

RELATIVIDADE E SINGULARIDADES – UMA BREVE INTRODUÇÃO PARA MATEMÁTICOS

José Natário

Instituto Superior Técnico
Av. Rovisco Pais
1049-001 Lisboa, Portugal
e-mail: jnatar@math.ist.utl.pt

Resumo: Apresentamos as ideias principais da Relatividade Geral e da Geometria Lorentziana, incluindo uma prova do caso mais simples dos famosos Teoremas de Singularidade de Hawking e Penrose. Assume-se que o leitor está familiarizado com Geometria Riemanniana e Topologia Geral.

Abstract We summarize the main ideas of General Relativity and Lorentzian Geometry, leading to a proof of the simplest of the celebrated Hawking-Penrose Singularity Theorems. The reader is assumed to be familiar with Riemannian Geometry and point set Topology.

palavras-chave: Relatividade Geral; Geometria Lorentziana; causalidade; hiperbolicidade global; ponto conjugado; geodésica maximizante; Teorema de Singularidade.

keywords: General Relativity; Lorentzian Geometry; causality; global hyperbolicity; conjugate point; maximizing geodesic; Singularity Theorem.

Introdução

Historicamente, muito do desenvolvimento da Geometria Riemanniana foi incentivado pela Relatividade Geral. Esta teoria modela o espaço-tempo como uma variedade Lorentziana, análoga a uma variedade Riemanniana excepto que a métrica positiva definida é substituída por uma métrica com assinatura $(-, +, \dots, +)$. Não só é a Geometria Lorentziana similar à Geometria Riemanniana em muitos aspectos como também as variedades Riemannianas surgem naturalmente como subvariedades de variedades Lorentzianas. Considerações físicas dão então origem a conjecturas em Geometria Riemanniana: exemplos recentes de resultados inspirados por tais conjecturas incluem o Teorema da Massa Positiva (Schoen e Yau [16, 17]) e a Desigualdade de Penrose (Huisken and Ilmanen [6], Bray [2]).

Por outro lado, o esforço envolvido em aprender Geometria Lorentziana é mínimo para quem sabe Geometria Riemanniana. Parece portanto

estranho que muitos matemáticos (mesmo géometras) escolham não o fazer. Isto pode ser em parte devido ao facto de que a maioria das introduções à Relatividade Geral começam por desenvolver as ferramentas de Geometria Diferencial necessárias, e se focam sobretudo nas implicações físicas da teoria. Um matemático preferiria provavelmente uma introdução mais curta ao tema partindo de um ponto mais avançado, com o foco em ideias matemáticas interessantes. Este artigo pretende fazer uma tal introdução, provando um resultado não trivial – o caso mais simples dos Teoremas de Singularidade de Hawking e Penrose [13, 4, 7]. Estes teoremas afirmam que variedades Lorentzianas fisicamente razoáveis (num sentido matemático preciso) têm que ser singulares (i.e. geodesicamente incompletas). Uma vez que os movimentos de partículas em queda livre são representados por geodésicas, isto tem a interpretação física de que a Relatividade Geral não pode ser uma descrição completa da Natureza.

O artigo está dividido em três secções. A primeira secção contém as ideias básicas da Relatividade Geral e da Geometria Lorentziana: curvas e vectores do tipo tempo, espaço e luz, modelos de matéria, a equação de Einstein e as suas soluções mais simples. A teoria da causalidade é desenvolvida na segunda secção, onde discutimos orientação temporal, futuros e passados cronológicos e causais, estrutura causal local, propriedades de maximização local das geodésicas do tipo tempo (o Paradoxo dos Gémeos), a condição de cronologia, causalidade estável, domínios de dependência e hiperbolicidade global. A terceira secção contém a prova do Teorema de Singularidade. Esta prova possui três ingredientes: o primeiro é que as geodésicas de tipo tempo deixam de maximizar a distância a uma dada hipersuperfície de tempo constante S uma vez atingido um ponto conjugado. O segundo é que, sob uma condição fisicamente razoável (a condição de energia forte), pontos conjugados ocorrem sempre. O terceiro é que uma geodésica maximizante unindo S a um dado ponto p existe sempre numa variedade Lorentziana globalmente hiperbólica. Este é o ponto mais difícil de provar (e matematicamente mais interessante); a prova consiste em mostrar que o conjunto das curvas do tipo tempo unindo S a p com a métrica de Hausdorff é um espaço compacto no qual o funcional comprimento é semicontínuo superior.

Assumimos que o leitor está familiarizado com Geometria Riemanniana elementar (ver [3]) e Topologia Geral (ver [10]). O leitor cujo interesse seja desperto por esta curta introdução pode querer avançar para um dos muitos textos excelentes sobre Relatividade Geral, desde o introdutório [15] ao mais avançado [18] ao enciclopédico [9] ou aos mais matemáticos [1, 12].

A causalidade e os Teoremas de Singularidade são tratados com mais detalhe em [14, 5, 11].

1 Relatividade Geral e Geometria Lorentziana

A Relatividade Geral é a teoria física do espaço, tempo e gravitação, que modela o espaço-tempo (i.e. o conjunto de todos os acontecimentos físicos) como uma variedade Lorentziana 4-dimensional (espaço-tempos com outras dimensões são também considerados, e.g. na teoria de cordas).

Definição 1.1. *Uma variedade pseudo-Riemanniana n -dimensional é um par (M, g) , onde M é uma variedade diferenciável n -dimensional e g é um campo tensorial-2 simétrico e não degenerado em M (chamado a **métrica**). Uma variedade pseudo-Riemanniana diz-se **Riemanniana** se g tem assinatura $(+\dots+)$, e **Lorentziana** se g tem assinatura $(-\dots+)$.*

Exemplo 1.2. *A variedade Riemanniana mais simples é o espaço Euclidiano, que é \mathbb{R}^n com a métrica Riemanniana*

$$g = dx^1 \otimes dx^1 + \dots + dx^n \otimes dx^n.$$

Analogamente, a variedade Lorentziana mais simples é o espaço de Minkowski, que é \mathbb{R}^{n+1} com a métrica Lorentziana

$$g = -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1 + \dots + dx^n \otimes dx^n.$$

A Geometria Lorentziana é similar à Geometria Riemanniana em muitos aspectos. Por exemplo, o Teorema de Levi-Civita é ainda verdade (a demonstração é idêntica).

Teorema 1.3. (Levi-Civita) *Seja (M, g) uma variedade pseudo-Riemanniana. Então existe uma única conexão afim simétrica compatível com a métrica.*

Em particular, uma variedade Lorentziana vem equipada com geodésicas.

Exemplo 1.4. *A conexão de Levi-Civita do espaço de Minkowski é a conexão trivial, e as suas geodésicas são linhas rectas.*

Por outro lado, o sinal de menos na assinatura introduz muitos aspectos novos na Geometria Lorentziana.

Definição 1.5. *Seja (M, g) uma variedade Lorentziana e $p \in M$. Um vector $v \in T_p M$ diz-se do tipo*

- (i) **tempo** se $\langle v, v \rangle < 0$;
- (ii) **espaço** se $\langle v, v \rangle > 0$;
- (iii) **luz**, ou **nulo**, se $\langle v, v \rangle = 0$.

O **comprimento** de v é $|v| = |\langle v, v \rangle|^{\frac{1}{2}}$. (Como habitualmente, escrevemos $\langle v, w \rangle$ para significar $g(v, w)$).

Uma curva $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ diz-se do tipo tempo, espaço ou nula se o seu vector tangente $\dot{c}(t)$ é do tipo tempo, espaço ou nulo para todo o $t \in I$. Se c é uma geodésica, a natureza do seu vector tangente não pode mudar, uma vez que

$$\frac{d}{dt} \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = 2 \left\langle \frac{D\dot{c}}{dt}, \dot{c} \right\rangle = 0.$$

Exemplo 1.6. Interpretando a coordenada x^0 do espaço de Minkowski como o tempo medido nalgum referencial inercial, vemos que curvas do tipo tempo representam movimentos de partículas tais que

$$\left(\frac{dx^1}{dx^0} \right)^2 + \dots + \left(\frac{dx^n}{dx^0} \right)^2 < 1.$$

Assumindo unidades nas quais 1 é a velocidade máxima para partículas materiais (a velocidade da luz), vemos que as curvas do tipo tempo representam movimentos de partículas materiais. Geodésicas do tipo tempo, por seu turno, representam movimentos em linha recta com velocidade constante, i.e. movimentos de partículas **livres**. Adicionalmente, o comprimento

$$\tau(c) = \int_a^b |\dot{c}| dt$$

de uma curva do tipo tempo $c : [a, b] \rightarrow M$ é interpretado como o **tempo próprio** medido pela partícula entre os acontecimentos $c(a)$ e $c(b)$.

Curvas nulas, por outro lado, representam movimentos à velocidade da luz, e geodésicas nulas representam raios de luz (cf. Figura 1).

A grande inspiração de Einstein foi perceber que para representar o campo gravitacional é necessário considerar variedades Lorentzianas gerais. As interpretações das curvas do tipo tempo e nulas mantêm-se em relação ao espaço de Minkowski, excepto que as geodésicas do tipo tempo representam agora partículas materiais em **queda livre**.

