

SIMETRIAS E SISTEMAS DINÂMICOS EM COSMOLOGIA

Artur Alho

Centro de Análise Matemática, Geometria e Sistemas Dinâmicos
Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa
Av. Rovisco Pais
1049-001 Lisboa, Portugal
e-mail: aalho@math.ist.utl.pt

Resumo: Breve introdução à aplicação da teoria de sistemas dinâmicos nos modelos cosmológicos de Bianchi (especialmente homogêneos) com um fluido perfeito e um campo escalar. Resultados gerais são exemplificados com o modelo simples de Robertson-Walker (especialmente homogêneo e isotrópico) com um fluido perfeito com equação de estado linear e um campo escalar com um potencial constante ou exponencial.

Abstract Brief introduction to the application of the theory of dynamical systems in cosmological Bianchi (spatially homogeneous) models with a perfect-fluid and a scalar-field. General results are exemplified with the simple Robertson-Walker (spatially homogeneous and isotropic) model with a perfect-fluid with linear equation of state and a scalar field with constant or exponential potential.

palavras-chave: Sistemas Dinâmicos; Cosmologia; Auto-Semelhança.

keywords: Dynamical Systems; Cosmology; Self-Similarity.

1 Introdução

Em 1915, há precisamente um século atrás, Albert Einstein introduziu a teoria da relatividade geral, e as *equações de campo de Einstein* que incorporam a teoria clássica do campo relativista com os efeitos da gravidade. Dez anos antes, já Einstein tinha causado um grande impacto na comunidade científica com a sua teoria da relatividade restrita, na qual os antigos postulados Galileanos de tempo e espaço absoluto são abandonados para dar lugar a uma teoria mais complexa onde não existem observadores absolutos. De um ponto de vista matemático, a teoria da relatividade geral é bastante complexa, sendo uma teoria de natureza geométrica, onde o sistema físico é descrito pela estrutura do espaço-tempo. Consequências directas da teoria incluem por exemplo a previsão da existência de buracos negros ou da expansão do universo.

Na teoria Newtoniana da gravidade, o campo gravitacional é descrito pela *equação de Poisson*

$$\Delta \varphi = 4\pi G\rho \quad (1)$$

com a condição fronteira de que o *potencial Newtoniano* φ é zero no infinito. G é a constante gravitacional de Newton, $\rho > 0$ é a densidade de massa da matéria e Δ o operador de Laplace.

Na teoria da Relatividade Geral, o campo gravitacional é descrito por uma forma bilinear denominada métrica \mathbf{g} vivendo naturalmente numa variedade suave conexa quadridimensional \mathcal{M} . A diferença em relação à geometria Riemanniana tradicional deve-se à métrica ter assinatura $(-, +, +, +)$. A forma mais simples da métrica é o análogo do espaço Euclidiano em geometria Riemanniana, nomeadamente o espaço de Minkowski, que é o espaço da relatividade restrita, onde não existe gravidade. Variedades Lorentzianas que representam sistemas físicos são soluções das equações de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2)$$

onde $R_{\mu\nu}$ e $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ são o *tensor de Ricci* e o *escalar de Ricci* da métrica \mathbf{g} e Λ é a constante cosmológica¹. $T_{\mu\nu}$ é um tensor simétrico de grau 2 conhecido como *tensor de energia-momento* e descreve a matéria, sendo uma função dos campos de matéria, e c é a velocidade da luz. Neste artigo usamos a convenção da soma de Einstein, índices gregos tomam os valores $\alpha, \beta, \mu, \dots = 0, 1, 2, 3$, e usaremos unidades de Planck reduzidas $8\pi G = 1 = c$.

Devido à identidade de Bianchi diferencial, o lado esquerdo das equações de campo de Einstein (2) satisfaz a identidade

$$\nabla_\mu \left(R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R + \Lambda \delta^\mu_\nu \right) = 0. \quad (3)$$

com ∇ a derivada covariante da métrica \mathbf{g} . Então (2) implicam que o tensor energia-momento da fonte de matéria satisfaz a lei de conservação

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0. \quad (4)$$

É costume descrever a matéria no universo por um fluido perfeito. Seja \mathbf{u} o vector quadri-velocidade das partículas do fluido, o tensor energia-momento é dado por

$$T_{\mu\nu}^{(m)} = \rho_m u_\mu u_\nu + p_m (g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) \quad (5)$$

¹No caso $\Lambda \neq 0$, a solução maximalmente simétrica não é Minkowski, mas sim a solução de de-Sitter no caso $\Lambda > 0$, e Anti-de-Sitter no caso em que $\Lambda < 0$. Estas soluções são bastante importantes para modelar a expansão acelerada do universo $\Lambda > 0$, e no caso de $\Lambda < 0$, na correspondência Anti-de-Sitter/Teoria do campo conforme (AdS/CFT).

onde $\rho_m > 0$ é a densidade de energia e p_m a pressão do fluido. É também necessário a prescrição de uma equação de estado $p_m = p_m(\rho_m)$. Usualmente, partículas de *poeira* $p_m = 0$ representam galáxias (ou aglomerados de galáxias) num Universo em expansão, e *radiação* $p_m = \frac{1}{3}\rho_m$ é importante no Universo primitivo.

Através de \mathbf{u} define-se o projector nas hipersuperfícies tridimensionais ortogonais à congruência do campo de vectores quadrivelocidade, $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$. Da projecção na direcção paralela e ortogonal a \mathbf{u} , de (4) obtêm-se as *equações de Euler*

$$\nabla_\mu(\rho_m u^\mu) + p_m \nabla_\mu u^\mu = 0, \quad (6a)$$

$$(\rho_m + p_m)u^\mu \nabla_\mu u^\nu + u^\nu u^\mu \nabla_\mu p_m + \nabla^\nu p_m = 0. \quad (6b)$$

As variáveis cinemáticas associadas ao fluido obtêm-se da decomposição irredutível da derivada covariante da 1-forma \mathbf{u}

$$\nabla_\mu u_\nu = \frac{\theta}{3}h_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} - \dot{u}_\mu u_\nu \quad (7)$$

onde $\theta = \nabla_\mu u^\mu$ é o *escalar da expansão*, $\dot{u}_\nu = u^\mu \nabla_\mu u_\nu$ é o *vector quadriaceleração*, $\sigma_{\mu\nu} = \nabla_{(\mu} u_{\nu)} - \frac{\theta}{3}h_{\mu\nu} + \dot{u}_{(\mu} u_{\nu)}$ é o *tensor de cisalhamento* (simétrico e sem traço) e $\omega_{\mu\nu} = \nabla_{[\mu} u_{\nu]} + \dot{u}_{[\mu} u_{\nu]}$ o *tensor de vorticidade* (antissimétrico), com $u^\mu \sigma_{\mu\nu} = 0 = u^\mu \omega_{\mu\nu}$. Se a congruência é irrotacional $\omega_{\mu\nu} = 0$, as hipersuperfícies ortogonais constituem uma folheação do espaço-tempo (\mathcal{M}, g) . Estas quantidades cinemáticas têm uma interpretação física e geométrica simples, e em Cosmologia é bastante útil introduzir o *escalar de Hubble*

$$H = \frac{\theta}{3}. \quad (8)$$

O modelo cosmológico padrão, ou o modelo do Big-Bang quente, é construído sobre três observações cosmológicas fundamentais: O facto de que o Universo se expande ($H > 0$), como descoberto por Hubble nos finais da década de vinte do século passado, devido ao efeito do desvio para o vermelho da luminosidade de galáxias distantes; A medição da radiação cósmica de fundo em microondas (RCFM), primeiramente detectada por Penzias e Wilson e prevista por Gamow, Alpher e Herman no seus trabalhos em nucleossíntese e processo de formação da abundância de elementos leves segundos após o Big-Bang; A terceira observação fundamental consiste no padrão da abundância dos elementos leves, em particular o hélio.

