teoria da relatividade geral é o de espaço-tempo. É através da geometria do espaço-tempo, em especial da sua curvatura, que se refletem as interações gravitacionais causadas pela presença, ou pela ausência, de matéria e energia. As trajetórias de partículas materiais em queda livre, assim como da luz, seguem geodésicas do espaço-tempo, e estão por isso sujeitas à geometria ambiente criada pela gravidade, cujo efeito se faz sentir deste modo sobre elas.

Do ponto de vista do modelo matemático, trata-se duma variedade pseudo-Riemanniana conexa de quatro dimensões (M, g) , com métrica g Lorentziana⁵, que convencionamos ter assinatura $(-, +, +, +)$. Como habitualmente, um vetor tangente $v \in T_p M$ designa-se do *tipo tempo* se $g(v, v) < 0$; do *tipo espaço* se $g(v, v) > 0$; do *tipo luz* se $g(v, v) = 0$, com $v \neq 0$; do *tipo nulo* se $g(v, v) = 0$ (ou seja, se v for do tipo luz ou se for $v = 0$); e *causal* se for do tipo luz ou do tipo tempo (ou seja, se $v \neq 0$ e $g(v, v) \leq 0$). Uma curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, com $I =]a, b[$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, é, em cada um dos seus pontos, classificada como sendo do tipo tempo, espaço, luz, nulo ou causal de acordo com o seu vetor tangente nesse ponto. As geodésicas não alteram o seu tipo de ponto para ponto, facto que é consequência simples dos seus vetores tangentes serem, por definição, transportados paralelamente ao longo delas. Por fim, uma hipersuperfície (diferenciável) $\Sigma \subset M$ diz-se do

⁵O conceito de variedade pseudo-Riemanniana é inteiramente análogo ao da, mais usual, variedade Riemanniana, exceto que não se exige que a métrica seja definida positiva, mas apenas não-degenerada. Chama-se Lorentziana ao caso particular em que um dos valores próprios da métrica pseudo-Riemanniana tem o sinal oposto dos restantes.

tipo espaço, nula ou do tipo tempo, se a sua normal (na métrica g) em cada ponto for, respetivamente, do tipo tempo, nula ou do tipo espaço.

Assumiremos sempre, também, a existência duma orientação temporal em (M, g) , a qual corresponde à escolha dum campo vetorial Θ não nulo, do tipo tempo em cada ponto $p \in M$. Obstruções topológicas podem impedir a existência de um tal campo vetorial global não nulo do tipo tempo em cada ponto, por isso nem todas as variedades Lorentzianas são temporalmente orientáveis. Mas quando essa orientação é possível, o campo Θ permite que se faça a definição, de uma forma diferenciável ao longo da variedade, de um dos dois cones causais, no espaço tangente a cada ponto, como sendo aquele cujos vetores apontam para o futuro⁶. Diremos então que um qualquer vetor tangente à variedade $v \in T_p M$ (ou curva γ , usando nesse caso o seu vetor tangente $\dot{\gamma}$), causal, está orientado para o futuro se $g(v, \Theta_p) < 0$, ou seja, se se encontra no mesmo cone causal em $T_p M$ que Θ_p .

O exemplo mais simples dum espaço-tempo é

$$(\mathbb{R}_{t,x}^{3+1}, g) \quad \text{com} \quad g = -c^2 dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad (8)$$

e orientado para o futuro por $\frac{\partial}{\partial t}$. Trata-se do espaço-tempo de Minkowski, que serve de cenário para a teoria da relatividade restrita, mas que além disso tem uma importância que permeia toda a relatividade geral visto ser possível provar que, na vizinhança de qualquer ponto dum espaço-tempo arbitrário, a estrutura causal é idêntica à de Minkowski. É por isso o paradigma local de qualquer espaço-tempo. O parâmetro c é a velocidade da luz, e observe-se que uma curva γ , quando parametrizada por t , é causal precisamente quando satisfaz $g(\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}) \leq 0$, ou seja

$$-c^2 + \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 \leq c^2.$$

Se supusermos que temos um referencial de inércia no qual as coordenadas são identificadas com as de (8), então as curvas causais são aquelas cuja velocidade é igual ou inferior à da luz nesse referencial, ou seja, são as trajetórias fisicamente admissíveis. Destas, as que são retas correspondem precisamente às geodésicas da variedade e representam o movimento de partículas materiais livres, no caso de serem do tipo tempo, ou da luz, no caso de terem velocidade exatamente igual a c . Estas propriedades de curvas causais estendem-se a qualquer espaço-tempo.

⁶Quando uma variedade Lorentziana é temporalmente orientável, existem sempre duas alternativas de escolha de orientação: uma das duas classes de equivalência de campos vetoriais não nulos do tipo tempo, com a mesma orientação em cada ponto $p \in M$.

Daqui para a frente assumiremos que as unidades são escolhidas de forma a terem-se valores unitários para a velocidade da luz no vácuo e para a constante de gravitação universal, ou seja, $c = 1$ e $G = 1$. Designam-se por unidades geometrizadas.

Sendo verdade que todo o espaço-tempo é modelado por uma variedade Lorentziana orientada temporalmente, tal não significa que qualquer variedade Lorentziana corresponde a um espaço-tempo com significado físico. Albert Einstein introduziu as equações que hoje associamos ao seu nome, em 1915 ([7]), exatamente como as leis que determinam a geometria do espaço-tempo através da interação gravitacional causada pela presença, ou ausência, de matéria e energia, de acordo com a sua teoria geral da relatividade. Trata-se duma equação tensorial, envolvendo a curvatura associada à métrica, naturalmente invariante sob isometrias de modo a ser uma relação intrinsecamente geométrica.

No vácuo, as equações apresentam a sua forma mais simples

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0, \quad (9)$$

em que $R_{\mu\nu}$ são as componentes do tensor de Ricci associado à métrica g e $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ é a curvatura escalar⁷. Relembrando que o tensor de Ricci resulta do traço do tensor da curvatura, $R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$, e que este último, quando escrito em coordenadas locais, envolve derivadas de segunda ordem das componentes da métrica g , estamos então em presença, em (9), dum sistema não-linear de 10 equações diferenciais parciais de segunda ordem para as 10 componentes independentes de g . Calculando o traço de (9) (ou seja, contraindo com $g^{\mu\nu}$, a inversa das componentes do tensor da métrica) obtém-se $R = 0$, donde as equações de Einstein no vácuo são equivalentes ao anulamento do tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (10)$$

Aliás, designam-se os espaços-tempo que são solução de (9) ou (10) como sendo Ricci-planos, por consistirem precisamente de variedades Lorentzianas com curvatura de Ricci nula.

O exemplo mais óbvio de solução para as equações de Einstein no vácuo é o espaço-tempo de Minkowski (8), que tem métrica com componentes constantes nas coordenadas (t, x_1, x_2, x_3) e portanto tem curvatura de Ricci nula em todos os pontos. É a solução trivial de (9) ou (10). No entanto,

⁷Usamos, como habitualmente, a convenção de Einstein, em que a repetição de índices representa um somatório, por exemplo $g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ significa $\sum_{\mu,\nu=0}^3 g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$.

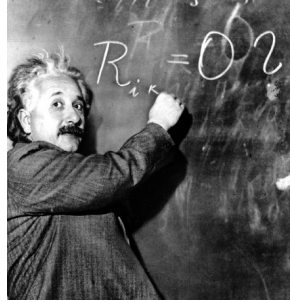


Figura 4: Einstein escrevendo as suas equações para o vácuo.

tal como a solução nula, $u = 0$, é a solução trivial da equação das ondas livre $\square u = 0$, e isso não a impede de ter muitas outras soluções não óbvias, também as equações de Einstein no vácuo conduzem a variadíssimos outros espaços-tempo Ricci-planos, com uma grande diversidade e complexidade de soluções, para além de Minkowski. Por exemplo, a métrica de Schwarzschild

$$g = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\sigma_{\mathbb{S}^2}, \quad (11)$$

em que $d\sigma_{\mathbb{S}^2} = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ é a métrica da esfera unitária, também é solução de (9) para $t \in]-\infty, +\infty[$ e $r \in]0, 2m[$ ou $r \in]2m, +\infty[$. Na verdade, a singularidade aparente em $r = 2m$, apenas devida à escolha das coordenadas aqui usadas, é um exemplo histórico famoso que ilustra bem as dificuldades iniciais com que se defrontaram os primeiros investigadores, na teoria geral de relatividade, sem terem ao seu dispor um desenvolvimento paralelo já maduro dos conceitos mais abstratos de geometria diferencial. Com efeito, K. Schwarzschild descobriu esta solução explícita das equações de Einstein no vácuo logo em 1915, tendo sido publicada no ano seguinte, como a analogia relativista do campo gravitacional Newtoniano criado no exterior duma massa pontual ou com simetria esférica, com massa total m . Como tal, é uma solução esfericamente simétrica de (9) ou (10), e pretendia-se que tivesse significado físico só para raios correspondentes à região exterior da massa esférica - uma estrela ou um planeta - os quais são tipicamente muito superiores a $r = 2m$. A singularidade matemática de (11) em $r = 2m$ encontrar-se-ia normalmente, portanto, no interior da estrela, onde a solução não teria sentido físico. Foi só ao longo de várias décadas de investigação que se percebeu que esta singularidade era simplesmente um artefacto matemático causado pela escolha de coordenadas em que se escrevia (11), mas que, usando outras coordenadas, era possível obter representações isométricas