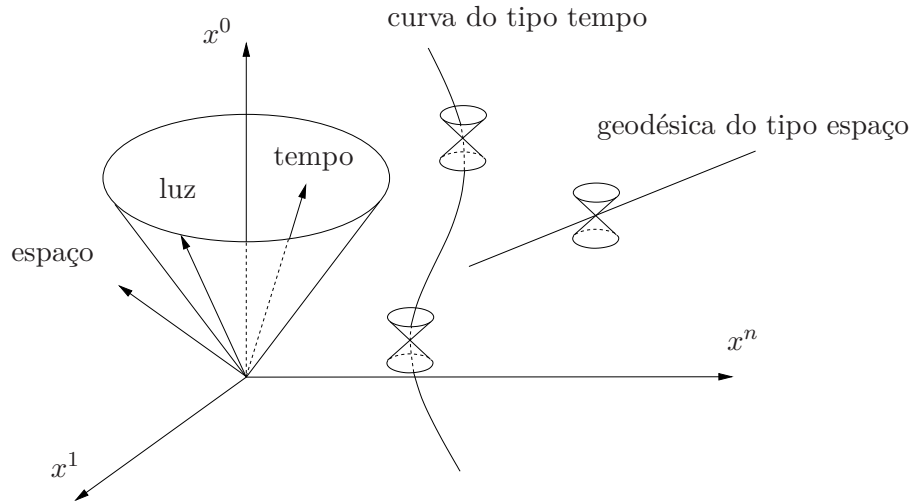


Figura 1: Espaço de Minkowski.

Este primeiro passo, contudo, é apenas a metade fácil do problema. Para completar a teoria é preciso decidir quais as variedades Lorentzianas que representam campos gravitacionais físicos. A resposta custou a Einstein vários anos de trabalho árduo.

Definição 1.7. Diz-se que a variedade Lorentziana (M, g) satisfaz a equação de Einstein se a sua curvatura de Ricci satisfaz

$$Ric - \frac{S}{2}g = T,$$

onde $S = \text{tr Ric}$ é a curvatura escalar e T é o **tensor energia-momento** para um modelo de matéria em (M, g) .

Exemplo 1.8. Em vez de explicar em detalhe o significado de um modelo de matéria, limitamo-nos a enumerar os exemplos mais simples:

- (i) **Vácuo:** Significa tomar $T = 0$.
- (ii) **Constante cosmológica:** Corresponde a fazer

$$T = -\Lambda g$$

para uma certa constante $\Lambda \in \mathbb{R}$.

- (iii) **Fluido perfeito sem pressão:** \hat{E} descrito por uma função densidade de massa de repouso $\rho \in C^\infty(M)$ e um campo de velocidades unitário do tipo tempo $U \in \mathfrak{X}(M)$ (cujas curvas integrais são os movimentos das partículas do fluido), e corresponde ao tensor energia-momento

$$T = \rho U^\sharp \otimes U^\sharp$$

(U^\sharp é a forma-1 associada a U pela métrica).

Exemplo 1.9. Enumeramos agora as soluções (M, g) mais simples da equação de Einstein:

- (i) **Espaço de Minkowski (1907):** \hat{E} claramente em solução de vácuo, descrevendo um universo sem gravidade.
- (ii) **Solução de Schwarzschild (1916):** Qualquer solução de vácuo admitindo $O(n)$ como grupo de isometrias é localmente isométrica a $M = \mathbb{R}^2 \times S^{n-1}$ com a métrica

$$g = - \left(1 - \left(\frac{r_s}{r} \right)^{n-2} \right) dt \otimes dt + \left(1 - \left(\frac{r_s}{r} \right)^{n-2} \right)^{-1} dr \otimes dr + r^2 h$$

para algum $r_s \in \mathbb{R}$, onde h é a métrica redonda em S^{n-1} . Se $r_s > 0$ então r varia no intervalo $]0, r_s[$ (**interior de Schwarzschild**) ou $]r_s, +\infty[$ (**exterior de Schwarzschild**). Estas duas regiões podem ser unidas pela adição de um **horizonte**, onde $r = r_s$, caso em que obtemos um modelo de um **buraco negro**. Note-se que no interior de Schwarzschild r é uma coordenada temporal, e as curvas integrais de $\frac{\partial}{\partial r}$ são geodésicas do tipo tempo **incompletas**, já que não podem ser continuadas para além da singularidade de curvatura em $r = 0$.

Para $n \geq 3$ esta métrica admite órbitas circulares, i.e. geodésicas do tipo tempo com coordenada r constante percorrendo um círculo máximo em S^{n-1} ; estas geodésicas satisfazem

$$\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{(n-2)r_s^{n-2}}{2r^n}$$

(sendo φ a coordenada angular no círculo máximo), que é exactamente a condição para órbitas circulares em torno de uma massa pontual proporcional a r_s^{n-2} em mecânica Newtoniana.

(iii) **Espaço de de Sitter/anti-de Sitter (1917):** o espaço de de Sitter é simplesmente o hiperbolóide $(n + 1)$ -dimensional

$$-(x^0)^2 + (x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = \alpha^2$$

no espaço de Minkowski $(n + 2)$ -dimensional, com a métrica induzida. Note-se que isto é o análogo da esfera Euclidiana, e é de facto um espaço de curvatura constante. (Analogamente, invertendo o sinal de α^2 obtemos duas cópias do espaço hiperbólico $(n + 1)$ -dimensional de raio α). O espaço de de Sitter é uma solução da equação de Einstein com constante cosmológica

$$\Lambda = \frac{n(n - 1)}{2\alpha^2}.$$

A métrica induzida pode ser escrita na forma

$$g = \alpha^2 \left(-dt \otimes dt + \cosh^2 t h \right),$$

onde $x^0 = \alpha \sinh t$ e h é a métrica redonda em S^n . Portanto, podemos pensar no espaço de de Sitter como um universo esférico que se contrai até um raio mínimo α e depois se expande a um ritmo exponencial. Esta repulsão cósmica é devida à constante cosmológica positiva.

O espaço de anti-de Sitter é o revestimento universal do hiperbolóide $(n + 1)$ -dimensional

$$(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 - (x^{n+1})^2 - (x^{n+2})^2 = -\alpha^2$$

em \mathbb{R}^{n+2} com a métrica pseudo-Riemanniana

$$dx^1 \otimes dx^1 + \dots + dx^n \otimes dx^n - dx^{n+1} \otimes dx^{n+1} - dx^{n+2} \otimes dx^{n+2},$$

e é uma solução da equação de Einstein com constante cosmológica

$$\Lambda = -\frac{n(n - 1)}{2\alpha^2}$$

(sendo novamente um espaço de curvatura constante). A métrica induzida pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} g &= \alpha^2 \left(-\cosh^2 \xi dt \otimes dt + d\xi \otimes d\xi + \sinh^2 \xi h \right) \\ &= \frac{\alpha^2}{\cos^2 x} \left(-dt \otimes dt + dx \otimes dx + \sin^2 x h \right), \end{aligned}$$

onde $(t, \xi) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$ são definidos por

$$\begin{cases} x^{n+1} = \alpha \cosh \xi \cos t \\ x^{n+2} = \alpha \cosh \xi \sin t \end{cases},$$

$x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ satisfaz $\cos x = \frac{1}{\cosh \xi}$, e h é a métrica redonda em S^{n-1} . Portanto, podemos pensar no espaço de anti-de Sitter como um universo estático cujas secções espaciais são espaços hiperbólicos (logo, conformes a hemisférios).

(iv) **Modelos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (1922):**

Se (Σ, h) é uma variedade Riemanniana n -dimensional de curvatura constante $k = -1, 0, 1$ (i.e. espaço hiperbólico, espaço Euclidiano, S^n , ou quocientes destes por grupos discretos de isometrias) então $(\mathbb{R} \times \Sigma, -dt \otimes dt + a^2(t)h)$ é uma solução da equação de Einstein (representando um universo em expansão ou contracção) para um fluido perfeito com campo de velocidades $U = \frac{\partial}{\partial t}$ e densidade de massa de repouso

$$\rho = \frac{n(n-1)\alpha}{a^n},$$

onde a função $a(t)$ satisfaz a EDO de primeira ordem

$$\frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{\alpha}{a^{n-2}} = -\frac{k}{2}$$

(para alguma constante $\alpha \in \mathbb{R}$). Note-se que esta é a equação de conservação de energia para uma partícula no potencial

$$V(a) = -\frac{\alpha}{a^{n-2}}.$$

Portanto, se $\alpha > 0 \Leftrightarrow \rho > 0$ então $a(t)$ explode em tempo finito, correspondendo a uma singularidade de curvatura (**Big Bang** ou **Big Crunch**). Neste caso, as geodésicas do tipo tempo dadas pelas curvas integrais de $\frac{\partial}{\partial t}$ são **incompletas**.

Observação 1.10. Seja (M, g) uma variedade Lorentziana $(n+1)$ -dimensional. Para $n = 1$ temos a identidade

$$\text{Ric} - \frac{S}{2}g = 0,$$

e portanto **qualquer** variedade Lorentziana bidimensional é uma solução de vácuo da equação de Einstein (e vácuo é o único modelo de matéria possível nesta dimensão).

Como é o caso com quase todas as equações fundamentais da Física, a equação de Einstein pode ser derivada de um princípio variacional. Por exemplo, variedades Lorentzianas satisfazendo a equação de Einstein no vácuo são pontos críticos da **acção de Einstein-Hilbert**

$$\mathcal{A}[g] = \int_M S.$$

O facto de que qualquer variedade Lorentziana bidimensional é uma solução de vácuo da equação de Einstein pode então ser convertido numa demonstração do Teorema de Gauss-Bonnet.

Se $n \geq 2$, o traço da equação de Einstein fornece

$$S = -\frac{2 \operatorname{tr} T}{n-1},$$

e, portanto, a equação de Einstein pode ser reescrita na forma

$$\operatorname{Ric} = T - \frac{\operatorname{tr} T}{n-1}g.$$

Em particular, qualquer solução da equação de Einstein tem que ser Ricci-plana nos pontos onde $T = 0$. Isto significa que não existe campo gravitacional (i.e. curvatura) no vácuo para $n = 2$.

2 Causalidade

Discutiremos agora as propriedades causais das variedades Lorentzianas, um tópico que não possui paralelo em Geometria Riemanniana.

Definição 2.1. *Seja (M, g) uma variedade Lorentziana e $p \in M$. Dois vectores do tipo tempo $v, w \in T_p M$ dizem-se ter a mesma **orientação temporal** (resp. *oposta*) se $\langle v, w \rangle < 0$ (resp. $\langle v, w \rangle > 0$).*

Note-se que $\langle v, w \rangle = 0$ não pode ocorrer para vectores do tipo tempo.