Contudo, muitas questões permanecem abertas, como o facto de o Universo ser aproximadamente plano e isotrópico, ou a natureza e origem das

perturbações da densidade primordial que dão origem a toda a formação de estrutura cósmica. De forma a explicar estes e outros problemas no cenário do Big-Bang (quente), Guth introduziu em 1981 o paradigma inflacionário na sua forma mais simples, onde durante uma transição de fase cosmológica com um período de super-arrefecimento, o Universo expande-se exponencialmente, num estado de falso vácuo, isto é, como se não tivesse matéria e contivesse uma grande constante cosmológica $\Lambda > 0$. Mais recentemente, e devido à descoberta de que o Universo se encontra em expansão acelerada, como confirmado por observações de supernovas nos finais da década de noventa por Perlmutter, Schmidt e Riess (uma descoberta premiada com o prémio Nobel da física em 2011), soluções cosmológicas que exibem expansão acelerada tornaram-se de uma particular relevância física. Um dos maior puzzles em cosmologia moderna é a discrepância entre o presente valor de Λ e o valor previsto pela teoria da física de partículas no Universo primitivo.

Uma forma mais complexa de produzir expansão acelerada no Universo (em vez de usar a constante cosmológica), consiste em usar um campo escalar $\phi \in C^\infty(\mathcal{M})$ com um potencial de interação suave $V(\phi)$,

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{g^{\alpha\beta}}{2} \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi + V(\phi) \right). \quad (9)$$

A conservação do tensor energia-momento leva à *equação de onda não linear*

$$\square_{\mathbf{g}} \phi = \partial_\phi V \quad (10)$$

onde $\partial_\phi V$ significa a derivada do potencial em relação ao campo escalar ϕ . Por exemplo, potenciais monomiais $V = V_0 \phi^{2n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ são protótipos de modelos inflacionários, e do tipo potência negativa $V = V_0 \phi^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, são modelos de energia escura.

Se $\nabla_\mu \phi$ é do tipo-tempo, pode-se definir um campo vectorial unitário $\mathbf{u}_{(\phi)}$ normal às superfícies $\{\phi = \text{const}\}$

$$u_{(\phi)}^\mu = \frac{\nabla^\mu \phi}{\sqrt{-\nabla_\nu \phi \nabla^\nu \phi}} \quad (11)$$

e o tensor (9) tem a forma algébrica de um fluido perfeito (5), com

$$\rho_\phi = -\frac{1}{2} \nabla_\nu \phi \nabla^\nu \phi + V(\phi) \quad , \quad p_\phi = -\frac{1}{2} \nabla_\nu \phi \nabla^\nu \phi - V(\phi). \quad (12)$$

Seja $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ um espaço-tempo e ξ um campo vectorial que satisfaz

$$\mathcal{L}_\xi \mathbf{g} = 2C\mathbf{g}, \quad (13)$$

onde C é uma constant e \mathcal{L}_{ξ} é a derivada de Lie ao longo de ξ . Se $C = 0$, ξ diz-se um campo vectorial de Killing, e se $C \neq 0$ diz-se um campo vectorial homotético. Um campo vectorial de Killing (homotético) gera uma familia a 1-parâmetro de isometrias (homotetias). O conjunto das isometrias (homotetias) de um espaço-tempo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ forma um grupo de Lie, denominado o grupo das isometrias (homotetias).

O facto de a métrica ser invariante por (13), implica que $\mathcal{L}_{\xi} R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = 0$, $\mathcal{L}_{\xi} R_{\alpha\beta} = 0$ e $\mathcal{L}_{\xi} R = 2CR$, e consequentemente $\mathcal{L}_{\xi} G_{\alpha\beta} = 0$. Das equações de Einstein (2) segue que

$$\mathcal{L}_{\xi} T_{\alpha\beta} = 0. \quad (14)$$

Diz-se que o tensor energia-momento *herda a simetria* do espaço-tempo.

2 Espaços-tempo espacialmente homogêneos

Um espaço-tempo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ diz-se espacialmente homogêneo se admite um grupo de isometrias em que as órbitas são hiper-superfícies do tipo-espaço que constituem uma folheação de \mathcal{M} . A classe de espaços-tempo espacialmente homogêneos dividem-se nos modelos de Kantowski-Sachs e de Bianchi. Os modelos de Bianchi são definidos por o grupo de isometrias possuir um subgrupo G_3 de dimensão 3, que actua simples e transitivamente nas órbitas do tipo-espaço. Existem três subclasses: modelos de Robertson-Walker (RW) que admitem um grupo de isometrias de dimensão 6, G_6 ; os modelos de Bianchi que possuem simetria de rotações local (SRL), em que o grupo de isometrias tem dimensão 4, G_4 ; e por último os modelos de Bianchi que não admitem simetrias adicionais para além do grupo de simetria a 3 parâmetros.

Por definição, um espaço-tempo de Bianchi $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ é uma variedade com a estrutura $\mathcal{M} = I \times G$, onde $I \subset \mathbb{R}$. Seja G_t , $t \in I$, o grupo de Lie $G_t = t \times G$, e $e_i(t)$ um referencial invariante à esquerda em G_t . Em termos da cobase ω^i dual de e_i , a métrica em G_t tem a forma dada por $h_{ij} d\omega^i d\omega^j$. Índices do alfabeto latino tomam os valores $i, j, m, \dots = 1, 2, 3$. Se adicionalmente considerarmos a coordenada t como o tempo próprio ao longo da congruência de geodésicas ortogonal às órbitas do grupo, a métrica de Bianchi é dada por

$$\mathbf{g} = -dt^2 + h_{ij} d\omega^i d\omega^j. \quad (15)$$

Denotaremos por \mathbf{n} o vector normal unitário às superficies de simetria, isto é

$$\mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = -1. \quad (16)$$

Consequentemente, as equações de Einstein dividem-se em equações de restrição

$${}^3R - k^{ij}k_{ij} + \left(h^{ij}k_{ij}\right)^2 = 2T_{00} \quad (17a)$$

$$\nabla_i k^i_j - \nabla_j (h^{mn}k_{lm}) = -T_{0j} \quad (17b)$$

e equações de evolução

$$\partial_t h_{ij} = -2k_{ij} \quad (18a)$$

$$\partial_t k^i_j = R^i_j + (h^{mn}k_{mn})k^i_j - T^i_j + \frac{1}{2}\delta^i_j (h^{mn}T_{mn} - T_{00}) \quad (18b)$$

onde $h_{ij} = h_{ij}(t)$ é a métrica espacial (Riemanniana) e h^{ij} a sua inversa, ${}^3R_{ij}$ é o correspondente tensor de Ricci e ${}^3R = h^{mn}{}^3R_{mn}$ o escalar de Ricci. $k_{ij} = k_{ij}(t)$ é a segunda forma fundamental das superfícies de homogeneidade G_t e, por último, T_{00} , T_{0i} e T_{ij} são a densidade de energia, densidade de momento e o tensor das tensões, respectivamente, que são derivados do tensor energia-momento total $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(m)} + T_{\mu\nu}^{(\phi)}$. Denotaremos também por ${}^3S_{ij}$ a parte sem traço de ${}^3R_{ij}$.