da mesma variedade, totalmente regulares através de $r = 2m$, com topologia global $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$. A singularidade genuinamente intrínseca do espaço-tempo de Schwarzschild situa-se só em $r = 0$. Mais importante que isso, percebeu-se que na região $r \in]0, 2m[$ algumas propriedades invulgares tinham lugar: enquanto que $\frac{\partial}{\partial t}$ e $\frac{\partial}{\partial r}$ são, como a intuição leva a assumir, respetivamente do tipo tempo e do tipo espaço em $r > 2m$, os seus tipos invertem-se em $r < 2m$; geodésicas causais, ou seja, aquelas que correspondem fisicamente a partículas materiais em queda livre, ou à luz, que tenham início em $r < 2m$ são incompletas, terminando numa singularidade em $r = 0$ e nunca conseguindo escapar, para futuro ou para o passado - nem a própria luz - da região $r < 2m$. Tinha-se assim a primeira solução matemática das equações de Einstein no vácuo exibindo uma região que se denominou de *buraco negro* (assim como um correspondente buraco branco) cuja fronteira, chamada de *horizonte de eventos*, se situa precisamente em $r = 2m$. Um teorema importante devido a Birkhoff mostra ainda que a família de soluções de Schwarzschild é, na verdade, a solução mais geral possível de (9) ou (10) sob condições de simetria esférica, concluindo que qualquer solução com essa simetria é localmente isométrica a (11). Em particular, a própria métrica de Minkowski é um desses casos: corresponde evidentemente a $m = 0$. Dito doutra forma, a simetria esférica impõe um grau de rigidez às equações de Einstein⁸ no vácuo, que não permite qualquer liberdade dinâmica, pelo que todas as soluções se restringem à família de Schwarzschild.

Mais recentemente, em 2009, num trabalho de extrema profundidade ([4]), Demetrios Christodoulou provou que é mesmo possível a formação dinâmica de buracos negros para as equações de Einstein no vácuo, ou seja, criados apenas pela evolução gravitacional atuando sobre si mesma - naturalmente sem simetria esférica, pelo que acabámos de ver acerca do teorema de Birkhoff - questão que até essa data estava completamente em aberto.

Em resumo, queremos sublinhar que mesmo as equações de Einstein na sua forma mais simples, no vácuo, com total ausência de matéria ou energia, em que os efeitos gravitacionais sobre a geometria do espaço-tempo são apenas resultantes da dinâmica autónoma interna, são já de si suficientemente complexas para serem motivo de alguma da investigação atual mais avançada, mesmo no que concerne questões aparentemente básicas. O que não é de surpreender, aliás, em face da sua estrutura fortemente não linear, aliada a um contexto geométrico altamente não trivial.

⁸As soluções esfericamente simétricas assumem particular relevância em relatividade geral porque servem de modelos astrofísicos para o campo gravitacional de corpos celestes isolados.

A introdução de matéria ou energia no modelo gravitacional torna o problema ainda mais complexo. Com efeito, tal como as forças externas são uma fonte do movimento ondulatório, adicionadas ao lado direito da equação das ondas (3), também a forma como se incorpora a presença da matéria e energia nas equações de Einstein é através dum termo tensorial adicionado ao lado direito de (9), que pode identicamente ser interpretado como uma fonte externa de curvatura do espaço-tempo: trata-se do denominado *tensor da energia-momento*, habitualmente designado em componentes por $T_{\mu\nu}$. Mas o problema não termina aí, porque agora $T_{\mu\nu}$ terá de ser dado em termos de quantidades que modelam a matéria, as quais obedecem por sua vez às suas próprias equações constitutivas. Deixamos de ter apenas um sistema de equações de Einstein, para a geometria do espaço-tempo, para ter agora um sistema de equações de Einstein e equações de matéria, que se acoplam mutuamente, de forma altamente não-linear: a geometria do espaço-tempo afeta as equações estruturais da matéria, a qual por sua vez afeta as equações de Einstein pelo tensor da energia-momento. Para completar o sistema, é ainda habitual acrescentar um outro termo de fonte, externo ao tensor da energia-momento: trata-se da denominada *constante cosmológica* Λ , que fisicamente pode ser interpretada como a densidade de energia do vácuo⁹. Um sistema completo de equações de Einstein e matéria será assim algo da forma,

$$\begin{cases} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\Lambda g_{\mu\nu} + 8\pi T_{\mu\nu}, \\ \text{Equações da matéria/energia.} \end{cases} \quad (12)$$

Observe-se que, pelas identidades de Bianchi, o lado esquerdo de (12) tem divergência nula pelo que, obrigatoriamente, o tensor da energia-momento para qualquer modelo de matéria e energia terá que necessariamente satisfazer também a seguinte restrição

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0.$$

⁹Foi o próprio Einstein o primeiro a introduzir a constante cosmológica, de forma a compensar o que ele imaginava ser o inerente colapso gravitacional e consequente contração do universo dado pelas suas equações, e assim produzir um universo estático, que se suponha à época ser a realidade. No entanto, pouco tempo depois, após as observações iniciais de Hubble que demonstraram a expansão aparente do universo, Einstein removeu a constante cosmológica, tendo então dito uma das suas frases mais famosas, de que a sua introdução nas equações tinha sido o maior erro da sua vida. Mas na verdade, verifica-se atualmente que a presença da constante cosmológica parece ser de facto a melhor forma de modelar a expansão acelerada do universo.

Mas não iremos, neste texto, aprofundar esta forma mais geral do problema, visto que ela requer especificações concretas para cada um dos modelos de matéria. Restringir-nos-emos essencialmente, portanto, ao problema das equações de Einstein no vácuo (9), as quais formam um sistema fechado, passível de ser resolvido autonomamente sem serem necessárias mais equações para o completar, e que só por si já contêm a essência das propriedades - e das dificuldades também - associadas à formulação e resolução do problema mais geral. Faremos apenas comentários acessórios relativos a (12), quando isso for relevante.

3.2 Hiperbolicidade global e formulação do problema de valor inicial

Em face do que foi exposto até agora, e dado o contexto fortemente geométrico, a impressão com que se fica, relativamente à obtenção de espaços-tempo com significado físico, é que o processo passará por tentar construir explicitamente variedades Lorentzianas globais cujas métricas, quando escritas num sistema de coordenadas locais, satisfaçam as equações de Einstein. E, de facto, foi esse o procedimento seguido ao longo de várias décadas, após a formulação de teoria da relatividade geral e das correspondentes equações, por Einstein, em 1915, com a construção de variadas soluções explícitas, e a sua interpretação fenomenológica física, de que são exemplos a solução de Schwarzschild descrita na secção anterior, os espaços de de Sitter e anti-de Sitter, os modelos cosmológicos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, os espaços-tempo de Kerr que generalizam a solução de Schwarzschild ao descreverem buracos negros em rotação, etc.

A formulação adequada do problema de valor inicial para as equações de Einstein, e a sua posterior resolução, foi algo que levou décadas a ser devidamente compreendido e estabelecido. Isso deve-se, naturalmente, à radical diferença que distingue as equações da relatividade geral das outras equações diferenciais parciais da física clássica, quer na sua complexidade quer, acima de tudo, no seu teor geométrico intrínseco. Com efeito, em qualquer das equações da física clássica, como as descritas na Secção 2, a geometria do domínio onde se procura a solução está prescrito e é conhecido a priori, mesmo nos casos mais complexos onde a equação é dada em domínios não euclidianos (como por exemplo, se se quiser resolver a equação do calor com vista a obter a evolução, no tempo, da temperatura numa superfície esférica). Ou seja, nas equações da física clássica, buscam-se soluções desconhecidas, mas que evoluem sobre um domínio com uma geometria previamente dada e conhecida. Nas equações de Einstein, no entanto, a solução

- a métrica do espaço-tempo - é ela própria o fator essencial que descreve o domínio, pelo que este é, no fundo, dado pela própria solução desconhecida. Por outras palavras, resolver as equações de Einstein consiste precisamente em determinar a geometria do domínio da solução, como se este fosse sendo revelado à medida que a evolução da solução vai sendo obtida.