Definição 2.2. *Uma variedade Lorentziana (M, g) diz-se **temporalmente orientável** se existe um campo vectorial do tipo tempo (portanto sem zeros) $T \in \mathfrak{X}(M)$.*

Isto significa que podemos orientar temporalmente de forma consistente todos os espaços tangentes $T_p M$. Se (M, g) é conexa e temporalmente orientável, então possui exactamente duas orientações temporais: dois campos

vectoriais do tipo tempo $T, U \in \mathfrak{X}(M)$ definem a mesma orientação temporal se e só se $\langle T, U \rangle < 0$. Vectores do tipo tempo $v \in T_p M$ com a mesma orientação temporal que T_p dizem-se **futuros** para a orientação temporal determinada por T . Isto estende-se facilmente a vectores nulos diferentes de zero.

Exemplo 2.3. *A banda de Möbius $\mathbb{R} \times [0, 1]/\sim$, onde \sim é a relação de equivalência $(t, 0) \sim (-t, 1)$, admite a métrica Lorentziana temporalmente não orientável*

$$g = -dt \otimes dt + dx \otimes dx,$$

bem como a métrica Lorentziana temporalmente orientável $h = -g$.

A demonstração usual da existência de um revestimento duplo orientável para uma variedade não orientável pode ser facilmente adaptada para provar

Proposição 2.4. *Qualquer variedade Lorentziana temporalmente não orientável (M, g) possui um revestimento duplo temporalmente orientável, i.e. uma variedade Lorentziana temporalmente orientável $(\overline{M}, \overline{g})$ e uma isometria local $\pi : \overline{M} \rightarrow M$ tal que cada ponto em M possui duas pré-imagens.*

Uma variedade Lorentziana conexa temporalmente orientável admite um campo vectorial sem zeros, e portanto ou não é compacta ou possui característica de Euler zero. O mesmo é verdade para uma variedade Lorentziana temporalmente não orientável, uma vez que tem que ser verdade para o seu revestimento duplo temporalmente orientável. Por outro lado, se uma variedade diferenciável conexa M não é compacta ou possui característica de Euler zero então admite um campo vectorial sem zeros T , que podemos assumir de comprimento unitário para alguma métrica Riemanniana h em M . É então fácil verificar que $g = -2T^\sharp \otimes T^\sharp + h$ é uma métrica Lorentziana em M . Por outras palavras:

Proposição 2.5. *Uma variedade diferenciável conexa M admite uma métrica Lorentziana se e só se não é compacta ou possui característica de Euler zero.*

Definição 2.6. *Seja (M, g) uma variedade Lorentziana temporalmente orientada.*

- (i) *Uma curva do tipo tempo $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ diz-se **futura** se \dot{c} é futuro.*
- (ii) *O **futuro cronológico** de $p \in M$ é o conjunto $I^+(p)$ de todos os pontos a que p pode ser unido por uma curva do tipo tempo futura.*

(iii) Uma **curva causal futura** é uma curva $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ tal que \dot{c} é do tipo tempo ou nulo e futuro (se diferente de zero).

(iv) O **futuro causal** de $p \in M$ é o conjunto $J^+(p)$ de todos os pontos a que p pode ser unido por uma curva causal futura.

Podemos fazer definições análogas substituindo “futuro” por “passado”. Em geral, os futuros e passados cronológicos e causais podem ser conjuntos bastante complicados, devido a características globais. Localmente, contudo, as propriedades causais são similares às do espaço de Minkowski. Mais precisamente, temos as seguintes propriedades:

Proposição 2.7. *Seja (M, g) uma variedade Lorentziana temporalmente orientada. Então cada ponto $p_0 \in M$ possui uma vizinhança aberta $V \subset M$ tal que a variedade Lorentziana (V, g) satisfaz:*

1. Se $p, q \in V$ então existe uma única geodésica unindo p a q (i.e. V é **geodesicamente convexa**);
2. $q \in I^+(p)$ sse existe uma geodésica do tipo tempo futura unindo p a q ;
3. $J^+(p) = \overline{I^+(p)}$;
4. $q \in J^+(p)$ sse existe uma geodésica do tipo tempo ou nula futura unindo p a q .

Demonstração. A existência de vizinhanças geodesicamente convexas verifica-se para qualquer conexão afim (cf. [8]). Além disso, podemos assumir que tais vizinhanças são **totalmente normais**, i.e. vizinhanças normais de cada um dos seus pontos.

Para provar a afirmação (2), começamos por notar que se existe uma geodésica do tipo tempo futura unindo p a q então é óbvio que $q \in I^+(p)$. Suponhamos agora que $q \in I^+(p)$; então existe uma curva do tipo tempo futura $c : [0, 1] \rightarrow V$ tal que $c(0) = p$ e $c(1) = q$. Sejam (x^0, x^1, \dots, x^n) coordenadas normais, dadas pela parametrização

$$\varphi(x^0, x^1, \dots, x^n) = \exp_p(x^0 E_0 + x^1 E_1 + \dots + x^n E_n),$$

onde $\{E_0, E_1, \dots, E_n\}$ é uma base ortonormal de $T_p M$ (com E_0 do tipo tempo futuro). Estas coordenadas são globais em V , uma vez que V é totalmente normal. Definindo

$$\begin{aligned} W_p(q) &:= -(x^0(q))^2 + (x^1(q))^2 + \dots + (x^n(q))^2 \\ &= \sum_{\mu, \nu=0}^n \eta_{\mu\nu} x^\mu(q) x^\nu(q), \end{aligned}$$

com $(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$, temos que mostrar que $W_p(q) < 0$. Seja $W_p(t) := W_p(c(t))$. Uma vez que $x^\mu(p) = 0$ ($\mu = 0, 1, \dots, n$), temos $W_p(0) = 0$. Fazendo $x^\mu(t) = x^\mu(c(t))$, temos

$$\begin{aligned}\dot{W}_p(t) &= 2 \sum_{\mu, \nu=0}^n \eta_{\mu\nu} x^\mu(t) \dot{x}^\nu(t); \\ \ddot{W}_p(t) &= 2 \sum_{\mu, \nu=0}^n \eta_{\mu\nu} x^\mu(t) \ddot{x}^\nu(t) + 2 \sum_{\mu, \nu=0}^n \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu(t) \dot{x}^\nu(t),\end{aligned}$$

e conseqüentemente (recorde-se que $(d \exp_p)_p = \text{id}$)

$$\begin{aligned}\dot{W}_p(0) &= 0; \\ \ddot{W}_p(0) &= 2 \langle \dot{c}(0), \dot{c}(0) \rangle < 0.\end{aligned}$$

Portanto existe $\varepsilon > 0$ tal que $W_p(t) < 0$ para $t \in (0, \varepsilon)$.

De forma análoga ao que se faz em Geometria Riemanniana, pode mostrar-se que o campo vectorial unitário tangente às geodésicas do tipo tempo que passam por p é

$$X = -\text{grad}(-W_p)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(-W_p)^{-\frac{1}{2}} \text{grad} W_p$$

(**Lema de Gauss**), onde o gradiente de uma função é definido como em Geometria Riemanniana (note-se no entanto que em Geometria Lorentziana uma função diferenciável f **decresce** ao longo da direcção de $\text{grad} f$ se $\text{grad} f$ é do tipo tempo). Conseqüentemente, $\text{grad} W_p$ é tangente às geodésicas do tipo tempo que passam por p , sendo futuro em geodésicas do tipo tempo futuras.

Suponhamos que $W_p(t) < 0$. Então

$$\dot{W}(t) = \langle (\text{grad} W_p)_{c(t)}, \dot{c}(t) \rangle < 0,$$

uma vez que tanto $(\text{grad} W_p)_{c(t)}$ como $\dot{c}(t)$ são do tipo tempo futuros. Concluimos que devemos ter $W_p(t) < 0$ para todo o $t \in [0, 1]$. Em particular, $W_p(q) = W_p(1) < 0$, e portanto existe uma geodésica do tipo tempo futura unindo p a q .

A afirmação (3) pode ser provada usando as coordenadas normais globais (x^0, x^1, \dots, x^n) de V para aproximar curvas causais por curvas do tipo tempo. A afirmação (4) é então óbvia do facto que \exp_p é um difeomorfismo sobre V . \square

Uma aplicação simples da Proposição 2.7 é a prova da

Proposição 2.8. *Seja (M, g) uma variedade Lorentziana temporalmente orientada e $p \in M$. Então:*

- (i) *Se $q \in I^+(p)$ e $r \in I^+(q)$ então $r \in I^+(p)$;*
- (ii) *Se $q \in J^+(p)$ e $r \in J^+(q)$ então $r \in J^+(p)$;*
- (iii) *$I^+(p)$ é um conjunto aberto.*

Em Geometria Lorentziana não existem curvas de comprimento mínimo, uma vez que dois pontos na mesma componente conexa podem ser unidos por curvas nulas seccionalmente C^∞ . Contudo, existem curvas de comprimento **máximo**, que são geodésicas do tipo tempo. Mais precisamente:

Proposição 2.9. (Paradoxo dos Gémeos) *Seja (M, g) uma variedade Lorentziana temporalmente orientada e $p_0 \in M$. Então existe uma vizinhança geodesicamente convexa $V \subset M$ de p_0 tal que (V, g) satisfaz a seguinte propriedade: se $q \in I^+(p)$, c é a geodésica do tipo tempo unindo p a q e γ é uma curva do tipo tempo qualquer unindo p a q , então $\tau(\gamma) \leq \tau(c)$, com igualdade sse γ é uma reparametrização de c .*