Existe ainda liberdade na especificação do referencial, dada por uma transformação linear dependente da coordenada temporal. Por um lado, podemos usar esta liberdade para tornar o referencial independente do tempo

$$[\mathbf{n}, \hat{\mathbf{e}}_i] = 0, \quad (19)$$

onde $[\cdot, \cdot]$ denota o comutador. Neste caso, as funções de estrutura são também elas independentes do tempo e consequentemente pode-se sempre, através de uma transformação linear independente do tempo, torná-las iguais às constantes de estrutura da álgebra de Lie gerada pelos campos vectoriais de Killing

$$[\xi_i, \xi_j] = C^k_{ij}\xi_k, \quad (20)$$

onde

$$C^k_{ij} = -C^k_{ji}, \quad (21)$$

e vale a identidade de Jacobi

$$C^k_{l[m}C^l_{ij]} = 0. \quad (22)$$

A decomposição das constantes de estrutura na forma

$$C^k_{ij} = \varepsilon_{ijl}\hat{n}^{kl} + \hat{a}_i\delta_j^k - \hat{a}_j\delta_i^k, \quad (23)$$

Classe do Grupo	Tipos de Grupo	\hat{n}_1	\hat{n}_2	\hat{n}_3
A ($\hat{a} = 0$)	I	0	0	0
	II	+	0	0
	VI ₀	0	+	−
	VII ₀	0	+	+
	VIII	−	+	+
	IX	+	+	+
B ($\hat{a} \neq 0$)	V	0	0	0
	IV	0	0	+
	VI _h	0	+	−
	VII _h	0	+	+

Tabela 1: Tipos de modelos de Bianchi caracterizados pelas constantes de estrutura do grupo de Lie $(\hat{n}^1, \hat{n}^2, \hat{n}^3)$. Esta caracterização não é única, visto que se pode sempre rescalar as constantes de cada tipo de Bianchi, assim como permutar (123). Nesta classificação, Bianchi do tipo III corresponde ao Bianchi do tipo VI_{−1}.

onde ε_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita que é totalmente antissimétrico, \hat{n}^{ij} é um tensor simétrico e \hat{a}^i um vector constantes, é usada para classificar os vários tipos simetria dos modelos de Bianchi. Modelos de Bianchi de classe A são definidos por $\hat{a} = 0$ enquanto que para modelos de classe B, $\hat{a} \neq 0$. Resta ainda liberdade para escolher uma base em que a matriz simétrica \hat{n}^{ij} é diagonal e escolher \hat{a}^i como

$$\hat{n}^{ij} = \text{diag}(\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3) \quad , \quad \hat{a}^i = (\hat{a}, 0, 0). \quad (24)$$

As constantes \hat{n}_α descrevem diferentes tipos de simetria, o que leva à classificação da Tabela 1 para os modelos diagonais de classe A. Para modelos de classe B, pode-se introduzir o escalar h através da seguinte fórmula

$$\hat{a}^2 = h\hat{n}_2\hat{n}_3, \quad (25)$$

pelo que h está bem definido se e só se $\hat{n}_2\hat{n}_3 \neq 0$, ver Tabela 1.

2.1 Referencial Ortonormado Invariante pelo Grupo de Isometrias

A liberdade que existe na especificação do referencial, pode ser usada para introduzir um conjunto de três vectores espaciais ortonormais, isto é $h_{ij} =$

δ_{ij} . Assim, o referencial $\{\mathbf{e}_\mu\} = \{\mathbf{n}, \mathbf{e}_i\}$ é *ortonormal e invariante pelo grupo de isometrias*. Neste caso, a métrica fica

$$\mathbf{g} = -dt^2 + \delta_{ij}\omega^i(t)\omega^j(t). \quad (26)$$

Nesta abordagem, as variáveis básicas são as funções de estrutura $\gamma^\alpha_{\beta\gamma}(t)$,

$$[\mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\gamma] = \gamma^\alpha_{\beta\gamma}\mathbf{e}_\alpha, \quad (27)$$

que sendo constantes ao longo das órbitas de simetria, são funções somente da variável de tempo global t . No caso da matéria ser um fluido perfeito não inclinado, e as superfícies de homogeneidade serem as superfícies $\phi = \text{const.}$, então

$$\mathbf{u} = \mathbf{n} = \mathbf{u}_{(\phi)}, \quad (28)$$

as funções de comutação são dadas por

$$\gamma^0_{0j} = \gamma^0_{ij} = 0, \quad (29a)$$

$$\gamma^k_{0j} = -H\delta_j^k - \sigma_j^k - \varepsilon_{jl}^k\Omega^l, \quad (29b)$$

$$\gamma^k_{ij} = \varepsilon_{ijl}n^{kl} + a_i\delta_j^k - a_j\delta_i^k \quad (29c)$$

e das equações de campo de Einstein tem-se então

$$H^2 = \frac{\sigma^2}{3} - \frac{{}^3R}{6} + \frac{\rho}{3} + \frac{V}{3} + \frac{\dot{\phi}^2}{6} \quad (30a)$$

$$\dot{H} = -H^2 - \frac{2}{3}\sigma^2 - \frac{1}{6}(\rho + 3p) - \frac{1}{3}(\dot{\phi}^2 - V) \quad (30b)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = -3H\sigma_{ij} + 2\varepsilon_{(i}^{ml}(\sigma_{j)m}\Omega_l - {}^3S_{ij} \quad (30c)$$

onde

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma^{ij} \quad (31a)$$

$${}^3R = -\frac{1}{2}b_i^i - 6a_ia^i \quad (31b)$$

$${}^3S_{ij} = b_{ij} - \frac{1}{3}b_k^k\delta_{ij} - 2\varepsilon_{(i}^{lp}(n_{j)l}a_p \quad (31c)$$

$$b_{ij} = 2n_i^kn_{kj} - n_k^kn_{ij} \quad (31d)$$

e $\dot{}$ significa a derivada com respeito à variável temporal t e Ω^j é um vector que tem a interpretação de momento angular (local) de um referencial espacial em relação a um outro referencial espacial que tem uma *propagação de Fermi*

ao longo \mathbf{e}_0 . As equações de restrição e evolução para n_{ij} e a_j obtêm-se das *identidades de Jacobi*, e são dadas por

$$0 = n_i^k a_k, \quad (32a)$$

$$\dot{n}_{ij} = -H n_{ij} + 2\sigma_{(i}^k n_{j)k} + 2\varepsilon_{(i}^{ml} n_{j)m} \Omega_l, \quad (32b)$$

$$\dot{a}_i = -H a_i - \sigma_i^k a_k + \varepsilon_i^{ml} a_m \Omega_l. \quad (32c)$$