Uma segunda dificuldade, inerente ainda à formulação geométrica intrínseca das equações de Einstein, advém do facto de, consoante as coordenadas locais escolhidas, as equações poderem assumir naturezas aparentemente muito diferentes: trata-se da chamada *liberdade de gauge*. Por isso, até o carácter evolutivo das equações foi uma propriedade obscurecida ao longo de vários anos pela falta de compreensão dos conceitos abstratos de geometria diferencial, no início do séc. XX, em particular no que toca à invariância das equações sob difeomorfismos, ou mudança de coordenadas locais. Aliás, foi o próprio Albert Einstein o primeiro que, na tentativa de deduzir que o campo gravitacional se propaga à velocidade da luz, recorrendo a uma perturbação linear das suas equações em torno da solução de Minkowski, obteve um sistema de equações de onda quando escritas em coordenadas locais específicas. Ainda assim, a dificuldade em compreender totalmente o conceito de invariância geométrica, aliada à não existência de uma teoria estabelecida de equações hiperbólicas, levou Einstein a hesitar acerca do carácter dinâmico das equações, insistindo mais na ideia errada de que a distribuição de matéria, através do tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, devia determinar de forma única a métrica do espaço-tempo. Numa perspectiva geométrica moderna, sabemos hoje que se forem escolhidas coordenadas adequadas, as chamadas coordenadas de onda (ou coordenadas harmónicas para a métrica Lorentziana), que satisfazem

$$\square_g x^\mu = 0, \quad (13)$$

onde $\square_g = \nabla^\alpha \nabla_\alpha$ designa o operador das ondas¹⁰ sobre uma variedade Lorentziana de métrica g , as equações de Einstein assumem a forma dum

¹⁰Na verdade $\square_g = \nabla^\alpha \nabla_\alpha$ não é mais do que o Laplaciano associado à métrica Lorentziana g , dado em coordenadas locais por

$$\nabla^\alpha \nabla_\alpha f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha \left(\sqrt{|g|} g^{\alpha\beta} \partial_\beta f \right),$$

onde $|g| = |\det g_{\alpha\beta}|$. Normalmente designado como operador de Laplace-Beltrami, em variedades Riemannianas, a sua definição estende-se a qualquer variedade pseudo-Riemanniana. Quando a métrica é Lorentziana, o operador deixa de ser elíptico, como no caso Riemanniano, para passar a ser hiperbólico, e generaliza assim a definição habitual do operador das ondas \square visto em (4), o D'Alembertiano, o qual portanto é simplesmente o Laplaciano no espaço de Minkowski correspondente $\mathbb{R}_{t,x}^{n+1}$.

sistema geral do tipo

$$\square_g g_{\mu\nu} = Q_{\mu\nu}(g, \partial g),$$

onde Q é um termo quadrático nas derivadas de primeira ordem da métrica g .

Estamos, portanto, em presença dum sistema de equações que deve ser visto como tendo um carácter evolutivo hiperbólico, não linear, análogo ao das equações das ondas descritas na Secção 2. Põe-se agora a questão do significado, e da forma que terá, o problema de valor inicial para um tal sistema. Nas equações da física clássica, essa formulação é razoavelmente intuitiva: existe uma variável preferencial, que habitualmente descreve o tempo, para a qual se escolhe um instante de partida da evolução, num domínio conhecido; a restrição do domínio a esse instante de partida é normalmente uma hipersuperfície, na qual se impõem os dados iniciais da solução. Mais geralmente, o problema de Cauchy pode ser formulado com dados iniciais sobre uma hipersuperfície do tipo espaço, como se viu a propósito da equação das ondas, na Secção 2, fazendo evoluir a solução a partir daí, ao longo da variável tempo. Mas para as equações de Einstein, uma tal formulação parece ser totalmente impraticável. Por um lado, dada a invariância geométrica, não existe nenhuma coordenada preferencial canónica que se possa eleger como aquela que representa o tempo e cujo valor fixo seria o instante de partida. Por outro lado, mesmo que isso fosse possível, a situação é extremamente confusa: como se pode seleccionar um instante inicial, ou uma hipersuperfície do tipo espaço, numa variedade Lorentziana que ainda não existe, porque a métrica que a descreve é precisamente a solução que se procura obter pela resolução do problema de valor inicial?

Parece assim ser necessário conhecer-se todo o espaço-tempo a priori, para se poder formular adequadamente o problema de valor inicial. Mas como o espaço-tempo é a própria solução, se o conhecermos a priori, então a solução está desde logo determinada e o problema de valor inicial torna-se totalmente irrelevante. Não admira que tenham sido precisos tantos anos para, corretamente, formular o problema de Cauchy para as equações de Einstein e estabelecer o seu lugar central na relatividade geral, como o é para as outras equações da física clássica.

Para fazer frente às dificuldades acabadas de descrever e resolver este imbróglio, fazem-se duas coisas: primeiro, recorre-se a uma abordagem, e à definição de conceitos, duma forma geométrica invariante, para que não haja qualquer tipo de dependência nalguma escolha específica de sistema de coordenadas; segundo, imagina-se, de facto, o espaço-tempo completo a priori... sem realmente ainda ter sido obtido. E, do fim para o início,

analisa-se qual a formulação correta dum problema de valor inicial que lhe daria origem. Assim, tendo presente as propriedades de propagação para as equações das ondas, bem como as relações de causalidade e o princípio do domínio de dependência, teremos de ter, em analogia com o que vimos na Secção 2, não um tempo inicial - porque não existe nenhuma variável preferencial que represente o tempo - mas uma hipersuperfície inicial do tipo espaço, sobre a qual serão impostos os dados iniciais, ou seja, o valor da solução, assim como da sua derivada na direção ortogonal à hipersuperfície.

Na descrição efetuada na Secção 2, percebeu-se que a necessidade da superfície inicial ser do tipo espaço prende-se com o facto de evitar que os dados iniciais se propaguem à própria superfície pela evolução, coisa que poderia causar restrições na imposição desses dados, ou contradições no caso de dados arbitrários, que levariam à má colocação do problema de valor inicial. Diz-se, em relatividade geral, que se tem um subconjunto *acausal* se nenhum ponto desse conjunto puder ser ligado a outro, por uma curva causal. A ideia desta definição é exatamente a mesma: excluir conjuntos para os quais a informação se propague - e já sabemos que só há propagação de informação ao longo de curvas causais - a outros pontos do mesmo conjunto. Mas ao contrário da equação das ondas no espaço euclidiano, em que a geometria plana do correspondente espaço-tempo de Minkowski $\mathbb{R}_{t,x}^{n+1}$ garante que, ao ser do tipo espaço, isso é condição suficiente para uma superfície inicial ser acausal, no caso duma variedade Lorentziana geral a sua topologia não trivial pode levar curvas causais, que partem da superfície inicial do tipo espaço Σ , a intersecá-la várias - até infinitas - vezes. Com efeito, ser do tipo espaço é uma condição apenas local, e não evita a ocorrência deste tipo de patologias numa escala global. Um exemplo simples onde este problema ocorre consiste em “enrolar” o espaço-tempo de Minkowski $\mathbb{R}_{t,x}^{n+1}$ na variável t , transformando-o num cilindro. Faz-se isso, por exemplo, através da identificação $t \sim t + 1$ com a métrica de Minkowski $g = -dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ induzida sobre a variedade quociente $\mathbb{R}_{t,x}^{n+1}/t \sim t + 1$. Qualquer curva causal γ , do tipo tempo, evoluindo para o futuro a partir de $\Sigma = \{t = 0\}$ eventualmente voltará à superfície inicial quando $t = 1$, como se representa na figura seguinte. A superfície do tipo espaço $\Sigma = \{t = 0\}$, que no espaço de Minkowski plano é acausal, aqui deixa de o ser. Uma patologia mais dramática, no mesmo exemplo, consiste em considerar uma curva do tipo tempo com coordenada x fixa: uma tal partícula material evoluiria para o futuro a partir de $t = 0$ e chegaria ao seu passado quando $t \rightarrow 1$.

Queremos evitar este tipo de patologias cronológicas, em particular esta última, de partículas materiais poderem viajar para o seu passado, ao longo

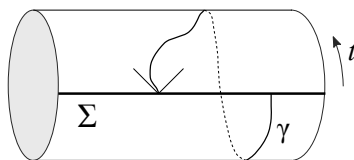


Figura 5: Superfície Σ do tipo espaço não acausal.

de curvas de tipo tempo percorridas para o futuro (dando origem ao famoso “paradoxo do avô”)¹¹. Mas também queremos evitar ainda outra situação, na qual pontos do espaço tempo possam não comunicar com a superfície inicial. Na verdade, devido ao princípio do domínio de dependência, que é o ingrediente fundamental da garantia de unicidade de soluções do problema de valor inicial para equações do tipo hiperbólico, como vimos na Secção 2, pretende-se que toda a informação causal de qualquer ponto do espaço-tempo provenha da superfície inicial. Designa-se assim por *desenvolvimento de Cauchy* futuro (passado) de uma superfície acausal Σ uma variedade Lorentziana, e representa-se por $D^+(\Sigma)$ ($D^-(\Sigma)$), o conjunto dos pontos tais que, qualquer curva causal inextensível para o passado (futuro) a partir deles, intersesta Σ ¹². Naturalmente chama-se desenvolvimento de Cauchy (total) de Σ à reunião dos desenvolvimentos futuro e passado, $D(\Sigma) = D^+(\Sigma) \cup D^-(\Sigma)$. Observe-se, na Figura 6, que todas as curvas causais para o passado, com início no ponto P intersestam Σ . Já o mesmo não é verdade relativamente ao ponto O , que é causalmente dependente de informação proveniente, não só de Σ , mas também da fronteira de M . Onde $P \in D^+(\Sigma)$ mas $O \notin D^+(\Sigma)$. As regiões a branco nessa figura são, portanto, pontos do espaço-tempo em que a previsibilidade da solução não decorre exclusivamente da evolução a partir de Σ : dado o carácter hi-

¹¹Diz-se que um espaço-tempo é *cronológico* ou que satisfaz a *condição cronológica* quando esta patologia não ocorre, ou seja, quando não existem curvas fechadas do tipo tempo.