Demonstração. Escolha-se V como na prova da Proposição 2.7. Qualquer curva do tipo tempo $\gamma : [0, 1] \rightarrow V$ satisfazendo $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ pode ser escrita como

$$\gamma(t) = \exp_p(r(t)n(t)),$$

para $t \in [0, 1]$, onde $r(t) \geq 0$ e $\langle n(t), n(t) \rangle = -1$. Temos

$$\dot{\gamma}(t) = (\exp_p)_* (\dot{r}(t)n(t) + r(t)\dot{n}(t)),$$

onde $(\exp_p)_*$ designa a derivada da aplicação exponencial. Uma vez que $\langle n(t), n(t) \rangle = -1$, temos $\langle \dot{n}(t), n(t) \rangle = 0$, e conseqüentemente $\dot{n}(t)$ é tangente às hipersuperfícies de nível da função $v \mapsto \langle v, v \rangle$. Concluimos que

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{r}(t)X_{\gamma(t)} + Y(t),$$

onde X é o campo vectorial unitário tangente às geodésicas do tipo tempo que passam por p e $Y(t) = r(t)(\exp_p)_*\dot{n}(t)$ é tangente às hipersuperfícies de

nível de W_p (portanto ortogonal a $X_{\gamma(t)}$). Consequentemente,

$$\begin{aligned}\tau(\gamma) &= \int_0^1 \left| \langle \dot{r}(t)X_{\gamma(t)} + Y(t), \dot{r}(t)X_{\gamma(t)} + Y(t) \rangle \right|^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_0^1 \left(\dot{r}(t)^2 - |Y(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &\leq \int_0^1 \dot{r}(t) dt = r(1) = \tau(c),\end{aligned}$$

(onde usámos os factos de que $\dot{r}(t) > 0$ para todo o $t \in [0, 1]$, uma vez que \dot{c} é futuro, e $\tau(c) = r(1)$, porque $q = \exp_p(r(1)n(1))$. É claro que $\tau(\gamma) = \tau(c)$ sse $|Y(t)| \equiv 0 \Leftrightarrow Y(t) \equiv 0$ ($Y(t)$ é do tipo espaço) para todo o $t \in [0, 1]$, implicando que n é constante. Neste caso, $\gamma(t) = \exp_p(r(t)n)$ é, a menos de reparametrização, a geodésica que passa por p com condição inicial $n \in T_pM$. \square

Observação 2.10. *A Proposição 2.9 pode ser interpretada da seguinte forma: se dois observadores (e.g. dois gémeos) se encontram num dado acontecimento, se separam, e se reencontram num acontecimento posterior, então o gémeo em queda livre mede sempre mais tempo entre os dois encontros.*

Para aplicações físicas, é importante exigir que as variedades Lorentzianas satisfaçam condições de causalidade razoáveis. A condição deste tipo mais simples exclui viagens no tempo, i.e. a possibilidade de uma partícula regressar a um acontecimento na sua história passada.

Definição 2.11. *Uma variedade Lorentziana (M, g) satisfaz a **condição de cronologia** se não contém curvas do tipo tempo fechadas.*

Esta condição é violada por variedades Lorentzianas compactas:

Proposição 2.12. *Qualquer variedade Lorentziana compacta (M, g) contém curvas do tipo tempo fechadas.*

Demonstração. Passando se necessário ao revestimento temporalmente orientável duplo, podemos assumir que (M, g) é temporalmente orientada. É fácil verificar que $\{I^+(p)\}_{p \in M}$ é uma cobertura aberta de M . Se M é compacta, podemos extrair uma subcobertura finita $\{I^+(p_1), \dots, I^+(p_N)\}$. Se $p_1 \in I^+(p_i)$ para $i \neq 1$ então $I^+(p_1) \subset I^+(p_i)$, e podemos excluir $I^+(p_1)$ da subcobertura. Portanto, podemos assumir sem perda de generalidade que $p_1 \in I^+(p_1)$, pelo que existe uma curva do tipo tempo fechada que começa e acaba em p_1 . \square

Uma restrição mais forte ao comportamento causal de uma variedade Lorentziana é a seguinte:

Definição 2.13. *Uma variedade Lorentziana (M, g) diz-se **estavelmente causal** se admite uma **função tempo global**, i.e. uma função diferenciável $t : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\text{grad}(t)$ é do tipo tempo.*

Em particular, uma variedade Lorentziana estavelmente causal é temporalmente orientável. Escolhemos a orientação temporal definida por $-\text{grad}(t)$, de forma que t aumenta ao longo das curvas do tipo tempo futuras. Note-se que isto implica a não existência de curvas do tipo tempo fechadas, i.e. qualquer variedade Lorentziana estavelmente causal satisfaz a condição de cronologia. De facto, qualquer pequena perturbação de uma variedade Lorentziana causalmente estável ainda satisfaz a condição de cronologia.

Definição 2.14. *Seja (M, g) uma variedade Lorentziana temporalmente orientada.*

- (i) *Uma curva causal futura $c :]a, b[\rightarrow M$ (possivelmente com $a = -\infty$ ou $b = +\infty$) diz-se **inextensível para o futuro** se $\lim_{t \rightarrow b} c(t)$ não existe.*
- (ii) *O **domínio de dependência passado** de $S \subset M$ é o conjunto $D^-(S)$ de todos os pontos $p \in M$ tais que qualquer curva causal inextensível para o futuro passando por p intersecta S .*

Podemos fazer definições análogas substituindo “futuro” por “passado” e vice-versa. O **domínio de dependência** de S é simplesmente o conjunto $D(S) = D^+(S) \cup D^-(S)$.

Definição 2.15. *Uma variedade Lorentziana (M, g) diz-se **globalmente hiperbólica** se é estavelmente causal e existe uma função tempo $t : M \rightarrow \mathbb{R}$ cujas hipersuperfícies de nível $S_a = t^{-1}(a)$ são **hipersuperfícies de Cauchy**, i.e. satisfazem $D(S_a) = M$.*

Exemplo 2.16. *O conjunto aberto*

$$U = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \neq 0 \text{ ou } x < 0\}$$

com a métrica de Minkowski

$$g = -dt \otimes dt + dx \otimes dx$$

é uma variedade Lorentziana estavelmente causal (a coordenada $t : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função tempo global) que não é globalmente hiperbólica (cf. Figura 2). Note-se que $J^+(-1, 0)$ não é fechado. Além disso, o supremo dos comprimentos de curvas do tipo tempo unindo $(-1, 0)$ a $(1, 0)$ é claramente 2, mas não é realizado por nenhuma curva do tipo tempo.

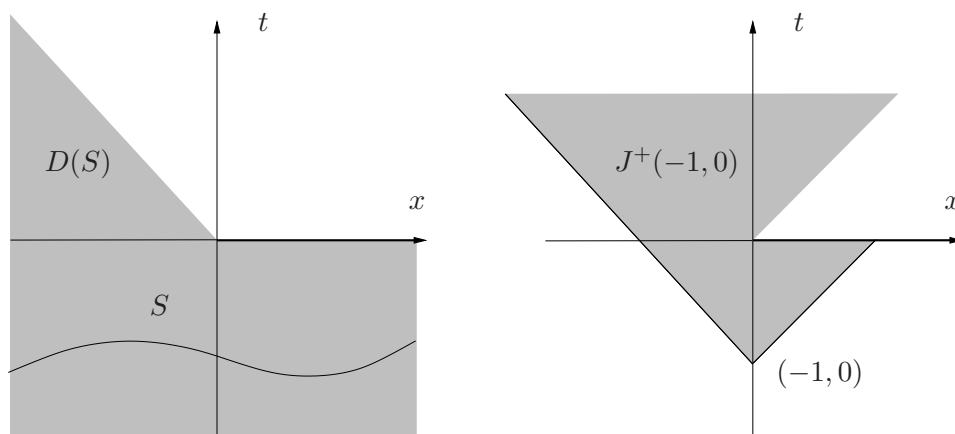


Figura 2: O conjunto aberto U não é globalmente hiperbólico, e o futuro causal de $(-1, 0)$ não é fechado.

3 Teorema de Singularidade

Como vimos no Exemplo 1.9, tanto a solução de Schwarzschild como os modelos cosmológicos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker possuem singularidades, para além das quais as geodésicas do tipo tempo não podem ser continuadas.

Definição 3.1. *Uma variedade Lorentziana (M, g) diz-se **singular** se não é geodesicamente completa.*

Poder-se-ia pensar que os exemplos acima são singulares devido ao seu elevado grau de simetria, e que variedades Lorentzianas mais realistas seriam genericamente não singulares. Mostraremos que este não é o caso: qualquer perturbação suficientemente pequena destas soluções é ainda singular.

A questão da completude geodésica das variedades Riemannianas é respondida pelo Teorema de Hopf-Rinow. Infelizmente, este teorema não é vá-

lido em Geometria Lorentziana (essencialmente porque não é possível usar a métrica para definir uma função distância).

Exemplo 3.2.

(i) **Toro de Clifton-Pohl:** *Considere-se a métrica Lorentziana*

$$\bar{g} = \frac{1}{u^2 + v^2}(du \otimes dv + dv \otimes du)$$

em $\bar{M} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. O grupo de Lie discreto \mathbb{Z} age por isometrias em \bar{M} , de forma livre e própria, através de

$$n \cdot (u, v) = (2^n u, 2^n v),$$

determinando uma métrica Lorentziana g em $M = \bar{M}/\mathbb{Z} \cong T^2$. Um cálculo trivial mostra que existem geodésicas nulas satisfazendo $u \equiv 0$ e

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dt} \right) = 0.$$

Uma vez que quase todas as soluções desta EDO explodem em tempo finito, vemos que (M, g) não é geodesicamente completa (apesar de M ser compacta).