Note-se que neste caso as equações de campo de Einstein reduzem-se a um sistema de equações diferenciais ordinárias. Tal como em cima, existe ainda liberdade na escolha do referencial ortonormado, que pode ser escolhido de forma a que $n_{ij} = \text{diag}(n_1, n_2, n_3)$ e $a^i = (a, 0, 0)$ ². Para modelos de Classe A, isto implica que

$$\sigma_{ij} = \text{diag}(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}) \quad , \quad \Omega_j = 0, \quad (33)$$

e como σ_{ij} tem traço nulo, só tem duas componentes independentes. Podemos assim escolher um referencial próprio do tensor de cisalhamento σ_{ij} , onde este é representado por dois termos diagonais,

$$\sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad , \quad \sigma_- = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\sigma_{22} - \sigma_{33}). \quad (34)$$

Neste caso, tem-se que ${}^3S_{ij} = \text{diag}({}^3S_{11}, {}^3S_{22}, {}^3S_{33})$, e as duas componentes independentes

$${}^3S_+ = \frac{1}{2}({}^3S_{22} + {}^3S_{33}) \quad , \quad {}^3S_- = \frac{1}{2\sqrt{3}}({}^3S_{22} - {}^3S_{33}). \quad (35)$$

Para modelos de classe B a situação é mais complicada. Em geral, estas escolhas levam a um sistema de equações reduzido, que consiste na variável de Hubble H , e nas restantes funções de estrutura, que denotaremos por

$$\mathbf{x} = \left(\gamma_{ij}^k |_{\text{reduzido}} \right), \quad (36)$$

às quais se tem de juntar as equações para a matéria e para o campo escalar dadas por (6a) e (10). No caso espacialmente homogêneo, estas equações reduzem-se a

$$\dot{\rho}_m = -3H(p_m + \rho_m), \quad (37a)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -\partial_\phi V, \quad (37b)$$

em conjunto com a prescrição de uma equação de estado $p_m(\rho_m)$, e a especificação de um potencial $V(\phi)$.

²Visto que n_{ij} e a_i têm a mesma forma canónica das constantes de estrutura \hat{n}_{ij} e \hat{a}_i , estas determinam os vários tipo de Bianchi do grupo de isometrias.

3 Auto-Semelhança

Um espaço-tempo diz-se *auto-semelhante* se admite um vector homotético. Um resultado importante devido a Eardley [2], diz que um grupo de homotetias H_d admite um subgrupo G_{d-1} de isometrias. No contexto dos modelos espacialmente homogéneos o grupo de homotetias é H_4 e, neste caso, diz-se que o modelo cosmológico é *transitivamente auto-semelhante*. O seguinte teorema é devido a Hsu e Wainwright [4].

Teorema 1 *Um espaço-tempo admite um grupo de homotetias simples transitivo H_4 , se e só se existe um referencial ortonormado $\{e_\mu\}$ e um escalar t tal que*

$$\gamma_{\mu\nu}^\gamma(t) = F_{\mu\nu}^\gamma t^{-1} \quad (38a)$$

$$e_\mu(t) = n_\mu \quad (38b)$$

onde $F_{\mu\nu}^\gamma$ e n_μ são constantes.

O facto de a métrica ser invariante por dimensionamentos (13) restringe o tensor energia-momento. Para um fluido perfeito, a condição (14) restringe equação de estado $p_m = p_m(\rho_m)$. O seguinte teorema é devido a Wainwright [3].

Teorema 2 *Suponha-se que um espaço-tempo admite um campo vectorial homotético, e que se verificam as equações de campo de Einstein com um fluido perfeito. Se existe uma equação de estado $p_m = p_m(\rho_m)$, então*

$$p_m = (\gamma_m - 1) \rho_m \quad (39)$$

com $\gamma_m \neq 0$ constante. Se ξ é ortogonal à velocidade do fluido u , então $\gamma_m = 2$, e se ξ é paralelo a u , então $\gamma_m = 2/3$.

Para todos os modelos de Bianchi, excepto o modelo cosmológico mais simples, a solução plana de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), tem-se que $2/3 \leq \gamma_m \leq 2$. O modelo de FLRW plano é auto-semelhante para todos os valores de $0 < \gamma_m \leq 2$. Neste caso, a métrica (26) é dada em coordenadas (t, x, y, z) por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (40)$$

onde

$$a^2(t) = t^{\frac{4}{3\gamma_m}} \quad (41)$$

e o campo vectorial homotético ξ dado por

$$\xi = t \frac{\partial}{\partial t} + \left(1 - \frac{2}{3\gamma_m}\right) \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right). \quad (42)$$

O escalar de Hubble (8)

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (43)$$

e a densidade de energia do fluido ρ_m são

$$H(t) = \frac{2}{3\gamma_m} t^{-1} \quad , \quad \rho_m(t) = \frac{4}{3\gamma_m^2} t^{-2}. \quad (44)$$

Modelos mais gerais, como por exemplo os modelos de FLRW hiperbólico e Bianchi do tipo I, não sendo auto-semelhantes, são *assimptoticamente auto-semelhantes* [2]. Por modelos assimptoticamente auto-semelhantes entende-se modelos para os quais, nos regimes assintóticos, a sua evolução é aproximada por modelos auto-semelhantes, ou seja, estes modelos têm regimes assintóticos bem definidos que são invariantes por dimensionamento.

Existem, contudo, modelos que não são assintoticamente auto-semelhantes. Por exemplo, os modelos no vácuo de Bianchi do tipo IX (Universo de Mixmaster) exibem um comportamento assintótico oscilatório no passado, isto é, no limite em que se tende para a singularidade inicial. Existem também os modelos com fluido perfeito com equação de estado linear de Bianchi do tipo VII₀ [8, 10], e do tipo VIII [12] em que existe quebra de simetria de auto-semelhança no futuro assintótico, ver também [11].

A inclusão de outro tipo de matéria, como campos escalares, pode levar à quebra assintótica de simetria de auto-semelhança. Neste caso se ξ é um campo vectorial homotético, o campo escalar não tem massa, i.e. $V(\phi) = 0$, ou o potencial é exponencial, isto é

$$V(\phi) = V_0 e^{-\lambda\phi}, \quad (45)$$

com $V_0 > 0$ e $\lambda > 0$ constantes, e

$$\mathcal{L}_\xi \phi = -\frac{2C}{\lambda}. \quad (46)$$

A solução cosmológica mais simples para as equações de Einstein com um campo escalar é a solução plana de RW com um *campo escalar sem massa* que se obtém pondo $V(\phi) = 0$. Neste caso

$$a(t) = t^{\frac{1}{3}} \quad , \quad H(t) = \frac{1}{3} t^{-1}, \quad (47)$$

$$\dot{\phi}(t) = -\sqrt{\frac{2}{3}}t^{-1} \quad , \quad \phi(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \ln \left(\frac{c_0}{t} \right) , \quad (48)$$

com c_0 uma constante. No caso de um potencial exponencial,

$$a(t) = t^{\frac{2}{\lambda^2}} \quad , \quad H(t) = \frac{2}{\lambda^2} t^{-1} , \quad (49)$$

$$\dot{\phi}(t) = -\frac{\sqrt{2p}}{t} \quad , \quad \phi(t) = \frac{\sqrt{2p}}{2} \ln \left(\frac{p(3p-1)}{V_0 t^2} \right) , \quad (50)$$

onde $p > 1/3$ e $\lambda^2 p = 2$. Esta solução exibe expansão acelerada $\ddot{a} > 0$, se e só se $\lambda < \sqrt{2}$, e denomina-se *inflação do tipo lei da potência*.