¹²Na teoria matemática da relatividade geral, também se chama domínio de dependência de Σ ao seu desenvolvimento de Cauchy. No entanto, como vimos na Secção 2, a mesma terminologia já é usada na teoria de equações hiperbólicas para designar algo ligeiramente diferente, podendo causar alguma confusão: observando a Figura 2, o que aí se chama domínio de dependência do ponto (t_1, x_1) é o que, em relatividade, se chama de passado causal desse ponto, ou seja, o conjunto de pontos no seu passado que o podem causalmente afetar e, portanto, dos quais o valor da solução em (t_1, x_1) depende. Na terminologia da relatividade matemática esse conjunto é o desenvolvimento de Cauchy futuro - ou também domínio de dependência futuro - da bola (7), sobre a superfície $t = t_0$. Para evitar esta confusão de nomenclatura, usaremos exclusivamente a designação de desenvolvimento de Cauchy dum conjunto, no âmbito da relatividade geral.

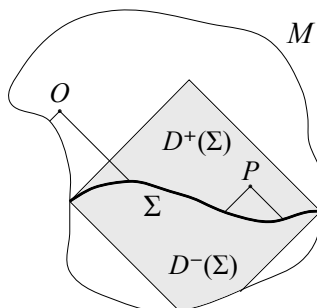


Figura 6: Desenvolvimento de Cauchy de Σ num espaço-tempo M .

perbólico das equações de Einstein, é de novo possível seguir um argumento de domínio de dependência para provar que os dados em Σ garantem unicidade da solução, mas apenas no desenvolvimento de Cauchy $D(\Sigma)$, tal como na Figura 2 os dados na bola (7) garantem unicidade da solução da equação das ondas apenas no cone com vértice em (t_1, x_1) .

Do ponto de vista da formulação dum problema de valor inicial, é assim razoável só definir como solução das equações de Einstein um espaço-tempo M no qual a superfície inicial Σ seja acausal e cujos dados iniciais garantam previsibilidade global, ou seja, tal que $M = D(\Sigma)$. Nesse sentido, define-se então o conceito de *(hiper)superfície de Cauchy*, como sendo uma hipersuperfície $\Sigma \subset M$, do tipo espaço, tal que qualquer curva causal inextensível em M intersesta Σ uma e uma só vez¹³. E diz-se que um espaço-tempo M é *globalmente hiperbólico* se possui uma superfície de Cauchy $\Sigma \subset M$. De acordo com estas definições, tem-se que, quando o espaço-tempo M é globalmente hiperbólico e Σ é uma sua superfície de Cauchy, necessariamente $D(\Sigma) = M$. Ou seja, toda a variedade Lorentziana M globalmente hiperbólica está sujeita ao princípio de domínio de dependência duma evolução a partir da superfície de Cauchy Σ : a solução das equações de Einstein será,

¹³Em rigor, é habitual definir-se uma superfície de Cauchy a partir duma condição um pouco mais fraca: apenas como um subconjunto do espaço-tempo tal que qualquer curva do tipo tempo, inextensível, o intersesta uma e uma só vez. É possível provar-se que, nesse caso, essas superfícies de Cauchy são apenas hipersuperfícies topológicas (ou seja, sem estrutura diferenciável e portanto possivelmente não suaves) tais que $M = D(\Sigma)$ e acronais - ou seja, tais que curvas do tipo tempo a intersestam uma única vez, podendo as do tipo luz intersestar em infinitos pontos. No entanto, esta definição mais fraca de superfície de Cauchy conduz exatamente à mesma definição de hiperbolicidade global do espaço-tempo, no qual é sempre possível obter superfícies de Cauchy suaves (pelo menos C^1), do tipo espaço, como optámos por definir para simplificar a apresentação (ver [13] ou [16] para uma exposição cuidadosa das hierarquias de causalidade de espaços-tempo).

portanto, única em todo M para dados iniciais devidamente impostos sobre Σ . Além disso, num espaço-tempo globalmente hiperbólico é sempre possível definir uma função temporal de Cauchy: uma função diferenciável $\tau : M \rightarrow \mathbb{R}$, tal que o seu gradiente $\nabla\tau$ é do tipo tempo, para o passado¹⁴, e cujas superfícies de nível $\Sigma_c = \tau^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$, são hipersuperfícies de Cauchy, difeomorfas entre si. Aliás, dada uma superfície de Cauchy $\Sigma \subset M$ também é sempre possível escolher essa função temporal τ tal que $\Sigma = \tau^{-1}(0)$, e o espaço-tempo é difeomorfo a $\mathbb{R} \times \Sigma$. A existência de funções temporais é a garantia que as patologias cronológicas, como o caso da existência de curvas do tipo tempo fechadas, estão excluídas dos espaços-tempo globalmente hiperbólicos.

Exemplo óbvio de um espaço tempo globalmente hiperbólico é o espaço de Minkowski (8), sendo que qualquer plano $t = c \in \mathbb{R}$ é uma superfície de Cauchy. A função temporal natural é a própria variável t , ou seja, $\tau(t, x_1, x_2, x_3) = t$, cujas hipersuperfícies de nível são precisamente os planos de t constante. O espaço-tempo de Schwarzschild (11) também é globalmente hiperbólico, com superfície de Cauchy, por exemplo, correspondendo a $t = 0$. Neste caso não se trata dum plano, mas duma hipersuperfície do tipo espaço com duas terminações assintoticamente planas, como se representa na Figura 7.

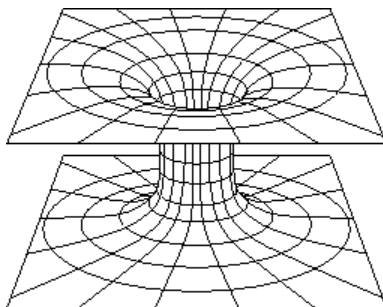


Figura 7: Configuração topológica da superfície de Cauchy $t = 0$ para o espaço-tempo de Schwarzschild.

Espaços-tempo não globalmente hiperbólicos também são fáceis de obter. Além de exemplos esquemáticos, como o da Figura 6, um exemplo já visto é o espaço quociente de Minkowski $\mathbb{R}_{t,x}^{n+1}/t \sim t + 1$ representado na Figura 5. Outro, bastante natural consiste em simplesmente remover um ponto, por

¹⁴Devido ao sinal negativo da métrica Lorentziana para vetores causais orientados para o futuro, isso significa que τ cresce ao longo de curvas causais percorridas para o futuro, pois se γ é uma tal curva, tem-se $\frac{d\tau(\gamma(s))}{ds} = d\tau(\dot{\gamma}(s)) = g(\dot{\gamma}(s), \nabla\tau) > 0$.

exemplo a origem, ao espaço-tempo de Minkowski, como se representa na Figura 8.

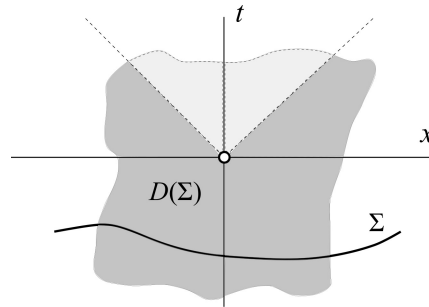


Figura 8: O espaço-tempo de Minkowski sem a origem, $\mathbb{R}^{3+1} \setminus (0, 0, 0, 0)$, não é globalmente hiperbólico. Representa-se o desenvolvimento de Cauchy $D(\Sigma)$ duma superfície Σ do tipo espaço que passa abaixo da origem, mas o problema seria o simétrico se passasse acima.

Os espaços-tempo, portanto, podem não ser globalmente hiperbólicos por duas razões: ou porque não é possível obter uma hipersuperfície Σ acausal, apesar de qualquer curva causal a intersestar (necessariamente mais que uma vez, nalguns casos) como é a situação da Figura 5; ou porque existirão sempre pontos do espaço-tempo cuja dependência causal não é garantida exclusivamente por Σ , qualquer que seja essa hipersuperfície, como é o caso das Figuras 6 e 8. Nesta última situação, em analogia com a teoria clássica de equações diferenciais parciais, seria necessário acrescentar condições de fronteira, para além das condições iniciais em Σ : na fronteira de M , no caso da Figura 6, ou na origem, no caso da Figura 8.

Os espaços-tempo globalmente hiperbólicos são assim aqueles que têm a estrutura precisamente adequada para a formulação dum problema de valor inicial. No fundo, é aquilo que se tem habitualmente no espaço euclidiano, da teoria de equações diferenciais parciais de evolução clássica. Em resumo: existe uma superfície inicial, dita de Cauchy, do tipo espaço, a partir da qual a evolução dos dados iniciais permite controlar a previsibilidade da solução sobre todo o espaço-tempo, pelo que este está assim globalmente sujeito ao princípio do domínio de dependência, assegurando portanto unicidade de soluções em todo o domínio; existe uma função (não canónica) que desempenha um papel análogo ao do tempo, crescente ao longo de curvas causais orientadas para o futuro, e cujos conjuntos de nível folheiam o espaço-tempo por superfícies do tipo espaço, difeomorfas à superfície de Cauchy inicial, a qual corresponde ao conjunto de nível onde esse tempo vale zero.