(ii) **Espaço de anti-de Sitter bidimensional:** *Apesar de não ser uma solução da equação de Einstein em 2 dimensões, podemos considerar o espaço de anti-de Sitter bidimensional unitário (M, g) , i.e. o revestimento universal da subvariedade de \mathbb{R}^3*

$$\bar{M} = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 - w^2 = 1\}$$

com a métrica Lorentziana \bar{g} induzida pela métrica pseudo-Riemanniana

$$-du \otimes du - dv \otimes dv + dw \otimes dw.$$

Como vimos no Exemplo 1.9, M admite coordenadas globais $(t, x) \in \mathbb{R} \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tais que

$$g = \frac{1}{\cos^2 x}(-dt \otimes dt + dx \otimes dx)$$

(note-se o contra-domínio diferente da coordenada x , resultante do facto de que $S^0 = \{-1, 1\}$). Portanto, (M, g) é conforme ao subconjunto aberto $\mathbb{R} \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ do espaço de Minkowski, e as suas propriedades causais são as mesmas. Em particular, (M, g) não é globalmente hiperbólico.

Como é o caso na esfera Euclidiana bidimensional, as geodésicas de $(\overline{M}, \overline{g})$ podem ser obtidas intersectando \overline{M} com planos passando pela origem. Este facto pode ser usado para provar que $(\overline{M}, \overline{g})$, e portanto (M, g) , são geodesicamente completas, e também que as geodésicas do tipo tempo passando pelo ponto p com coordenadas $(0, 0)$ em (M, g) passam pelos pontos com coordenadas $(\pm\pi, 0)$ (cf. Figura 3). Por outro lado, as geodésicas do tipo espaço passando por p são geodésicas do tipo tempo da métrica Lorentziana $-g$, e portanto estão confinadas ao passado e futuro cronológicos de p nesta métrica. Portanto \exp_p não é sobrejectiva, apesar de (M, g) ser geodesicamente completa.

Incidentalmente, se $\varepsilon > 0$ e q é o ponto com coordenadas $(\pi + \varepsilon, 0)$, então existem curvas causais seccionalmente C^∞ unindo p a q com comprimento arbitrariamente grande: tome-se simplesmente uma geodésica nula futura unindo p à recta $x = x_0$, uma geodésica nula passada unindo q à mesma recta, e a porção desta recta entre as duas geodésicas nulas. A curva resultante tem comprimento superior a $\frac{\varepsilon}{\cos(x_0)}$, que pode ser tornado arbitrariamente grande fazendo $x_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Estas curvas podem facilmente ser deformadas em curvas do tipo tempo de comprimento arbitrariamente grande.

Vamos agora mostrar que a incompletude geodésica é uma característica genérica de variedades Lorentzianas satisfazendo a chamada condição de energia forte.

Definição 3.3. Diz-se que uma variedade Lorentziana (M, g) satisfaz a **condição de energia forte** se $\text{Ric}(V, V) \geq 0$ para qualquer campo vectorial do tipo tempo $V \in \mathfrak{X}(M)$.

Se $n \geq 2$, esta condição é equivalente (pela equação de Einstein) a requerer que o tensor energia-momento T satisfaça

$$T(V, V) \geq \frac{\text{tr } T}{n-1} \langle V, V \rangle$$

para qualquer campo vectorial do tipo tempo $V \in \mathfrak{X}(M)$, o que em exemplos concretos costuma ser fisicamente razoável.

Exemplo 3.4. Vejamos o significado da condição de energia forte para cada um dos modelos de matéria no Exemplo 1.8:

- (i) **Vácuo:** Trivialmente satisfeita.
- (ii) **Constante cosmológica:** Equivalente a $\Lambda \leq 0$.

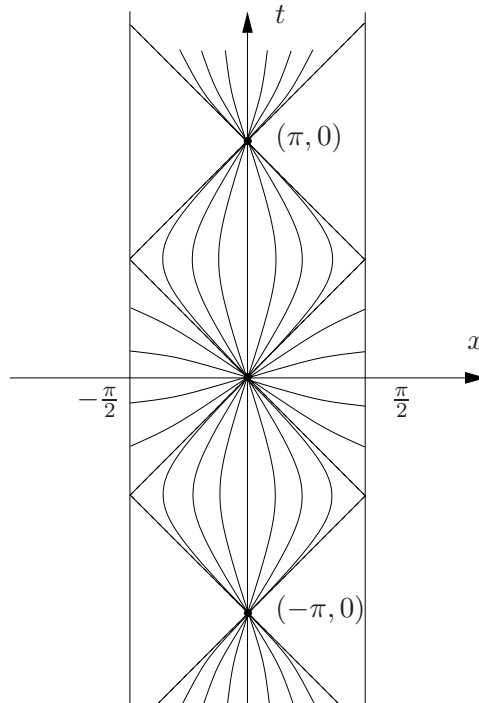


Figura 3: A aplicação exponencial não é sobrejectiva no espaço de anti-de Sitter bidimensional.

(iii) **Fluido perfeito sem pressão:** *Fica*

$$\rho \left(\langle U, V \rangle^2 + \frac{1}{n-1} \langle V, V \rangle \right) \geq 0,$$

ou, como o termo entre parêntesis é não negativo, simplesmente $\rho \geq 0$.

Definição 3.5. *Seja (M, g) uma variedade Lorentziana globalmente hiperbólica e S uma hipersuperfície de Cauchy com normal unitária futura n . Seja c_p a geodésica do tipo tempo com condição inicial n_p para cada ponto $p \in S$. A **aplicação exponencial** $\exp : U \rightarrow M$ (definida numa vizinhança aberta U de $\{0\} \times S \subset \mathbb{R} \times S$) é a aplicação $\exp(t, p) = c_p(t)$. Os valores críticos de \exp dizem-se **pontos conjugados** a S .*

Se a geodésica c_p não possui pontos conjugados entre $c_p(0) = p$ e $c_p(t_0)$, então existe uma vizinhança aberta V de $c_p([0, t_0])$ que pode ser folheada por imagens de geodésicas ortogonais a S . Os vectores tangentes unitários

a estas geodésicas determinam um campo vectorial do tipo tempo unitário $X \in \mathfrak{X}(V)$, que pelo Lema de Gauss satisfaz $X = -\text{grad } t$, onde $t : V \rightarrow \mathbb{R}$ é a função distância ao longo das geodésicas. Portanto $X^\sharp = -dt$, e a derivada covariante $K = \nabla X^\sharp$ é um tensor simétrico, que pela equação geodésica satisfaz $\iota_X \nabla X^\sharp = \nabla_X X^\sharp = 0$.

Definição 3.6. A divergência $\theta = \text{div } X = \text{tr } K$ do campo vectorial X diz-se a **expansão** da família de geodésicas do tipo tempo em V .

Observação 3.7. K é na verdade a segunda forma fundamental da família de hipersuperfícies de t constante, e θ é a taxa de variação logarítmica do seu elemento de volume ao longo de X (como se vê facilmente do Teorema da Divergência).

Proposição 3.8. Seja (M, g) uma variedade Lorentziana globalmente hiperbólica satisfazendo a condição de energia forte, S uma hipersuperfície de Cauchy e $p \in S$ um ponto onde $\theta = \theta_0 < 0$. Se a geodésica c_p pode ser estendida até uma distância $t_0 = -\frac{n}{\theta_0}$ para o futuro de S , então contém pelo menos um ponto conjugado a S .

Demonstração. Suponhamos que não existem pontos conjugados a S em $c_p([0, t_0])$. Então existe uma vizinhança aberta V de $c_p([0, t_0])$ como acima. Um cálculo simples mostra que vale a **equação de Raychaudhuri**

$$X(\theta) + \text{tr } K^2 + \text{Ric}(X, X) = 0.$$

Uma vez que (M, g) satisfaz a condição de energia forte, temos $\text{Ric}(X, X) \geq 0$, e portanto

$$X(\theta) + \text{tr } K^2 \leq 0.$$

A desigualdade de Cauchy-Schwarz implica que

$$(\text{tr } A)^2 \leq n \text{tr}(A^t A),$$

para qualquer matriz A de dimensão $n \times n$. Uma vez que K é simétrico e se anula em X , temos

$$\text{tr } K^2 \geq \frac{1}{n} \theta^2.$$

Pondo $\theta(t) := \theta(c_p(t))$, vemos que

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{n} \theta^2 \leq 0.$$

Integrando esta desigualdade obtemos

$$\frac{1}{\theta} \geq \frac{1}{\theta_0} + \frac{t}{n},$$

e portanto θ tem que explodir num valor de t não superior a $t_0 = -\frac{n}{\theta_0}$. Isto é uma contradição, uma vez que θ é de classe C^∞ em V . \square

Proposição 3.9. *Seja (M, g) uma variedade Lorentziana globalmente hiperbólica, S uma hipersuperfície de Cauchy, $p \in M$ e c uma geodésica do tipo tempo ortogonal a S passando por p . Se existe um ponto conjugado entre S e p então c não maximiza o comprimento (entre todas as curvas do tipo tempo unindo S a p).*

Demonstração. Apresentaremos apenas um esboço da prova, que é similar ao seu análogo em Geometria Riemanniana. Seja q um ponto conjugado ao longo de c entre S e p . Então existe outra geodésica \tilde{c} , ortogonal a S , com (aproximadamente) o mesmo comprimento, que (aproximadamente) intersecta c em q . Seja V uma vizinhança geodesicamente convexa de q , $r \in V$ um ponto ao longo de \tilde{c} entre S e q , e $s \in V$ um ponto ao longo de c entre q e p (cf. Figura 4). Então a curva do tipo tempo seccionalmente C^∞ obtida seguindo \tilde{c} entre S e r , a única geodésica em V entre r e s , e c entre s e p , une S a p e possui comprimento estritamente maior que c (pelo Paradoxo dos Gémeos). Esta curva pode ser facilmente deformada numa curva do tipo tempo de classe C^∞ com comprimento superior ao de c . \square