4 Sistemas dinâmicos cosmológicos

Nesta secção, faremos um breve resumo da aplicação de métodos de sistemas dinâmicos em Cosmologia. Ao mesmo tempo, resultados gerais são exemplificados com o modelo particular de RW plano, com um fluido perfeito com equação de estado linear, e um campo escalar com um potencial positivo constante ou exponencial.

Começamos por rever algumas definições básicas da teoria de sistemas dinâmicos. Outras técnicas e resultados serão introduzidos à medida que forem necessários (para mais detalhes, ver [15], por exemplo).

Seja $\mathbf{z}' = \mathbf{f}(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ um sistema dinâmico autónomo. A evolução de um ponto do espaço de estados (físicos) do sistema dinâmico é descrito pelo fluxo, que formalmente consiste na aplicação $\varphi_\tau : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ que leva $\mathbf{z}(0) \rightarrow \mathbf{z}(\tau)$. O conjunto ω -limite $\omega(\mathbf{z})$ de um ponto $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ é definido como o conjunto de pontos de acumulação da órbita futura, (isto é, a trajectória da solução) que passa por \mathbf{z} . Da mesma forma, o conjunto α -limite $\alpha(\mathbf{z})$ é definido como o conjunto de pontos de acumulação da órbita passada. O ω -limite de um conjunto $\mathbf{S} \subseteq \mathbb{R}^m$ é $\omega(\mathbf{S}) = \bigcup_{\mathbf{z} \in \mathbf{S}} \omega(\mathbf{z})$. Os conjuntos ω -limite (conjuntos α -limite) caracterizam o comportamento assintótico no futuro (passado) do sistema dinâmico. Os exemplos mais simples de conjuntos limites são pontos fixos, isto é, pontos \mathbf{z}_* no espaço de estados do sistema dinâmico $\mathbf{z}' = \mathbf{f}(\mathbf{z})$ para os quais $\mathbf{f}(\mathbf{z}_*) = 0$ (por vezes os pontos fixos denominam-se pontos de equilíbrio, críticos ou estacionários) e órbitas periódicas.

4.1 Variáveis Hubble-normalizadas e generalizações

A aplicação de métodos da teoria de sistemas dinâmicos à cosmologia surge do trabalho pioneiro de Collins [1]. É neste trabalho, que surge também pela

primeira vez a ideia de utilizar novas variáveis dependentes, normalizadas com a variável de Hubble (8), que resultam em quantidades adimensionais e, em geral, limitadas. Este método foi posteriormente desenvolvido no caso em que a matéria é descrita por um fluido perfeito com equação de estado linear para modelos de Bianchi de classe A, por Wainwright e Hsu [5], e modelos de Bianchi de classe B por Hewitt e Wainwright [6]. Estes resultados encontram-se compilados em [7].

Por analogia com o caso de RW (43), o escalar de Hubble pode ser usado para definir uma função escala de distância l ,

$$H = \frac{\dot{l}}{l}, \quad (51)$$

onde $0 < l < +\infty$, e a quantidade adimensional *parâmetro de desaceleração* q definido por

$$q = -\frac{\ddot{l}}{\dot{l}^2} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{H} = -(1 - q)H^2. \quad (52)$$

Para modelos que se expandem para sempre, $H > 0$, as variáveis Hubble-normalizadas das funções de estrutura são definidas da seguinte forma

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{H} \quad (53)$$

e a variável temporal adimensional τ é definida por

$$d\tau = H dt \quad \Leftrightarrow \quad l = l_0 e^\tau \quad (54)$$

onde $\tau \rightarrow -\infty$ no passado e $\tau \rightarrow +\infty$ no futuro assintóticos. A equação de evolução para o escalar de Hubble fica

$$\frac{dH}{d\tau} = -(1 + q)H, \quad (55)$$

enquanto que as variáveis adimensionais formam um sistema autónomo

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \mathbf{h}(\mathbf{y}) \quad , \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n. \quad (56)$$

Nos caso dos modelos de Bianchi de classe B, existe ainda uma equação de restrição adicional $g(\mathbf{x}) = 0$ (32a), e que se traduz na equação de restrição $g(\mathbf{y}) = 0$. As funções $\mathbf{h}(\mathbf{y})$ e $g(\mathbf{y})$ são polinomiais em \mathbf{y} . O motivo da evolução do escalar de Hubble se desacoplar deve-se ao facto da transformação acima fazer desaparecer, por rescalamento, os efeitos de uma expansão geral.

No caso em que o fluido perfeito tem uma equação de estado linear $p_m = (\gamma_m - 1)\rho_m$, com γ_m constante, só é necessário, a introdução do *parâmetro de densidade*,

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{3H^2}, \quad (57)$$

que satisfaz

$$\frac{d\Omega_m}{d\tau} = [2q - (3\gamma_m - 2)] \Omega_m. \quad (58)$$

No caso do campo escalar ter um potencial positivo $V(\phi) > 0$, podem-se introduzir as seguintes variáveis Hubble-normalizadas (ver por exemplo [9, 13]):

$$(\Omega_V, \Sigma_\phi) = \left(\frac{V}{3H^2}, \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6}H} \right), \quad (59)$$

que denominamos por *parâmetro densidade de energia potencial* e *parâmetro densidade de energia cinética*, respectivamente. Estas quantidades obedecem às seguintes equações de evolução

$$\frac{d\Omega_V}{d\tau} = 2 \left[(1 + q) - \sqrt{\frac{3}{2}} \lambda(\phi) \Sigma_\phi \right] \Omega_V, \quad (60a)$$

$$\frac{d\Sigma_\phi}{d\tau} = (q - 2) \Sigma_\phi + \sqrt{\frac{3}{2}} \lambda(\phi) \Omega_V, \quad (60b)$$

onde

$$\lambda(\phi) = -\frac{\partial_\phi V}{V}. \quad (61)$$

Isto é, apenas no caso em que o potencial é constante ou exponencial é que as variáveis (Ω_V, Σ_ϕ) formam um sistema fechado.

Uma formulação que inclui potenciais mais gerais foi recentemente introduzida em [24]. Neste caso, é necessário, a introdução de uma *variável de campo escalar* $Z(\phi)$,

$$\frac{dZ}{d\tau} = \sqrt{6} \frac{dZ}{d\phi} \Sigma_\phi. \quad (62)$$

A escolha da variável $Z(\phi)$ não é única e uma escolha ótima depende do potencial em estudo. Contudo, para obter uma formulação global do sistema dinâmico, Z deve ser sempre escolhida de forma a que seja uma função global monótona e invertível em ϕ , definida num intervalo limitado $Z \in (Z_-, Z_+)$, com $Z_\pm = Z(\phi_\pm)$, onde $\phi_\pm = \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \phi$. Além disso, se a função λ não for limitado como, por exemplo, no caso de potenciais do tipo potência invertida em que $\lambda = 1/\phi$ explode no limite $\phi \rightarrow 0$, é preciso introduzir outra variável temporal que regularize o sistema dinâmico [20, 24].