Mas somos de novo confrontados com o problema já descrito atrás: esta estrutura de hiperbolicidade global, e superfícies de Cauchy, requer a existência prévia de um espaço-tempo (M, g) , sendo que na formulação do problema de valor inicial esse espaço-tempo é a solução e, portanto, é desconhecido à partida. Como determinar então uma superfície de Cauchy dum espaço-tempo globalmente hiperbólico que ainda não existe, onde queremos impor as condições iniciais? Numa variedade Lorentziana (M, g) a restrição da sua métrica g a uma hipersuperfície $\Sigma \subset M$ do tipo espaço é definida positiva, pelo que $(\Sigma, g|_{\Sigma})$ será sempre uma variedade Riemanniana¹⁵. Claro que, à partida, não existe M nem a métrica global g , pelo que não poderemos falar da sua restrição a Σ . Por isso, seguindo a estratégia de analisar o sistema do fim para o início, para formular convenientemente um problema de valor inicial que daria origem ao espaço-tempo idealizado, o que faremos é partir duma variedade Riemanniana (Σ, \tilde{g}) isolada a qual, *a posteriori*, depois de obtida uma solução globalmente hiperbólica (M, g) , possa ser identificada (isometricamente) com uma hipersuperfície de Cauchy de M , e portanto \tilde{g} com a restrição de g a essa hipersuperfície.

A métrica \tilde{g} corresponde ao valor da solução sobre a superfície Riemanniana inicial. Mas tratando-se as equações de Einstein dum sistema do tipo das equações de onda, vistos na Secção 2, falta ainda impor a derivada da solução, na direção ortogonal à superfície, para completar as condições iniciais dum problema de valor inicial bem posto. De novo assumindo que se tem *a posteriori* a solução completa, ou seja, um espaço-tempo globalmente hiperbólico (M, g) , no qual Σ é uma superfície de Cauchy, o análogo à derivada da solução na direção normal à hipersuperfície é a segunda forma fundamental de Σ . Relembramos que, para uma hipersuperfície Σ duma variedade Riemanniana, ou pseudo-Riemanniana, (M, g) , a segunda forma fundamental K é um campo tensorial simétrico 2-covariante em Σ (ou seja, em cada ponto $p \in \Sigma$ definida em pares de vetores tangentes a Σ nesse ponto), que corresponde à (metade da) derivada de Lie da métrica na direção de um (dos dois possíveis) vetor unitário ortogonal à superfície:

$$K(u, v) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_N g)(u, v).$$

Naturalmente, a segunda forma fundamental muda de sinal consoante o

¹⁵Entende-se aqui por restrição $g|_{\Sigma}$ da métrica g à hipersuperfície Σ como o pullback $g|_{\Sigma} = i^*g$ em que $i : \Sigma \rightarrow M$ é o mergulho de Σ em M , como subvariedade, através da identidade. Por outras palavras, a restrição da métrica não é simplesmente a métrica ambiente g de M restringida aos pontos do subconjunto Σ , mas é também restringida a uma métrica em Σ , ou seja, definida apenas sobre os vetores do fibrado tangente $T\Sigma$, e portanto reduzida só às componentes relativas aos vetores tangentes à hipersuperfície.

sentido da normal unitária N convencionado para a sua definição. Em rigor, para que a derivada de Lie, $\mathcal{L}_N g$, esteja bem definida, esta fórmula exige que N seja um campo vetorial em M , portanto teria de ser estendido dum campo vetorial ortogonal, apenas definido sobre Σ , para uma vizinhança da superfície na variedade ambiente M . Não é, no entanto, difícil provar que esta definição é independente da extensão e que, na verdade, depende só mesmo dos valores pontuais dos vetores u, v e N em cada $p \in \Sigma$, podendo ser dada simplesmente por

$$K_p(u, v) = -g_p(\nabla_u v, N_p), \quad (14)$$

para $u, v \in T_p \Sigma$, onde v , no lado direito da definição, designa uma qualquer extensão arbitrária de $v \in T_p \Sigma$ a um campo vetorial na vizinhança de p e ∇ designa a conexão de Levi-Civita em M , ou seja, $\nabla_u v$ é a derivada covariante de v na direção u na variedade ambiente M . Para espaços-tempo em que Σ é do tipo espaço, convencionou-se que N_p é a normal (portanto, do tipo tempo) que aponta no sentido futuro¹⁶. Invertendo de novo o raciocínio, tal como fizemos para o próprio valor da métrica sobre a hipersuperfície de Cauchy inicial, o que faremos agora é definir também um campo tensorial simétrico 2-covariante \tilde{K} sobre a variedade Riemanniana (Σ, \tilde{g}) , que já estamos a usar para representar isoladamente a superfície inicial. *A posteriori*, depois de obtida a solução globalmente hiperbólica (M, g) e feita a identificação de Σ com uma hipersuperfície de Cauchy em M , \tilde{K} corresponderá à segunda forma fundamental K de Σ como uma subvariedade mergulhada em M , desempenhando assim o papel correspondente à derivada ortogonal à superfície de Cauchy, para os dados iniciais duma equação do tipo das ondas.

Apesar de já suficientemente complexa toda esta construção, e parecendo que a imposição dos valores de g e da segunda forma fundamental K sobre a hipersuperfície inicial seriam suficientes para encerrar a escolha dos dados iniciais do problema de valor inicial, tal como u e $\partial_\nu u$ são suficientes para uma equação clássica das ondas sobre uma hipersuperfície do tipo espaço, de acordo com o que vimos na Secção 2, ainda assim as dificuldades para a correta formulação do problema de Cauchy para a equação de Einstein não terminam aqui. As equações de Gauss-Codazzi relacionam a curvatura de subvariedades com a da variedade ambiente, através da segunda forma fundamental e, por isso, impõem restrições a estes dados iniciais, visto que

¹⁶De acordo com (14), é possível fazer uma outra interpretação da segunda forma fundamental duma hipersuperfície Σ do tipo espaço: como a componente ortogonal a Σ (na métrica g), para o passado, da derivada covariante ambiente de v na direção u , $\nabla_u v$.

a curvatura do espaço ambiente, no caso dum espaço-tempo, está condicionada a satisfazer as equações de Einstein. Obtém-se assim o sistema de equações de restrição aos dados iniciais, para o sistema acoplado de equações de Einstein com modelo de matéria (12)

$$\tilde{R} + (\tilde{K}_j^j)^2 - \tilde{K}_{ij}\tilde{K}^{ij} = 16\pi T_{\mu\nu}N^\mu N^\nu + 2\Lambda, \quad (15)$$

$$\tilde{\nabla}_j\tilde{K}_i^j - \tilde{\nabla}_i\tilde{K}_j^j = 16\pi \Pi_i^\mu T_{\mu\nu}N^\nu, \quad (16)$$

em que \tilde{R} e \tilde{K} representam, respetivamente, a curvatura escalar e a segunda forma fundamental da hipersuperfície Σ , com a métrica induzida pela métrica ambiente $\tilde{g} = g|_\Sigma$, e $\tilde{\nabla}$ é a conexão em Σ compatível com \tilde{g} . Do lado direito de (15) e (16), T é o tensor de energia-momento, que modela a presença de matéria e energia nas equações de Einstein, como visto na Secção 3, Λ é a constante cosmológica, N é a normal unitária a Σ de (14) e Π é o pullback da variedade ambiente, o espaço-tempo (M, g) , para a hipersuperfície Σ . Observe-se, para concluir, que os índices romanos, relativos às componentes dos tensores em Σ percorrem apenas três índices, $i, j = 1, 2, 3$, visto que a hipersuperfície é tridimensional, enquanto os índices gregos, relativos às componentes tensoriais no espaço-tempo, percorrem quatro índices $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

No caso de vácuo, e na ausência de constante cosmológica, ou seja, para as equações de Einstein (9) ou (10), o sistema de restrições às condições iniciais reduz-se a

$$\tilde{R} + (\tilde{K}_j^j)^2 - \tilde{K}_{ij}\tilde{K}^{ij} = 0, \quad (17)$$

$$\tilde{\nabla}_j\tilde{K}_i^j - \tilde{\nabla}_i\tilde{K}_j^j = 0. \quad (18)$$

Quer (15) e (16), quer (17) e (18), formam difíceis sistemas de equações diferenciais parciais de tipo elíptico, e mesmo só a sua resolução é motivo de alguma da investigação matemática atual. Donde podemos concluir que a formulação do problema de valor inicial para o sistema das equações de Einstein, acoplado a modelos de matéria, ou mesmo só em vácuo, é de uma complexidade tão grande que se torna um problema em si mesmo, só para a escolha dos dados iniciais, antes mesmo da tentativa de resolução das equações propriamente ditas, para a obtenção do espaço-tempo.

Podemos finalmente enunciar o problema de valor inicial para as equações de Einstein, no vácuo.

Problema de Valor Inicial: Seja Σ uma variedade tridimensional, \tilde{g} uma métrica Riemanniana em Σ e \tilde{K} um tensor simétrico 2-covariante. Chamamos a $(\Sigma, \tilde{g}, \tilde{K})$ dados iniciais para as equações de Einstein no vácuo,

sem constante cosmológica, se satisfazem as equações de restrição (17) e (18). Nesse caso, designa-se por solução do problema de valor inicial, ou desenvolvimento de Cauchy dos dados iniciais, um espaço-tempo globalmente hiperbólico (M, g) , cuja métrica satisfaz as equações (9) ou (10) e tal que existe um mergulho $i : \Sigma \rightarrow M$ em que $i(\Sigma)$ é uma superfície de Cauchy de M , e \tilde{g} , \tilde{K} coincidem, respetivamente, com a métrica induzida por (M, g) na subvariedade $i(\Sigma)$ e com a correspondente segunda forma fundamental K , ou seja, $\tilde{g} = i^*g$ e $\tilde{K} = i^*K$.