Observação 3.10. *Tal como em Geometria Riemanniana, os valores críticos de \exp_p dizem-se **conjugados** a p . Essencialmente a mesma prova da Proposição 3.9 mostra que se c é uma geodésica do tipo tempo unindo p a q e existe um ponto conjugado entre p e q então c não maximiza o comprimento (entre todas as curvas do tipo tempo unindo p a q). Um exemplo é a geodésica $x = 0$ unindo os pontos p e q de coordenadas $(0, 0)$ e $(\pi + \varepsilon, 0)$ no espaço de anti-de Sitter bidimensional (cf. Exemplo 3.2(ii)). Um outro exemplo interessante pode ser obtido considerando movimentos circulares com velocidade angular constante na solução de Schwarzschild (não necessariamente geodésicas). Da condição de que o vector tangente seja do tipo tempo unitário,*

$$-\left(1 - \left(\frac{r_s}{r}\right)^{n-2}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = -1,$$

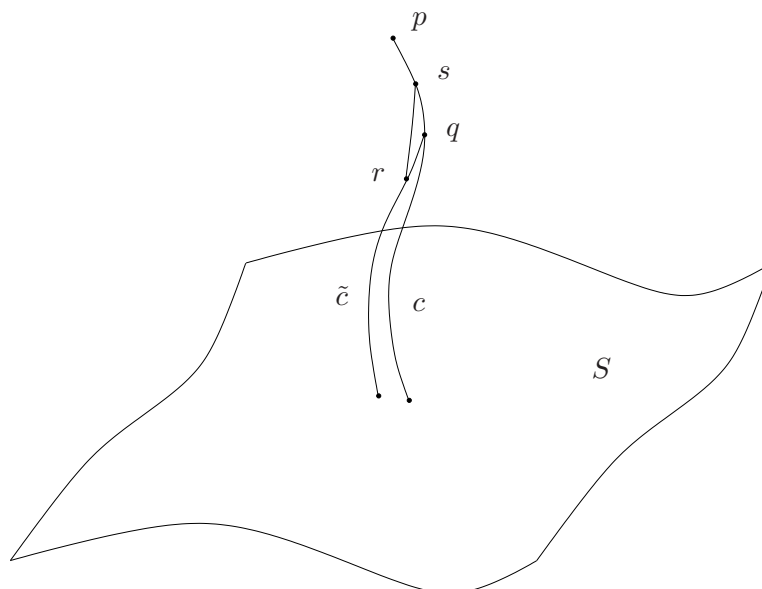


Figura 4: Demonstração da Proposição 3.9.

obtemos facilmente

$$\frac{d\tau}{dt} = \left(\left(1 - \left(\frac{r_s}{r} \right)^{n-2} \right) - r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

e portanto o tempo próprio ao longo de um destes movimentos é

$$\Delta\tau = \left(\left(1 - \left(\frac{r_s}{r} \right)^{n-2} \right) - r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Delta t.$$

Note-se que $\Delta\tau$ decresce à medida que $\left| \frac{d\varphi}{dt} \right|$ aumenta. A órbita circular é obtida fazendo

$$\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{(n-2)r_s^{n-2}}{2r^n}.$$

Considerem-se dois pontos numa órbita circular a mais de meia órbita de distância. Então o movimento circular (não geodésico) na direcção oposta unindo os mesmos pontos possui um valor menor para $\left| \frac{d\varphi}{dt} \right|$, e portanto um valor maior para $\Delta\tau$. Isto seria de esperar, uma vez que o ponto médio da

órbita circular é claramente conjugado ao ponto de partida: todas as geodésicas circulares passando pelo ponto de partida (em planos orbitais diferentes) possuem o mesmo ponto médio.

Proposição 3.11. *Seja (M, g) uma variedade Lorentziana globalmente hiperbólica, S uma hipersuperfície de Cauchy e $p \in D^+(S)$. Então $D^+(S) \cap J^-(p)$ é compacto.*

Demonstração. Defina-se uma **vizinhança simples** $U \subset M$ como um conjunto aberto geodesicamente convexo difeomorfo a uma bola aberta, cuja fronteira é uma subvariedade compacta de um conjunto aberto geodesicamente convexo (portanto ∂U é difeomorfo a S^n e \overline{U} é compacto). É claro que vizinhanças simples formam uma base para a topologia de M . Além disso, é fácil mostrar que qualquer cobertura aberta $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ possui um refinamento contável localmente finito $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ por vizinhanças simples.

Se $A = D^+(S) \cap J^-(p)$ não fosse compacto então existiria uma cobertura aberta contável localmente finita $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de A por vizinhanças simples que não admitiria subcoberturas finitas. Tome-se $q_k \in A \cap U_k$ tal que $q_k \neq q_l$ para $k \neq l$. A sucessão $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ não pode ter pontos de acumulação, dado que cada ponto de M possui uma vizinhança que intersecta apenas finitas vizinhanças simples U_k . Consequentemente, cada vizinhança simples U_k contém apenas finitos pontos da sucessão (uma vez que $\overline{U_k}$ é compacto).

Ponha-se $p_1 = p$. Uma vez que $p_1 \in A$, temos $p_1 \in U_{k_1}$ para algum $k_1 \in \mathbb{N}$. Seja $q_k \notin U_{k_1}$. Dado que $q_k \in J^-(p_1)$, existe uma curva causal futura c_k unindo q_k a p_1 . Esta curva intersecta necessariamente ∂U_{k_1} . Seja $r_{1,k}$ um ponto de intersecção. Como U_{k_1} contém apenas finitos pontos da sucessão $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, existem infinitos pontos de intersecção $r_{1,k}$. Dado que ∂U_{k_1} é compacto, estes vão acumular nalgum ponto $p_2 \in \partial U_{k_1}$ (cf. Figura 5).

Porque $\overline{U_{k_1}}$ está contido num conjunto aberto geodesicamente convexo, $p_2 \in J^-(p_1)$: se $\gamma_{1,k}$ é a única geodésica causal unindo p_1 a $r_{1,k}$, parametrizada pela função tempo global $t : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $S = t^{-1}(0)$, então a subsucessão de $\{\gamma_{1,k}\}$ correspondendo a uma subsucessão convergente de $\{r_{1,k}\}$ convergirá (na topologia C^∞) para uma geodésica causal γ_1 unindo p_1 a p_2 . Uma vez que $t(r_{1,k}) \geq 0$, temos $t(p_2) \geq 0$, e portanto $p_2 \in A$. Dado que $p_2 \notin U_{k_1}$, tem que existir $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $p_2 \in U_{k_2}$.

Uma vez que U_{k_2} contém apenas finitos pontos da sucessão $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, infinitas curvas c_k intersectam ∂U_{k_2} para o passado de $r_{1,k}$. Sejam $r_{2,k}$ os pontos de intersecção. Como ∂U_{k_2} é compacto, $\{r_{2,k}\}$ tem que acumular nalgum ponto $p_3 \in \partial U_{k_2}$. Porque $\overline{U_{k_2}}$ está contido num conjunto aberto geodesicamente convexo, $p_3 \in J^-(p_2)$: se $\gamma_{2,n}$ é a única geodésica causal unindo $r_{1,k}$ a

$r_{2,k}$, parametrizada pela função tempo global, então a subsucessão de $\{\gamma_{2,k}\}$ correspondendo a subsucessões convergentes de $\{r_{1,k}\}$ e $\{r_{2,k}\}$ convergirá para uma geodésica causal unindo p_2 a p_3 . Dado que $J^-(p_2) \subset J^-(p_1)$, $p_2 \in A$.

Iterando o procedimento acima, podemos construir uma sucessão $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de pontos em A satisfazendo $p_i \in U_{n_i}$ com $n_i \neq n_j$ se $i \neq j$, tais que p_i pode ser unido a p_{i+1} por uma geodésica causal γ_i . É claro que γ_i não pode intersectar S , pois $t(p_{i+1}) > t(p_{i+2}) \geq 0$. Por outro lado, a curva causal seccionalmente C^∞ obtida juntando as curvas γ_i pode ser facilmente deformada numa curva causal passada com início em p_1 que não intersecta S . Finalmente, tal curva é inextensível: não pode convergir para nenhum ponto, porque $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ não pode acumular. Mas como $p_1 \in D^+(S)$, esta curva teria que intersectar S . Portanto A tem que ser compacto. \square

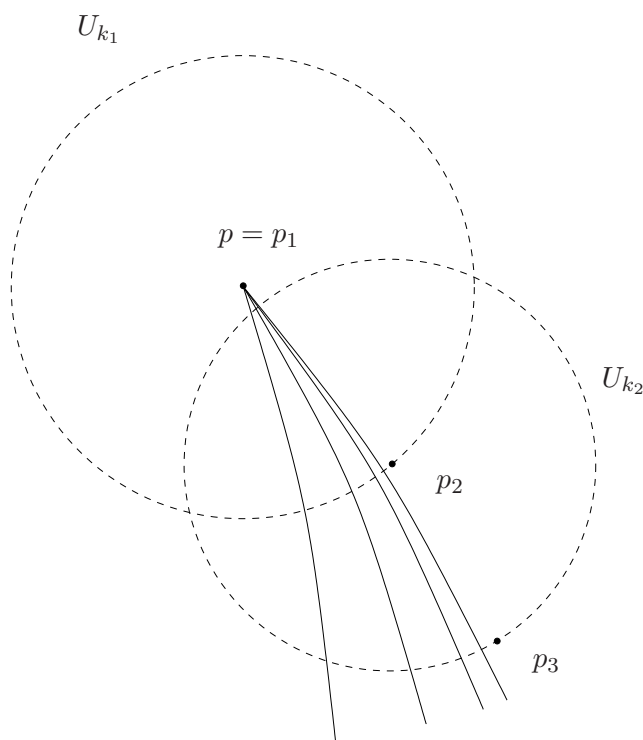


Figura 5: Prova da Proposição 3.11.

Corolário 3.12. *Seja (M, g) uma variedade Lorentziana globalmente hiperbólica e $p, q \in M$. Então:*

- (i) $J^+(p)$ é fechado;
- (ii) $J^+(p) \cap J^-(q)$ é compacto.