Estas variáveis não são de, todo adequadas para todos os potenciais. Para potenciais com mínimo zero ($V(\phi) \geq 0$), como por exemplo potenciais monomiais, deve-se substituir a variável do campo escalar Z por uma variável baseada no escalar de Hubble H e que tem em consideração uma escala temporal média oscilatória variável no futuro, como demonstrado em [21], e [23]. O facto de existirem formulações diferentes do sistema dinâmico, melhor adaptadas à descrição de regimes assintóticos, não deve ser visto com surpresa, visto que regimes diferentes induzem estruturas extra que podem ser usadas na formulação dos sistemas. Perto da singularidade inicial ($l \rightarrow 0$), é natural adaptar tanto as variáveis dependentes como independentes à variável de Hubble, devido ao facto de esta variável fornecer uma escala física natural neste regime, como discutido em [19]. Por outro lado, o regime oscilatório no futuro, no caso de campos escalares com potenciais monomiais, depende do mínimo do potencial, que no caso mais simples do *potencial de Klein-Gordon* $V(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2$, é caracterizado por $\frac{d^2V}{d\phi^2} = m^2$, e assim m fornece a escala física natural neste regime. Estas características refletem-se na escolha de variáveis dependentes e independentes, ver [21, 23].

Denotemos por \mathbf{z} o estado

$$\mathbf{z} = (\mathbf{y}, \Omega_m, \Omega_V, \Sigma_\phi, Z) . \quad (63)$$

Na derivação das equações de evolução, o parâmetro de desaceleração q tem um papel importante, e pode-se escrever em termos das novas funções \mathbf{y} , e das variáveis da matéria e do campo escalar, através da *equação de Raychaudhuri* (30b). Além disso, as variáveis para a matéria e campo escalar estão relacionadas com as funções de estrutura através da *equação de Friedmann generalizada* (30a):

$$1 = \Sigma^2 + K + \Omega_m + \Sigma_\phi^2 + \Omega_V , \quad (64)$$

onde introduzimos o *parâmetro de cisalhamento* Σ , e o *parâmetro de curvatura* K , na forma

$$\Sigma^2 = \frac{\sigma^2}{3H^2} , \quad K = -\frac{3R}{6H^2} . \quad (65)$$

Assim, o parâmetro de desaceleração é dado por

$$q = 2\Sigma^2 + \left(\frac{3}{2}\gamma_m - 1\right)\Omega_m + 2\Sigma_\phi^2 - \Omega_V . \quad (66)$$

Dado um ponto \mathbf{z}_0 , que representa o estado do universo num tempo τ_0 , $\mathbf{z} = \varphi_\tau(\mathbf{z}_0)$ descreve a órbita que passa por \mathbf{z}_0 , em $\tau = \tau_0$. Seja $\tilde{q}(\tau)$ o

parâmetro de desaceleração ao longo da órbita, isto é,

$$\tilde{q}(\tau) = q(\varphi_\tau(\mathbf{z}_0)), \quad (67)$$

pelo que $\tilde{q}(0) = q(\mathbf{z}_0)$. Então, de (55), tem-se que ao longo da órbita que passa por \mathbf{z}_0 , o escalar de Hubble é dado por

$$H(\tau) = H_0 e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} [1+\tilde{q}(\tilde{\tau})] d\tilde{\tau}}, \quad (68)$$

com H_0 arbitrário. Esta liberdade implica que *cada órbita não-singular corresponde a uma família a 1-parâmetro de universos físicos, que estão conformalmente relacionados por um rescalamento constante das funções de estrutura, e consequentemente do referencial ortonormado e da métrica.*

Como exemplo, consideremos o modelo mais simples de RW plano, para o qual $\Sigma = 0 = K$. Além disso, consideremos um fluido perfeito com equação de estado linear e um campo escalar com um potencial constante ou exponencial. Neste caso, o problema é efectivamente reduzido a duas dimensões, em que a equação para a variável do campo escalar, Z , desacopla-se das restantes equações. A razão por detrás desta propriedade reside no facto de estes modelos admitirem simetrias de dimensionamento o que, por sua vez, dá origem a uma família a 1-parâmetro de soluções equivalentes. Neste caso o sistema dinâmico é dado por

$$\frac{d\Sigma_\phi}{d\tau} = -(2-q)\Sigma_\phi + \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda(1 - \Sigma_\phi^2 - \Omega_m), \quad (69a)$$

$$\frac{d\Omega_m}{d\tau} = 3 \left[2\Sigma_\phi^2 - (1 - \Omega_m) \right] \Omega_m, \quad (69b)$$

onde se usou a equação de Friedmann generalizada (64), para expressar globalmente a variável Hubble-normalizada da energia potencial do campo escalar, Ω_V , em termos das variáveis do espaço de estados,

$$\Omega_V = 1 - \Sigma_\phi^2 - \Omega_m, \quad (70)$$

enquanto que o parâmetro de desaceleração, q , é dado por (66)

$$q = -1 + 3\Sigma_\phi^2 + \frac{3}{2}\gamma_m\Omega_m. \quad (71)$$

Para modelos que se expandem para sempre, i.e. $H > 0$, as soluções de (69), estão bem definidas para todos os tempos τ , e definem um fluxo $\{\varphi_\tau\}$ em \mathbb{R}^2 . Pode-se assim analisar a evolução dos modelos cosmológicos estudando as órbitas deste fluxo na região física do espaço de estados $\mathbf{S} \subset \mathbb{R}^2$ definido por

$$\Omega_m > 0, \quad \Omega_V = 1 - \Sigma_\phi^2 - \Omega_m > 0 \quad (72)$$

e que é relativamente compacto.

4.2 Fronteiras invariantes

Uma outra propriedade das variáveis Hubble-normalizadas consiste nas fronteiras serem conjuntos invariantes. Um conjunto $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^n$ diz-se um conjunto invariante do fluxo φ_τ em \mathbb{R}^n , se para todo $\mathbf{z} \in \mathcal{I}$ e todo $\tau \in \mathbb{R}$, $\varphi_\tau(\mathbf{z}) \in \mathcal{I}$. Exemplos de conjuntos invariantes consistem em pontos fixos e órbitas periódicas, que correspondem a uma única órbita, variedades estáveis, instáveis e centrais, conjuntos α e ω -limite, atractores, sequências heteroclinicas e ciclos. Conjuntos invariantes descrevem classes de sistemas físicos restritos, que satisfazem propriedades especiais, e que, por vezes, descrevem o comportamento assintótico de classes de modelos mais gerais.

No nosso exemplo, o espaço de estados físicos \mathbf{S} pode ser subsequentemente estendido de forma regular para incluir as fronteiras invariantes:

- $\Omega_m = 0$, que denominaremos por *fronteira invariante do campo escalar*.
- $\Omega_V = 0$, que denominaremos por *fronteira invariante do campo escalar sem massa*.

O facto do espaço de estados $\bar{\mathbf{S}}$ ser compacto tem um significado físico directo. Para modelos que se expandem para sempre, nenhuma quantidade física ou geométrica diverge mais rápido que uma certa potência de H na singularidade inicial, e nenhuma quantidade tende para zero mais lentamente do que H no futuro³.