Para encerrar esta secção, fazemos notar apenas dois detalhes:

- No caso do sistema acoplado das equações de Einstein com um modelo de matéria ou energia (12), é necessário também acrescentar aos dados iniciais geométricos $(\Sigma, \tilde{g}, \tilde{K})$, para o espaço tempo, dados iniciais para a evolução dinâmica do modelo de matéria sobre a superfície inicial Σ , os quais dependem do tipo de modelo de matéria considerado e das correspondentes equações de evolução acopladas às equações de Einstein. De qualquer forma, os dados iniciais para a matéria, conjuntamente com os do espaço-tempo, terão agora de satisfazer as equações de restrição (15) e (16).
- Dois espaços-tempo (M, g) e (M', g') consideram-se como sendo a mesma solução do problema de valor inicial para as equações de Einstein, se existir uma isometria entre eles $\phi : M \rightarrow M'$, ou seja, um difeomorfismo que satisfaz $g = \phi^*g'$, e que além disso, preserva a superfície inicial. Este último facto significa que, se $i : \Sigma \rightarrow M$ e $i' : \Sigma \rightarrow M'$ forem os mergulhos dos dados iniciais, de acordo com a definição anterior de solução para o problema de valor inicial, então $i' = \phi \circ i$. Esta identificação de soluções, a menos de isometrias, torna as questões de unicidade particularmente delicadas e difíceis, como veremos na secção seguinte.

3.3 Existência e unicidade de soluções

Não é objetivo deste texto, nem seria aqui possível, fazer uma exposição adequada, mesmo que superficial, da teoria de existência e unicidade de soluções para as equações de Einstein. Recomendamos, mais uma vez, a excelente apresentação em [16], para os leitores interessados em aprofundar os conhecimentos necessários à compreensão detalhada e completa do problema de valor inicial para as equações de Einstein, assim como dos métodos mate-

máticos usados para obter os resultados mais fundamentais de existência e unicidade de soluções. Outros livros de referência são [1] ou [14].

Por um lado, uma abordagem minimamente cuidadosa dos resultados de existência e unicidade, até evitando entrar nos detalhes completos das demonstrações, requereria um nível técnico matemático muito superior ao que se pretende aqui, visto envolver uma combinação já avançada de teoria de equações diferenciais parciais hiperbólicas, assim como de geometria Riemanniana. Por outro lado, não existe nenhum teorema geral que englobe todos, ou pelo menos uma classe suficientemente ampla, de modelos de matéria e energia acoplados às equações de Einstein (12). É preciso lembrar que esses modelos acrescentam às equações de Einstein novas equações para descrever a evolução da matéria sob o efeito da gravidade, as quais são tipicamente complexas ao ponto de, mesmo de forma isolada, merecerem estudo dedicado. A tecnologia matemática atual está longe de conseguir tratar de forma exaustiva um sistema altamente não linear de equações de tipo hiperbólico, como são as equações de Einstein, com as dificuldades já descritas anteriormente relativamente à sua forte componente geométrica, além disso acopladas a equações para a evolução dinâmica de matéria que podem ser suficientemente difíceis, até separadas do efeito gravitacional. Se bem que existe hoje em dia um conhecimento bastante completo das questões de existência local, muitas das respostas relativas ao comportamento global das soluções continuam em aberto. Como também já referimos, mesmo as equações de Einstein no vácuo, (9) ou (10), na ausência de qualquer matéria, onde a evolução dinâmica da gravidade se dá só sob o seu próprio efeito autônomo, são ainda assim de análise muito difícil, de tal modo que respostas a questões aparentemente básicas, como a estabilidade do espaço-tempo de Minkowski ou a formação de singularidades, foram só recentemente respondidas em trabalhos de extrema profundidade e complexidade, como [4] ou [5].

Ora, o que se faz para conseguir obter problemas tratáveis, é abordar sistemas específicos de matéria, normalmente acrescidos de simplificações em termos de simetrias. É preciso lembrar também que a simetria, só por si, introduz muita rigidez no problema, facto de que o teorema de Birkhoff mencionado na Secção 3.1 é um exemplo, pelo que quando se quer introduzir algum grau de liberdade na evolução dinâmica das equações, mantendo a simetria, é necessário acoplar as equações de Einstein a modelos particulares de matéria. Por sua vez, visto que os fenómenos singulares ou patológicos, que se desenvolvem pela evolução gravitacional das soluções, são aqueles que mais interesse despertam, é importante assegurar que eles sejam causa-

dos pela própria evolução gravitacional e não por propriedades intrínsecas do modelo de matéria que sejam, já à partida, propensas à formação de singularidades. Por exemplo, as soluções das equações que descrevem o escoamento de fluidos compressíveis, no espaço euclidiano, tipicamente desenvolvem choques: trata-se duma formação de singularidades bem conhecida, intrínseca a este modelo específico da mecânica de meios contínuos, mesmo sem qualquer efeito gravitacional. Pelo que, quando se quer estudar fenómenos de colapso gravitacional, por exemplo, é preciso ter um cuidado especial na escolha de modelo de matéria a acoplar às equações de Einstein, para não ofuscar os efeitos puramente gravitacionais com os resultantes da dinâmica material. Por tudo isto, existe uma riquíssima literatura dedicada ao estudo de variados exemplos de combinações de equações de Einstein, com modelos de matéria e hipóteses de simetria, cada um dos quais normalmente aborda a existência e unicidade de soluções para o seu próprio problema de valor inicial.

Vamos, por tudo isto, e como já referimos antes, centrar-nos apenas nas equações de Einstein no vácuo e nos resultados pioneiros de Yvonne Choquet-Bruhat ([11]), para a questão de existência local, e de Yvonne Choquet-Bruhat e Robert Geroch ([3]), para a posterior questão da existência de solução maximal única.

O trabalho de Choquet-Bruhat ([11]), em 1952, é fundamental porque, pela primeira vez, quase 40 anos após a publicação das equações para o campo gravitacional, de acordo com a teoria da relatividade geral, por Albert Einstein ([7]), o problema de valor inicial foi devidamente considerado e resolvido, tendo sido obtidas soluções locais. A sua demonstração recorreu ao uso de coordenadas locais do tipo (13) e à teoria de existência e unicidade para equações hiperbólicas não lineares (coisa que facilmente se depreende pelo título do artigo). Mas, em rigor, a formulação do resultado, neste trabalho, ainda foi feita em coordenadas locais. A invariância geométrica da definição de solução do problema de valor inicial, tal como a enunciámos na Secção 3.2, só foi finalmente clarificada no trabalho seguinte ([3]). De qualquer modo, e à luz do formalismo geométrico atual, podemos enunciar o teorema de existência e unicidade local de desenvolvimentos de Cauchy, para o problema de valor inicial das equações de Einstein no vácuo, da seguinte forma.

Teorema (Existência e Unicidade Locais [11]): Sejam $(\Sigma, \tilde{g}, \tilde{K})$ dados iniciais para as equações de Einstein no vácuo, sem constante cosmológica, de acordo com a definição do problema de valor inicial, do final da Secção 3.2. Então:

1. Existe um espaço tempo (M, g) que é solução do correspondente problema de valor inicial para as equações (9) ou (10).
2. Se (M', g') for outra solução do mesmo problema de valor inicial, existe um terceiro espaço-tempo (N, g^\sharp) , também solução do mesmo problema de valor inicial, tal que, se $j : \Sigma \rightarrow N$ for o mergulho da superfície inicial em N , têm-se duas isometrias (não necessariamente sobrejetivas) $\phi : N \rightarrow M$ e $\phi' : N \rightarrow M'$, que satisfazem $i = \phi \circ j$ e $i' = \phi' \circ j$, em que i e i' designam os mergulhos de Σ em M e M' , respetivamente.

O ponto 2 do teorema anterior corresponde, evidentemente, ao resultado de unicidade local. A sua forma aparentemente rebuscada resulta da dificuldade inerente ao conceito de solução geometricamente invariante, a menos de isometrias. Com efeito, um resultado análogo, para equações de evolução num domínio do espaço euclidiano, corresponderia a intersestar os domínios de duas soluções que partilham os mesmos dados iniciais, afirmando que nessa interseção as soluções coincidem. Mas, no problema de valor inicial para as equações de Einstein, duas soluções correspondem a dois objetos diferentes, duas variedades Lorentzianas distintas, (M, g) e (M', g') digamos. Como intersestar então dois objetos diferentes, para afirmar que as soluções coincidem na interseção? A resolução desta dificuldade passa por construir uma terceira variedade (N, g^\sharp) que, por isometrias em M e M' , $\phi : N \rightarrow M$ e $\phi' : N \rightarrow M'$, representa essa interseção, de acordo com a identificação de soluções a menos de isometrias, estabelecendo assim a equivalência entre os correspondentes subconjuntos locais dos espaços-tempo. Diz-se que (a menos de isometrias) (M, g) e (M', g') são extensões do desenvolvimento de Cauchy comum (N, g^\sharp) , quando satisfazem as condições do ponto 2 do teorema anterior. O resultado de unicidade local pode assim ser enunciado, de forma sucinta, dizendo que dois desenvolvimentos de Cauchy quaisquer dos dados iniciais $(\Sigma, \tilde{g}, \tilde{K})$ são sempre extensões dum mesmo desenvolvimento comum. Uma representação esquemática dessas relações encontra-se na Figura 9. Sublinhe-se, curiosamente, que do ponto de vista técnico, é mais difícil provar este resultado de unicidade local, do que a própria existência de soluções, do ponto 1 do teorema.