A Proposição 3.11 é um ingrediente chave para estabelecer o seguinte resultado fundamental:

Teorema 3.13. *Seja (M, g) uma variedade Lorentziana globalmente hiperbólica com uma hipersuperfície de Cauchy S , e $p \in D^+(S)$. Então, de entre todas as curvas do tipo tempo unindo p a S , existe uma curva do tipo tempo com comprimento máximo. Esta curva é uma geodésica do tipo tempo, ortogonal a S .*

Demonstração. Considere-se o conjunto $T(S, p)$ de todas as curvas do tipo tempo unindo S a p . Uma vez que podemos sempre usar a função tempo global $t : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $S = t^{-1}(0)$ como parâmetro, estas curvas são determinadas pelas suas imagens, que são subconjuntos compactos do conjunto compacto $A = D^+(S) \cap J^-(p)$. Como é bem sabido (cf. [10]), o conjunto $C(A)$ de todos os subconjuntos compactos de A é um espaço métrico compacto para a **métrica de Hausdorff** d_H , definida do seguinte modo: dada uma métrica $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que determine a topologia de M , então

$$d_H(K, L) = \inf\{\varepsilon > 0 : K \subset U_\varepsilon(L) \text{ e } L \subset U_\varepsilon(K)\},$$

onde $U_\varepsilon(K)$ é uma vizinhança- ε de K para a métrica d . Portanto, o fecho $\overline{C(S, p)} = \overline{T(S, p)}$ é um subconjunto compacto de $C(A)$. Não é difícil mostrar que $\overline{C(S, p)}$ pode ser identificado com o conjunto das **curvas contínuas causais** unindo S a p (uma curva contínua $c : [0, t(p)] \rightarrow M$ diz-se **causal** se $c(t_2) \in J^+(c(t_1))$ sempre que $t_2 > t_1$).

A função comprimento $\tau : T(S, p) \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$\tau(c) = \int_0^{t(p)} |\dot{c}(t)| dt.$$

Esta função é **semicontínua superior**, i.e. contínua para a topologia

$$\mathcal{O} = \left\{]-\infty, a[: -\infty \leq a \leq +\infty \right\}$$

de \mathbb{R} . De facto, parametrize-se $c \in T(S, p)$ pelo seu comprimento de arco \mathcal{T} . Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a função \mathcal{T} pode ser estendida à

vizinhança $U_\varepsilon(c)$ de tal forma que as suas hipersuperfícies de nível são do tipo espaço e ortogonais a c , isto é, $-\text{grad } \mathcal{T}$ é do tipo tempo e coincide com \dot{c} em c (cf. Figura 6). Se $\gamma \in T(S, p)$ está na bola aberta $B_\varepsilon(c) \subset C(A)$ para a métrica de Hausdorff d_H então podemos usar \mathcal{T} como parâmetro, obtendo

$$d\mathcal{T}(\dot{\gamma}) = 1 \Leftrightarrow \langle \dot{\gamma}, \text{grad } \mathcal{T} \rangle = 1.$$

Portanto $\dot{\gamma}$ pode ser decomposto na forma

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\langle \text{grad } \mathcal{T}, \text{grad } \mathcal{T} \rangle} \text{grad } \mathcal{T} + X,$$

onde X é do tipo espaço e ortogonal a $\text{grad } \mathcal{T}$, donde

$$|\dot{\gamma}| = \left| \frac{1}{\langle \text{grad } \mathcal{T}, \text{grad } \mathcal{T} \rangle} + \langle X, X \rangle \right|^{\frac{1}{2}}.$$

Dado $\delta > 0$, podemos escolher $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de forma a que

$$-\frac{1}{\langle \text{grad } \mathcal{T}, \text{grad } \mathcal{T} \rangle} < \left(1 + \frac{\delta}{2\tau(c)}\right)^2$$

na vizinhança $U_\varepsilon(c)$ (dado que $\langle \text{grad } \mathcal{T}, \text{grad } \mathcal{T} \rangle = -1$ em c). Temos

$$\tau(\gamma) = \int_0^{t(p)} \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt = \int_0^{t(p)} |\dot{\gamma}| \frac{d\mathcal{T}}{dt} dt = \int_{\mathcal{T}(\gamma \cap S)}^{\tau(c)} |\dot{\gamma}| d\mathcal{T},$$

onde temos que levar em conta que c não é necessariamente ortogonal a S , e portanto o ponto inicial de γ não está necessariamente em $\mathcal{T} = 0$ (cf. Figura 6). Consequentemente,

$$\begin{aligned} \tau(\gamma) &= \int_{\mathcal{T}(\gamma \cap S)}^{\tau(c)} \left| -\frac{1}{\langle \text{grad } \mathcal{T}, \text{grad } \mathcal{T} \rangle} - \langle X, X \rangle \right|^{\frac{1}{2}} d\mathcal{T} \\ &< \int_{\mathcal{T}(\gamma \cap S)}^{\tau(c)} \left(1 + \frac{\delta}{2\tau(c)}\right) d\mathcal{T} = \left(1 + \frac{\delta}{2\tau(c)}\right) (\tau(c) - \mathcal{T}(\gamma \cap S)). \end{aligned}$$

Escolhendo ε suficientemente pequeno de forma que

$$|\mathcal{T}| < \left(\frac{1}{\tau(c)} + \frac{2}{\delta}\right)^{-1}$$

em $S \cap U_\varepsilon(c)$, obtemos $\tau(\gamma) < \tau(c) + \delta$, provando semicontinuidade superior em $T(S, p)$.

Como consequência, a função comprimento pode ser estendida a $C(S, p)$ através de

$$\tau(c) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \{\tau(\gamma) : \gamma \in B_\varepsilon(c) \cap T(S, p)\}$$

(dado que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno o supremo será finito). Além disso, é claro que se $c \in T(S, p)$ então a semicontinuidade superior do comprimento força as duas definições de $\tau(c)$ a coincidirem. A extensão da função comprimento a $C(S, p)$ é trivialmente semicontínua superior: dados $c \in C(S, p)$ e $\delta > 0$, seja $\varepsilon > 0$ tal que $\tau(\gamma) < \tau(c) + \frac{\delta}{2}$ para qualquer $\gamma \in B_{2\varepsilon}(c) \cap T(S, p)$. Então, é claro que $\tau(c') < \tau(c) + \delta$ para qualquer $c' \in B_\varepsilon(c)$.

Finalmente, notamos que os conjuntos compactos de \mathbb{R} para a topologia \mathcal{O} são conjuntos com máximo. Portanto, a função comprimento atinge o máximo nalguma curva $c \in C(S, p)$. Tudo o que falta ver é que o máximo é também atingido numa curva do tipo tempo γ de classe C^∞ . Para tal, cobrimos c com finitas vizinhanças geodesicamente convexas e escolhemos pontos p_1, \dots, p_m em c tais que $p_1 \in S$, $p_m = p$ e a porção de c entre p_{i-1} e p_i está contida numa vizinhança geodesicamente convexa para todo o $i = 2, \dots, m$. É claro que existe uma sucessão $c_k \in T(S, p)$ tal que $c_k \rightarrow c$ e $\tau(c_k) \rightarrow \tau(c)$. Sejam $t_i = t(p_i)$ e $p_{i,k}$ as intersecções de c_k com $t^{-1}(t_i)$. Substitua-se c_k pela curva seccionalmente geodésica γ_k obtida unindo $p_{i-1,k}$ a $p_{i,k}$ na vizinhança geodesicamente convexa correspondente. Então $\tau(\gamma_k) \geq \tau(c_k)$, e portanto $\tau(\gamma_k) \rightarrow \tau(c)$. Uma vez que cada sucessão $p_{i,k}$ converge para p_i , γ_k converge para a curva seccionalmente geodésica γ obtida unindo p_{i-1} a p_i ($i = 2, \dots, m$), e é claro que $\tau(\gamma_k) \rightarrow \tau(\gamma) = \tau(c)$. Portanto γ é um ponto de máximo da função comprimento. Finalmente, notamos que γ tem que ser C^∞ nos pontos p_i , pois de outra forma seria possível aumentar o seu comprimento usando o Paradoxo dos Gémeos. Portanto γ tem que ser uma geodésica do tipo tempo. Usando o Lema de Gauss, é claro que γ tem que ser ortogonal a S , pois de outra forma seria possível aumentar o seu comprimento. \square

Observação 3.14. *Essencialmente a mesma prova pode ser usada para mostrar que se (M, g) é globalmente hiperbólica e $p, q \in M$ com $q \in I^+(p)$, então de entre todas as curvas do tipo tempo unindo p a q existe uma curva do tipo tempo de comprimento máximo, que é uma geodésica do tipo tempo (note-se que as variedades Lorentzianas dos Exemplos 2.16 e 3.2(ii) não são globalmente hiperbólicas). Portanto, de certa forma, hiperbolicidade global é o análogo Lorentziano de completude em Geometria Riemanniana.*

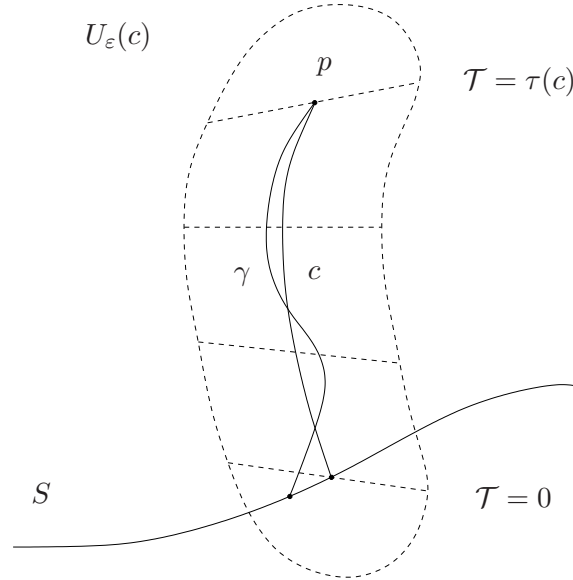


Figura 6: Prova do Teorema 3.13.