4.3 Pontos fixos

Para um ponto fixo \mathbf{z}_\star do sistema dinâmico, o parâmetro de desaceleração é constante, isto é, $q(\mathbf{z}_\star) = q_\star$, e

$$H(\tau) = H_0 e^{(1+q_\star)\tau}. \quad (73)$$

Neste caso, o parâmetro H_0 , pode ser fixado por uma translação em τ , $\tau \rightarrow \tau + \text{const.}$ Assim, e pondo $H_0 = 1$, (54) implica que

$$Ht = \frac{1}{1 + q_\star}, \quad (74)$$

³No caso $\Lambda > 0$, $H \rightarrow \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$, no futuro assintótico.

e, de (36) e (53), tem-se que as funções de estrutura são da forma (38a). Segue do Teorema 1 o seguinte resultado: *A cada ponto fixo do sistema dinâmico, corresponde um único modelo cosmológico transitivamente auto-semelhante.*

Os pontos fixos determinam o comportamento assintótico de modelos mais gerais. Se o conjunto α -limite (ω -limite) de um ponto \mathbf{z} é o ponto fixo \mathbf{z}_* , então a órbita que passa por \mathbf{z} tende para \mathbf{z}_* à medida que $\tau \rightarrow -\infty$ ($\tau \rightarrow +\infty$). A interpretação física é a de que a dinâmica do modelo com o estado inicial \mathbf{z} é aproximada pelo modelo auto-semelhante correspondente a \mathbf{z}_* , quando $\tau \rightarrow -\infty$ ($\tau \rightarrow +\infty$), i.e. os modelos são assintoticamente auto-semelhantes no passado (futuro). Se o modelo tem esta propriedade no passado e no futuro, diz-se somente que o modelo é assintoticamente auto-semelhante, e neste caso a órbita que descreve o modelo diz-se heteroclinica ⁴.

Nesta situação, pode-se obter a forma assintótica para as funções de estrutura reduzidas \mathbf{x} e para as variáveis de matéria e do campo escalar. Da equação de evolução para a variável adimensional Ht , tem-se que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} Ht = (1 + q_*)^{-1} \Leftrightarrow H = (1 + q_*)^{-1} t^{-1} + o(t^{-1}) \quad (75)$$

e consequentemente, a equação (53) implica

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{y}_*}{1 + q_*} t^{-1} + o(t^{-1}), \quad (76)$$

onde o termo dominante corresponde aos modelos auto-semelhantes.

No caso particular do sistema (69), os pontos fixos encontram-se listados na Tabela 2.

Usando os valor de q da Tabela 2 e (75) é fácil de ver que os pontos fixos FL, M e PL correspondem às soluções exactas auto-semelhantes de FLRW plano (44), campo escalar sem massa (47) e lei da potência (49). O ponto fixo EM corresponde a uma solução auto-semelhante homotética com um potencial exponencial e matéria na forma de um fluido perfeito com equação de estado linear. A razão por detrás da existência deste ponto fixo deve-se ao facto de existir simetria de dimensionamento. Neste caso, uma solução auto-semelhante homotética só pode existir se ρ_m e ρ_ϕ têm a mesma forma, o que requer $\gamma_m = \gamma_\phi$, onde $\gamma_\phi = 1 + \frac{p_\phi}{\rho_\phi}$.

Para um potencial constante $\lambda = 0$, o rescalamento das coordenadas leva uma solução com um dado $V = \Lambda$, a uma solução com um Λ diferente, e

⁴Uma órbita heteroclinica junta dois pontos fixos distintos, enquanto órbitas homoclinicas têm o mesmo ponto inicial e final.

FL	$\Sigma_\phi = 0, \Omega_m = 1$	$q = (3\gamma_m - 2)/2$
EM	$\Sigma_\phi = \sqrt{3/2}\gamma_m\lambda^{-1}, \Omega_m = 1 - 3\gamma_m\lambda^{-2}; \lambda > \sqrt{3\gamma_m}$	$q = (3\gamma_m - 2)/2$
M $^\pm$	$\Sigma_\phi = \pm 1, \Omega_m = 0$	$q = 2$
PL	$\Sigma_\phi = \lambda/\sqrt{6}, \Omega_m = 0; \lambda < \sqrt{6}$	$q = -1 + \lambda^2/2$
dS	$\Sigma_\phi = \Omega_m = 0; \lambda = 0$	$q = -1$

Tabela 2: Tabela com os diversos pontos fixos que ocorrem para modelos de RW planos com um campo escalar com potencial constante ou exponencial e um fluido perfeito com o parâmetro da equação de estado linear $0 < \gamma_m < 2$.

é por esta razão que o espaço-tempo de de-Sitter aparece como ponto fixo dS. Mas devido a Λ ter dimensões (distância⁻²), não existem soluções que admitam uma simetria homotética quando $\Lambda \neq 0$, isto é, esta simetria não é a mesma do caso do potencial exponencial.

Todos os pontos fixos do sistema dinâmico são hiperbólicos. Recordar que um ponto fixo diz-se *hiperbólico* se a matriz de linearização do sistema em torno do ponto fixo possui valores próprios com parte real diferente de zero. Neste caso, o *teorema de Hartman-Grobman* aplica-se: Numa vizinhança de um ponto de fixo hiperbólico, o sistema não-linear original e o linearizado são topologicamente equivalentes. O teorema de Hartman-Grobman estabelece as propriedades de estabilidade locais de um ponto fixo hiperbólico, mas de notar, contudo, que não é garantido que a solução linearizada dê uma aproximação na vizinhança do ponto fixo. *Pontos fixos não-hiperbólicos* têm linearizações com um ou mais valores próprios com parte real zero.

Da análise dos valores próprios, tem-se o seguinte resultado: Um conjunto a um parâmetro de órbitas em $\bar{\mathbf{S}}$ origina-se de cada fonte M $^+$ e M $^-$ quando $\lambda < \sqrt{6}$, mas quando $\lambda > \sqrt{6}$ não há soluções que têm origem em M $^+$, enquanto uma solução tem origem em FL. Em direcção ao futuro PL é estável quando $\lambda < \sqrt{3\gamma_m}$, enquanto EM é estável no futuro quando $\lambda > \sqrt{3\gamma_m}$. Ou seja, as bifurcações aparecem quando $\lambda = \sqrt{6}$, que é quando PL deixa o espaço de estados físico através de M $^+$, e quando $\lambda = \sqrt{3\gamma_m}$, que é quando EM entra no espaço de estados através de PL. Mais ainda, existe uma bifurcação quando $\lambda = 0$, que é quando PL se torna o ponto estável no futuro dS. A estrutura do espaço de soluções para exemplos representativos dos diferentes casos pode ser vista na Fig. 1.

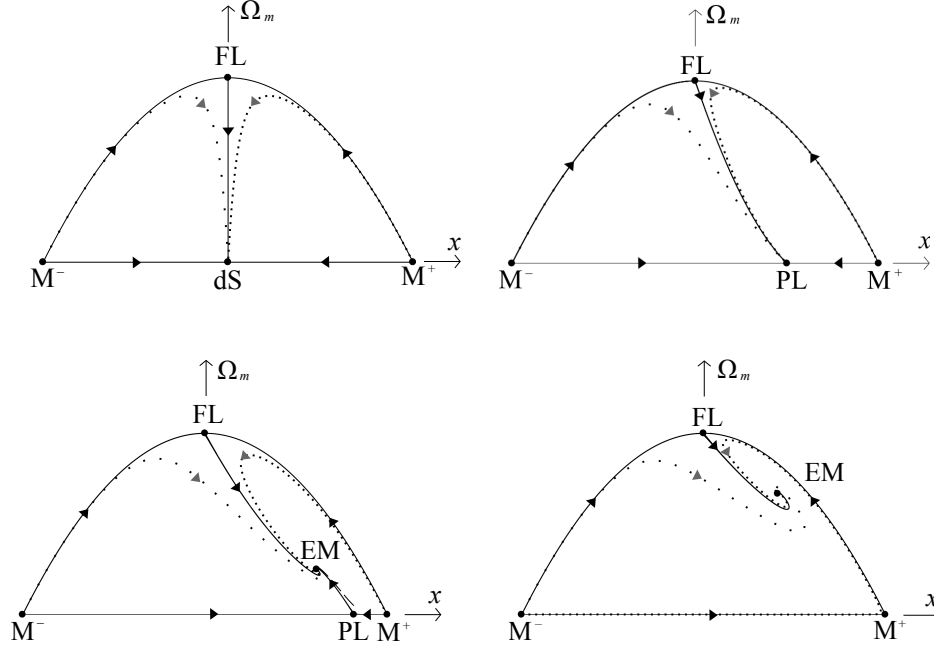


Figura 1: Estruturas representativas do espaço de soluções para $\bar{\mathbf{S}}$.