O segundo passo da teoria de existência e unicidade, para o problema de valor inicial, consiste na obtenção de soluções maximais ou globais. De novo, a situação é bastante mais simples de formular e entender (mas não necessariamente de provar) nas equações da física clássica: trata-se aí de saber se as soluções existem para qualquer intervalo de tempo arbitrariamente

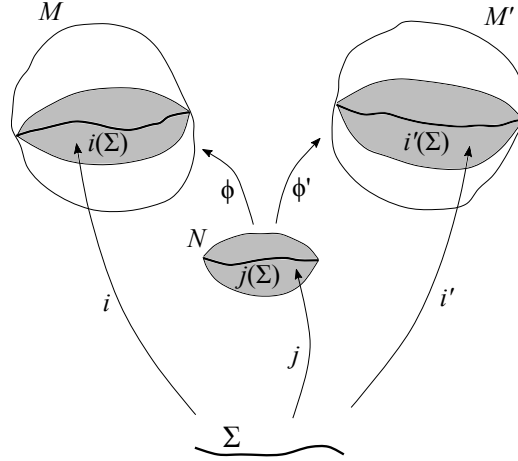


Figura 9: Unicidade local dos desenvolvimentos de Cauchy de Σ .

grande, ou se existe alguma obstrução em tempo finito, normalmente sob a forma de ocorrência de singularidades, que impedem a solução de existir até tempo infinito. Mais uma vez, estas ideias são impossíveis de transpor para o contexto geométrico das equações de Einstein, por não podermos falar numa coordenada canónica de tempo ao longo da qual se averigua se a solução evolui em intervalos arbitrariamente longos. Por outro lado, do ponto de vista de teoria de conjuntos, visto que as soluções são agora variedades Lorentzianas identificadas por isometrias, a forma de definir uma solução global acaba por ser de uma simplicidade surpreendente: uma solução global será uma solução maximal, extensão de qualquer outra. Evidentemente, esta definição evoca imediatamente o lema de Zorn, e é esse precisamente o mecanismo matemático usado para obter o resultado. No entanto, ao contrário dos resultados de existência global de soluções nas equações da física clássica, a natureza de teoria de conjuntos deste resultado maximal para as equações de Einstein não dá qualquer informação sobre a obstrução à extensão das soluções a domínios ainda maiores. Uma representação esquemática de dois desenvolvimentos de Cauchy, a partir dos dados iniciais triviais¹⁷ sobre dois subconjuntos do plano $t = 0$ no espaço de Minkowski, encontra-se na Figura 10: o desenvolvimento de Σ_1 é maximal e o de Σ_2 não é.

Em 1969, dezassete anos depois da obtenção do primeiro resultado de existência local de soluções para as equações de Einstein no vácuo, Yvonne

¹⁷Dados iniciais triviais para o espaço-tempo de Minkowski, para uma superfície inicial Σ correspondente a um subconjunto aberto de \mathbb{R}^3 , consistem em fazer $\tilde{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ e $\tilde{K} = 0$.

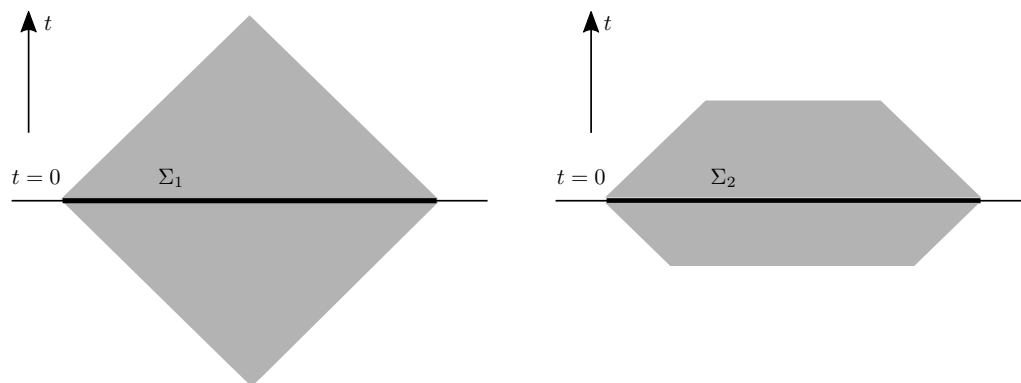


Figura 10: Desenvolvimento de Cauchy maximal de Σ_1 e não maximal de Σ_2 .

Choquet-Bruhat e Robert Geroch finalmente estabeleceram o seguinte resultado de existência de desenvolvimentos maximais, encerrando assim o conjunto de ideias que confirmam o papel central do problema de valor inicial para as equações de Einstein, na teoria da relatividade geral.

Teorema (Existência e Unicidade de Desenvolvimentos Maximais [3]): Sejam $(\Sigma, \tilde{g}, \tilde{K})$ dados iniciais para as equações de Einstein no vácuo, sem constante cosmológica, de acordo com a definição do problema de valor inicial, do final da Secção 3.2. Então, existe um desenvolvimento de Cauchy destes dados iniciais que é maximal, ou seja, que é uma extensão de qualquer outro desenvolvimento dos mesmos dados. Esta solução maximal é única, a menos de isometrias.

É só no artigo [3], em que este resultado é publicado, que os conceitos de problema de valor inicial, de solução globalmente hiperbólica e de unicidade, são finalmente definidos e clarificados de forma geometricamente invariante, como apresentados na Secção 3.2. O ingrediente essencial da demonstração é a aplicação do lema de Zorn¹⁸ ao conjunto de desenvolvimentos globalmente hiperbólicos dos dados iniciais. Um detalhe técnico de demonstração particularmente difícil é o da unicidade da solução maximal: ao contrário da unicidade local, agora é necessário provar-se que, dados dois desenvolvimentos de Cauchy dos mesmos dados iniciais, existe um terceiro desenvolvimento de Cauchy que é extensão desses dois (no fundo, o análogo

¹⁸Um resultado recente de Jan Sbierski ([18]) evita a utilização do lema de Zorn nesta construção.

de reunir os dois domínios, para construir uma solução com domínio maior). Sublinhe-se também a importância crucial, neste resultado, das soluções serem espaços-tempo globalmente hiperbólicos: sem essa propriedade não seria possível obter soluções maximais únicas, facto que se deve, conceptualmente, ao princípio de domínio de dependência e que assim assegura a previsibilidade de toda a solução maximal a partir dos dados iniciais. As dificuldades técnicas associadas à clarificação das definições e das demonstrações foram a razão do longo intervalo de tempo que separou os dois resultados anteriores.

Para terminar este artigo, queremos apenas mencionar um dos mais importantes problemas em aberto da teoria matemática da relatividade geral, que decorre diretamente destes resultados de existência e unicidade de desenvolvimentos de Cauchy maximais, para o problema de valor inicial associado às equações de Einstein. Trata-se da conjectura da censura cósmica forte, originalmente enunciada por Roger Penrose¹⁹. De forma simples, a questão pode pôr-se da seguinte forma: existirá solução, ou espaço-tempo, para lá do desenvolvimento de Cauchy maximal dos dados iniciais? Ou, usando as definições mais técnicas, existirão extensões estritas (necessariamente já não globalmente hiperbólicas) do desenvolvimento de Cauchy maximal de dados iniciais?

A resposta parece ser simples e afirmativa: basta observar, por exemplo, as Figuras 2 ou 10 para, com certeza, afirmar que no exterior dos cones representados nessas figuras continua a existir solução. Mas a razão desse fenómeno é fácil de entender pois, de alguma forma, nas duas figuras, as superfícies iniciais são apenas pequenos subconjuntos de todo o plano, pelo que a solução no exterior dos cones não é mais do que o desenvolvimento maximal do plano completo. Ou seja, a questão posta no parágrafo anterior só assume um carácter não trivial se se considerarem superfícies iniciais tão grandes quanto possível. Nesse caso, se se considerar o plano todo, na Figura 2 o desenvolvimento maximal da solução da equação de onda será toda a região $t > 0$, enquanto na Figura 10 o desenvolvimento de Cauchy maximal de $\Sigma = \mathbb{R}^3$ será todo o espaço de Minkowski: num caso e noutro, as soluções maximais serão então inextensíveis.

Para superfícies iniciais Σ , que são variedades Riemannianas, como as que usamos nos dados do problema de valor inicial, ser “tão grande quanto possível” tem uma tradução rigorosa simples do ponto de vista matemático: serem geodesicamente completas. Trata-se duma propriedade importante

¹⁹Existe uma outra conjectura de censura cósmica, dita fraca, igualmente famosa e também devida a Roger Penrose, a qual, apesar do nome, não está logicamente relacionada com a conjectura de censura cósmica forte.

em geometria Riemanniana, que consiste precisamente no facto de qualquer geodésica ter parâmetro afim definido até ao infinito e, portanto, a variedade ser inextensível de forma geometricamente invariante. Não é possível, nesse caso, considerar-se uma superfície inicial maior, da qual Σ seja um pequeno subconjunto, como acontece nos exemplos óbvios das Figuras 2 e 10. Outra condição que se exige é que Σ seja assintoticamente plana, o que significa vagamente que, à medida que nos afastamos para infinito ao longo de geodésicas, a variedade Riemanniana se assemelha cada vez mais à superfície inicial trivial do espaço-tempo de Minkowski²⁰ (caso contrário é possível construir exemplos de desenvolvimentos de Cauchy maximais facilmente extensíveis). É esta a situação que se verifica obviamente, se se considerar o plano todo como superfície inicial, nas Figuras 2 e 10.