Temos agora todos os ingredientes necessários para a prova do Teorema de Singularidade:

Teorema 3.15. *Seja (M, g) uma variedade Lorentziana globalmente hiperbólica satisfazendo a condição de energia forte, e suponhamos que a expansão de uma hipersuperfície de Cauchy S satisfaz $\theta \leq \theta_0 < 0$. Então (M, g) é singular.*

Demonstração. Mostraremos que nenhuma geodésica do tipo tempo futura ortogonal a S pode ser estendida para tempo próprio superior a $\tau_0 = -\frac{n}{\theta_0}$ para o futuro de S . Suponhamos que tal não era verdade. Então existiria uma geodésica do tipo tempo futura c ortogonal a S definida num intervalo $[0, \tau_0 + \varepsilon]$ para algum $\varepsilon > 0$. Seja $p = c(\tau_0 + \varepsilon)$. De acordo com o Teorema 3.13, existiria uma geodésica do tipo tempo γ com comprimento máximo unindo S a p , ortogonal a S . Como $\tau(c) = \tau_0 + \varepsilon$, teríamos necessariamente $\tau(\gamma) \geq \tau_0 + \varepsilon$. A Proposição 3.8 garante que γ possuiria um ponto conjugado a uma distância no máximo τ_0 para o futuro de S , e a Proposição 3.9 afirma que γ cessaria de ser maximizante para lá deste ponto. Portanto chegamos a uma contradição. \square

Observação 3.16. *Deve ser claro que (M, g) é singular se a condição*

$\theta \leq \theta_0 < 0$ numa hipersuperfície de Cauchy S for substituída pela condição $\theta \geq \theta_0 > 0$ em S . Neste caso, nenhuma geodésica do tipo tempo **passada** ortogonal a S pode ser estendida para um tempo próprio superior a $\tau_0 = \frac{n}{\theta_0}$ para o **passado** de S .

Observação 3.17. A prova do Teorema 3.15 não funciona em Geometria Riemanniana, onde as geodésicas são curvas **minimizantes** para o comprimento. Usando ideias similares, podemos provar o seguinte: se (M, g) é uma variedade Riemanniana completa cuja curvatura de Ricci satisfaz $\text{Ric} \geq \varepsilon g$ para algum $\varepsilon > 0$, então M é compacta.

Exemplo 3.18.

1. O Teorema 3.15 não se aplica aos espaços de Minkowski, de Sitter e anti-de Sitter: o primeiro não contém uma hipersuperfície de Cauchy com expansão maior que uma constante positiva, o segundo não satisfaz a condição de energia forte e o terceiro não é globalmente hiperbólico. Aplica-se no entanto ao **universo de Milne**, que é o subconjunto aberto U do espaço de Minkowski definido por

$$x^0 > 0 \quad \text{e} \quad -(x^0)^2 + (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 < 0$$

(cf. Figura 7). É fácil ver que a função

$$\tau(x^0, x^1, \dots, x^n) = \sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - \dots - (x^n)^2}$$

é uma função tempo global em U cujas hipersuperfícies de nível possuem domínio de dependência U e expansão constante positiva $n\tau$ (são, de facto, isométricas a espaços hiperbólicos n -dimensionais de raio τ). Neste caso a incompletude geodésica garantida pelo Teorema 3.15 não é devida a singularidades de curvatura.

2. Os modelos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker são globalmente hiperbólicos, e para $\alpha > 0$ satisfazem a condição de energia forte (dado que $\rho > 0$, cf. Exemplo 1.9). Além disso, facilmente se verifica que a expansão das hipersuperfícies de tempo constante é

$$\theta = \frac{n\dot{a}}{a}.$$

Assuma-se que o modelo se está a expandir no instante t_0 . Então $\theta = \theta_0 = \frac{n\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}$ na hipersuperfície de Cauchy $S = \{t = t_0\}$, e portanto

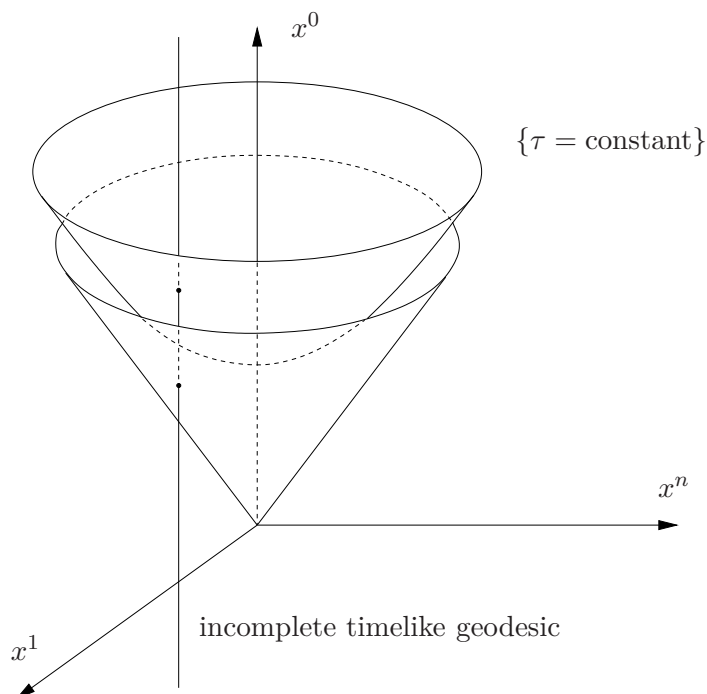


Figura 7: Universo de Milne.

o Teorema 3.15 garante que este modelo é singular para o passado de S (i.e. contém um Big Bang). Além disso, o Teorema 3.15 implica que esta singularidade é genérica: qualquer perturbação suficientemente pequena de um modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker em expansão satisfazendo a condição de energia forte será ainda singular. Em termos gerais, qualquer universo em expansão deve ter começado num Big Bang.

3. A região $\{r < r_s\}$ da solução de Schwarzschild é globalmente hiperbólica, e satisfaz a condição de energia forte (porque $\text{Ric} = 0$). A métrica nesta região pode ser escrita como

$$g = -d\tau \otimes d\tau + \left(\left(\frac{r_s}{r} \right)^{n-2} - 1 \right) dt \otimes dt + r^2 h,$$

onde h é a métrica redonda em S^{n-1} e

$$\tau = \int_r^{r_s} \left(\left(\frac{r_s}{u} \right)^{n-2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} du.$$

Portanto o interior de um buraco negro de Schwarzschild pode ser visto como um cilindro $\mathbb{R} \times S^{n-1}$ cuja forma varia no tempo: à medida que $r \rightarrow 0$, a esfera S^{n-1} contrai-se numa singularidade, ao passo que a direcção da coordenada t se expande. Pode-se mostrar que a expansão da hipersuperfície de Cauchy $S = \{\tau = \tau_0\} = \{r = r_0\}$ é

$$\theta = \left(\left(\frac{r_s}{r_0} \right)^{n-2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{n-1}{r_0} - \frac{n}{2r_0} \left(\frac{r_s}{r_0} \right)^{n-2} \right).$$

Portanto $\theta = \theta_0 < 0$ para r_0 suficientemente pequeno, e o Teorema 3.15 garante então que a solução de Schwarzschild é singular para o futuro de S . Além disso, o Teorema 3.15 implica que esta singularidade é genérica: qualquer perturbação suficientemente pequena da solução de Schwarzschild satisfazendo a condição de energia forte será ainda singular. Em termos gerais, assim que o colapso tenha avançado suficientemente nada pode impedir a formação de uma singularidade.

Referências

- [1] J. Beem, P. Ehrlich e K. Easley, *Global Lorentzian geometry*, Marcel Dekker, New York, 1996.
- [2] H. Bray, “Proof of the Riemannian Penrose inequality using the positive mass theorem”, *J. Diff. Geom.*, Vol. 59, No. 2 (2001), pp. 177-267.
- [3] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, IMPA, Rio de Janeiro, 1988.
- [4] S. Hawking, “The occurrence of singularities in cosmology. III. Causality and singularities”, *Proc. Roy. Soc. Lon. A*, Vol. 300, No. 1461 (1967), pp. 187-201.
- [5] S. Hawking e G. Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

- [6] G. Huisken e T. Ilmanen, “The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality”, *J. Diff. Geom.*, Vol. 59, No. 3 (2001), pp. 353-437.
- [7] S. Hawking e R. Penrose, “The singularities of gravitational collapse and cosmology”, *Proc. Roy. Soc. Lon. A*, Vol. 314, No. 1519 (1970), pp. 529-548.
- [8] S. Kobayashi e K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Vols. I and II, Wiley, New York, 1996.
- [9] C. Misner, K. Thorne e J. A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, New York, 1973.
- [10] J. Munkres, *Topology*, Prentice-Hall, New Jersey, 2000.
- [11] G. Naber, *Spacetime and singularities – an introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [12] B. O’Neill, *Semi-Riemannian geometry*, Academic Press, Massachusetts, 1983.
- [13] R. Penrose, “Gravitational collapse and space-time singularities”, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 14, No. 3 (1965), pp. 57-59.
- [14] R. Penrose, *Techniques of differential topology in relativity*, SIAM, Philadelphia, 1987.
- [15] B. Schutz, *A first course in general relativity*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [16] R. Schoen and S.-T. Yao, “On the proof of the positive mass conjecture in general relativity”, *Comm. Math. Phys.*, Vol. 65, No. 1 (1979), pp. 45-76.
- [17] R. Schoen and S.-T. Yao, “Proof of the positive mass theorem. II”, *Comm. Math. Phys.*, Vol. 79, No. 2 (1981), pp. 231-260.
- [18] R. Wald, *General relativity*, University of Chicago Press, Chicago, 1984.