4.4 Funções monótonas e dinâmica global

As propriedades de estabilidade dos pontos fixos dadas pelo teorema de Hartman-Grobman são apenas locais. As propriedades globais, seguem da existência de uma função monótona. Seja $M : \mathbf{S} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. M diz-se monótona decrescente (crescente) para o fluxo em \mathbf{S} , se para todos os $\mathbf{z} \in \mathbf{S}$, $M(\varphi_\tau(\mathbf{z}))$ é uma função monótona decrescente (crescente) de τ . Se existe uma função monótona $M : \mathbf{S} \rightarrow \mathbb{R}$ em \mathbf{S} , então \mathbf{S} não contém pontos fixos, órbitas periódicas, órbitas recorrentes ou homoclinicas.

A função monótona pode ser obtida de outro tipo de simetria das equações de campo, associada com dimensionamento de coordenadas (um mecanismo geral, discutido em [16]). No caso dos modelos de RW planos com fluido perfeito e campo escalar, o escalar de Hubble é uma função monótona que pode ser escrita através das variáveis do espaço de estados, como

$$H^2 = \frac{V(\phi(Z))}{3(1 - \Omega_m - \Sigma_\phi^2)}. \quad (77)$$

Estes métodos já foram também utilizados em modelos com outros tipos

de matéria, como por exemplo fluidos perfeitos com equação de estado não linear [14], fluidos anisotrópicos [18], fluidos com difusão [22] e material elástico [17].

Agradecimentos

O autor é suportado pelo CAMGSD, Instituto Superior Técnico através da FCT/Portugal, projecto UID/MAT/04459/2013, e a bolsa FCT SFRH/BPD/85194/2012. O autor gostaria também de agradecer ao Prof. José Natário por uma leitura cuidadosa do artigo.

Referências

- [1] C. B. Collins, “More Qualitative Cosmology”, *Comm. Math. Phys.*, Vol. 023, No. 2 (1971), pp. 137-158.
- [2] D. M. Eardley, “Self-similar Spacetimes: Geometry and Dynamics”, *Comm. Math. Phys.*, Vol. 037, No. 4 (1974), pp. 287-309.
- [3] J. Wainwright, “Self-similar solutions of Einstein’s equations”, *Galaxies, Axisymmetric Systems and Relativity-Essays presented to W. B. Bonnor on his 65th birthday*, Cambridge and New York, Cambridge University Press, 1985, Eds. M. A. H. MacCallum, pp. 288-300.
- [4] L. Hsu e J. Wainwright, “Self-similar spatially homogeneous cosmologies: orthogonal perfect fluid and vacuum solutions”, *Class. Quantum Grav.*, Vol. 3, No. 6 (1986), pp. 1105-1124.
- [5] J. Wainwright e L. Hsu, “A dynamical systems approach to Bianchi cosmologies: orthogonal models of class A”, *Class. Quantum Grav.*, Vol. 6, No. 10 (1989), pp. 1409-1431.
- [6] C. G. Hewitt e J. Wainwright, “A dynamical systems approach to Bianchi cosmologies: orthogonal models of class B”, *Class. Quantum Grav.*, Vol. 10, No. 1 (1993), pp. 99-124.
- [7] J. Wainwright e G. F. R. Ellis, *Dynamical Systems in Cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [8] J. Wainwright, M. J. Hancock e C. Uggla, “Asymptotic self-similarity breaking at late times in cosmology”. *Class. Quantum Grav.*, Vol. 16, No. 8 (1999) pp. 2577-2598

- [9] M. Goliath e G. F. R. Ellis, “Homogeneous cosmologies with a cosmological constant”, *Phys. Rev. D*, Vol. 60, No. 2 (1999), pp. 137-158
- [10] U S Nilsson, M J Hancock and J Wainwright , “Non-tilted Bianchi VII₀ models - the radiation fluid”. *Class. Quantum Grav.*, Vol. 17, No. 16 (2000) pp.3119-3134
- [11] C. G. Hewitt, J. T. Horwood e J Wainwright, “Asymptotic dynamics of the exceptional Bianchi cosmologies”, *Class. Quantum Grav.*, Vol. 20, No. 9 (2003) pp. 1743-1756
- [12] J. T. Horwood, M. J. Hancock, D. The e J. Wainwright, “Late-time asymptotic dynamics of Bianchi VIII cosmologies”. *Class. Quantum Grav.*, Vol. 20, No. 9 (2003), pp. 1757-1777
- [13] A. C. Coley, *Dynamical Systems and Cosmology*, Kluwer Academic Press, , 2003.
- [14] J. M. Heinzle, N. Röhr e C. Uggla, “Matter and dynamics in closed cosmologies”, *Phys. Rev. D*, Vol. 71, No 8 (2005), pp. 083506
- [15] L. Barreira e C. Valls, *Equações diferenciais: teoria qualitativa*, IST Press, Lisboa, 2010.
- [16] J. M. Heinzle e C. Uggla, “Monotonic functions in Bianchi models: why they exist and how to find them”, *Class. Quantum Grav.*, Vol. 27, No. 1 (2010), pp. 015009
- [17] S. Calogero e J. M. Heinzle, “Asymptotics of LRS Bianchi type I cosmological models with elastic matter”, *Gen. Rel. Grav.*, Vol. 42, No. 6 (2010), pp. 1491-1512.
- [18] S. Calogero e J. M. Heinzle, “Bianchi cosmologies with anisotropic matter: Locally rotationally symmetric models”, *Physica D*, Vol. 240, No. 7 (2011), pp. 636-669
- [19] C. Uggla, Recent developments concerning generic spacelike singularities, *Gen. Rel. Grav.*, Vol. 45, No. 9 (2013). pp. 1669-1710
- [20] N. Tamanini, “Dynamical systems in dark energy models”, Tese de Doutorado, University College London, Reino-Unido, 2014.
- [21] A. Alho e C. Uggla, “Global dynamics and inflationary center manifold and slow-roll approximants”, *J. Math. Phys.*, Vol. 56, No. 1 (2015) pp. 012502

-
- [22] A. Alho, S. Calogero, M. P. Ramos e A. J. Soares, “Dynamics of Robertson-Walker spacetimes with diffusion”, *Ann. Physics*, Vol. 324, (2015) pp. 475-488
- [23] A. Alho, J. Hell e C. Uggla, “Global dynamics and asymptotics for monomial scalar field potentials and perfect fluids”, *Class. Quantum Grav.*, Vol. 32, No. 14 (2015) pp. 145005
- [24] A. Alho e C. Uggla, “Scalar field deformations of Λ CDM cosmology”, *Phys. Rev. D*, Vol. 92, No. 3 (2015) pp. 103502