Curiosamente, mesmo para superfícies iniciais geodesicamente completas e assintoticamente planas, são conhecidos exemplos explícitos particulares em que o desenvolvimento de Cauchy maximal é extensível, ou seja, existe um espaço-tempo não globalmente hiperbólico que é uma extensão estrita dessa solução maximal. Evidentemente, o princípio do determinismo falha nesses casos: os pontos da extensão, no exterior do desenvolvimento globalmente hiperbólico maximal, deixam de depender exclusivamente dos dados na superfície inicial Σ e, portanto, não é possível aplicar um argumento de domínio de dependência. Tal como no exterior dos cones das figuras 2 e 10 a solução deixa de ser única, também nestes exemplos a extensão não globalmente hiperbólica perde a unicidade. Um exemplo importante em que este fenómeno acontece é na solução de Reissner-Nordström, que se obtém, em simetria esférica, acoplando as equações de Einstein às equações de Maxwell do eletromagnetismo, de forma a introduzir o efeito dum campo eletromagnético no vácuo no tensor da energia-momento. A superfície inicial desta solução é análoga à de Schwarzschild, portanto como na Figura 7 (continua a ser uma solução de vácuo e, por isso, não existe matéria carregada eletricamente, pelo que o campo eletromagnético é puramente topológico), e verifica-se também a formação de um buraco negro nesta solução. Só que, ao contrário dos buracos negros da solução de Schwarzschild, dentro dos

²⁰Rigorosamente, diz-se que uma superfície Riemanniana inicial Σ tem n terminações assintoticamente planas se existe um compacto $\mathcal{K} \subset \Sigma$ tal que $\Sigma \setminus \mathcal{K} = \cup_{j=1}^n U_j$, em que cada U_j é um aberto difeomorfo ao exterior da bola unitária $\mathbb{R}^3 \setminus B_1(0)$ e tal que, nas coordenadas induzidas por esse difeomorfismo, existe algum $m > 0$ - denominada massa ADM - para o qual se tem $\tilde{g}_{ij} = (1 + \frac{2m}{r}) \delta_{ab} + o(r^{-1})$, onde δ_{ab} designa a métrica euclidiana. Assim, $\Sigma = \mathbb{R}^3$ com os dados iniciais triviais de Minkowski é assintoticamente plana com uma só terminação e $m = 0$, enquanto que a Figura 7 é assintoticamente plana com duas terminações e m é a massa da solução de Schwarzschild (11).

quais as geodésicas causais são incompletas e colapsam numa singularidade em $r = 0$, nos buracos negros de Reissner-Nordström não há singularidades: as geodésicas causais continuam a ser incompletas dentro do domínio globalmente hiperbólico maximal, mas podem ser continuadas para além do que se denomina de horizonte de Cauchy, para regiões que já fazem parte de extensões estritas do espaço-tempo maximal. Por um lado, a situação parece ótima: não há singularidades dentro dos buracos negros de Reissner-Nordström e um viajante que acesse o horizonte de eventos, e caia no buraco negro, não será esmagado pela gravidade em $r = 0$, como no buraco negro de Schwarzschild. Mas, por outro lado, do ponto de vista filosófico e do determinismo esperado das equações de Einstein, o problema é mais grave: o futuro do viajante espacial é imprevisível quando ele alcançar o horizonte de Cauchy, porque poderá atravessá-lo para uma infinidade de extensões possíveis do espaço-tempo original, no futuro.

Roger Penrose, baseado nalgumas análises heurísticas, achou que estes casos, como o da solução de Reissner-Nordström, eram excepcionais, causados por arranjos matemáticos muito particulares, como a simetria esférica. Mas que qualquer perturbação destas soluções eventualmente introduziria singularidades na fronteira da solução maximal globalmente hiperbólica, como acontece no buraco negro de Schwarzschild, impedindo a existência de extensões estritas e assim garantindo, genericamente, o determinismo das equações de Einstein. E foi baseado nestas ideias que ele formulou a seguinte conjectura.

Conjetura da censura cósmica forte: Condições iniciais genéricas para superfícies completas assintoticamente planas, em modelos de matéria razoáveis, dão origem a desenvolvimentos de Cauchy maximais, globalmente hiperbólicos, que são inextensíveis como variedades Lorentzianas regulares.

Esta conjectura deve ser vista mais como um programa de investigação, do que como um problema matemático específico. Muitos dos conceitos são deixados vagos, como o que se entendem por condições iniciais genéricas, modelos de matéria razoáveis ou a regularidade das possíveis extensões. Existe uma extensa literatura, na teoria matemática recente da relatividade geral, que tem abordado precisamente este problema, especificando estes conceitos em casos particulares, de modo a poder dar respostas sob diferentes hipóteses.

De qualquer forma, e dum ponto de vista menos técnico e detalhado, o que torna esta questão absolutamente fascinante é o facto duma resposta

negativa para esta conjectura implicar a quebra de determinismo, a uma escala global, do modelo de gravitação das equações de Einstein.

Agradecimentos: O autor deseja agradecer a F. Mena o convite para a escrita deste artigo, assim como a P. Girão e J. Natário, que amavelmente também se prontificaram a ler uma versão preliminar do manuscrito. As sugestões e correções que todos eles me transmitiram, após a leitura cuidadosa que os três realizaram deste texto, certamente contribuíram para melhorar o resultado final. Este trabalho foi parcialmente suportado por FCT/Portugal, UID/MAT/04459/2013.

Referências

- [1] Y. Choquet-Bruhat, *General Relativity and the Einstein Equations*, Oxford University Press, Oxford, 2009.
- [2] Y. Choquet-Bruhat, “Beginnings of the Cauchy problem”, preprint, (2014). <http://www.arxiv.org/abs/1410.3490>
- [3] Y. Choquet-Bruhat e R. Geroch, “Global aspects of the Cauchy problem in general relativity”, *Commun. Math. Phys.*, Vol. 14, (1969), pp. 329–335.
- [4] D. Christodoulou, *The Formation of Black Holes in General Relativity*, European Mathematical Society Publishing House, Zürich, 2009.
- [5] D. Christodoulou e S. Klainerman *The Global Nonlinear Stability of Minkowski Space*, Princeton University Press, Princeton N.J., 1993.
- [6] M. Dafermos e I. Rodnianski, “Lectures on black holes and linear waves”, *Evolution Equations*, Clay Mathematics Institute Proceedings, Vol. 17, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013, pp. 90–205. <http://www.arxiv.org/abs/0811.0354>
- [7] A. Einstein, “Die Feldgleichungen der Gravitation”, *Preuss. Akad. Wiss. Berl., Sitz. Ber.*, (1915), pp. 844–847.
- [8] A. Einstein, “Newtons Mechanik und ihr Einfluss auf die Gestaltung der theoretischen Physik”, *Naturwissenschaftler*, Vol. 15 (1927), pp. 273–276 (trad. ingl. “The World as I See It”, Covici-Friede, 1934).
- [9] G. B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, 2nd Ed., Princeton University Press, Princeton N.J., 1995.

-
- [10] F. G. Friedlander, *The wave equation on a curved space-time*, Cambridge University Press, Cambridge, 1975.
 - [11] Y. Fourès-Bruhat, “Théorèmes d’existence pour certains systèmes d’équations aux dérivées partielles non linéaires”, *Acta Math.*, Vol. 88, (1952), pp. 141–225.
 - [12] L. Hörmander, *Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
 - [13] E. Minguzzi e M. Sánchez, “The causal hierarchy of spacetimes”, *Recent Developments in Pseudo-Riemannian Geometry*, ESI Lectures in Mathematics and Physics, European Mathematical Society Publishing House, Zürich, 2008, Eds. D.V. Alekseevsky, H. Baum, pp. 299–358.
 - [14] A. Rendall, *Partial Differential Equations in General Relativity*, Oxford University Press, Oxford, 2008.
 - [15] H. Ringström, “Non-linear wave equations”, Course Notes, KTH, 2005. <http://www.math.kth.se/~hansr/nlw.pdf>
 - [16] H. Ringström, *The Cauchy Problem in General Relativity*, ESI Lectures in Mathematics and Physics, European Mathematical Society Publishing House, Zürich, 2009.
 - [17] H. Ringström, “Origins and development of the Cauchy problem in general relativity”, *Class. Quantum Grav.*, Vol. 32, (2015), pp. 141–225.
 - [18] J. Sbierski, “On the Existence of a Maximal Cauchy Development for the Einstein Equations: a Dezornification”, *Ann. Henri Poincaré*, DOI 10.1007/s00023-015-0401-5, (2015), 29 pgs.
 - [19] S. Selberg, “Math 632 - Partial Differential Equations”, Lecture Notes, Johns-Hopkins University, 2001. <http://www.math.ntnu.no/~sselberg/HopkinsLectures.pdf>
 - [20] C. Sogge, *Lectures on Non-Linear Wave Equations*, 2nd Ed., International Press, Boston, 2008.