

AS EQUAÇÕES DE CAMPO DA GRAVITAÇÃO

De *A. Einstein*.

Tradução de
Irene Brito

Universidade do Minho

e-mail: ireneb@math.uminho.pt

Resumo: Tradução a partir do original alemão “Die Feldgleichungen der Gravitation”, A. Einstein, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 844-847, 25.11.1915 (As equações de campo da gravitação, A. Einstein, Atas da Academia Prussiana das Ciências de Berlim). Este artigo é continuação do trabalho “Zur allgemeinen Relativitätstheorie” de A. Einstein publicado nas Atas XLIV da Academia Prussiana das Ciências de Berlim com o título “Sobre a teoria da relatividade geral”. Em particular, o artigo faz referência às pp. 778-786 e às equações (21) e (22) do trabalho publicado nas Atas XLIV, e cita estas equações como (21) loc.cit. e (22) loc.cit.. A tradução do trabalho publicado nas Atas XLIV junta-se aqui a seguir à tradução deste artigo.

Em duas comunicações publicadas recentemente¹ mostrei como é possível obter as equações de campo da gravitação, que correspondem ao postulado da relatividade geral, isto é, que na sua versão geral são covariantes em relação a quaisquer substituições das variáveis do espaço-tempo.

Aí, o processo de desenvolvimento foi o seguinte. Primeiro encontrei equações, que contêm a teoria newtoniana como aproximação e que eram covariantes em relação a quaisquer substituições do determinante² 1. Depois descobri que a estas equações correspondem equações covariantes gerais se desaparecer o escalar do tensor de energia da “matéria”. O sistema de coordenadas era assim definido segundo a regra simples de $\sqrt{-g}$ ter que ser igual a 1, pelo que as equações da teoria se simplificam notavelmente. Mas aí, como já referido, teria que ser introduzida a hipótese de o escalar do tensor de energia da matéria desaparecer.

Recentemente, tenho agora a opinião de que se pode passar sem as hipóteses sobre o tensor de energia da matéria, se se introduzir nas equações de campo o tensor de energia da matéria de uma maneira diferente da apresentada nas minhas duas comunicações anteriores. As equações de campo para

¹Atas XLIV, p.778 e XLVI, p.799, 1915.

²[Nota da tradutora: Isto significa que $\sqrt{-g} = 1$.]

o vácuo, na qual fundamentei a explicação sobre o movimento do periélio do Mercúrio, não se alteram com esta modificação. Eu apresento aqui outra vez toda a abordagem, para que o leitor não necessite de ver constantemente as comunicações anteriores.

A partir do covariante de Riemann de ordem quatro deduz-se os seguintes covariantes de ordem dois:

$$G_{im} = R_{im} + S_{im} \quad (1)$$

$$R_{im} = - \sum_l \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} i m \\ l \end{matrix} \right\}}{\partial x_l} + \sum_{l\rho} \left\{ \begin{matrix} i l \\ \rho \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \rho \\ l \end{matrix} \right\} \quad (1a)$$

$$S_{im} = \sum_l \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} i l \\ l \end{matrix} \right\}}{\partial x_m} - \sum_{l\rho} \left\{ \begin{matrix} i m \\ \rho \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \rho l \\ l \end{matrix} \right\} \quad (1b)$$

Obtemos as dez equações covariantes gerais dos campos de gravitação em espaços, em que falta “matéria”, fixando

$$G_{im} = 0. \quad (2)$$

Estas equações podem ser apresentadas de maneira mais simples, se se escolher o sistema de referência de modo que $\sqrt{-g} = 1$. Então desaparece S_{im} por causa de (1b), de maneira que, em vez de (2) se obtém

$$R_{im} = \sum_l \frac{\partial \Gamma_{im}^l}{\partial x_l} + \sum_{\rho l} \Gamma_{i\rho}^l \Gamma_{ml}^\rho = 0 \quad (3)$$

$$\sqrt{-g} = 1. \quad (3a)$$

Aqui é estabelecido que

$$\Gamma_{im}^l = - \left\{ \begin{matrix} i m \\ l \end{matrix} \right\} \quad (4)$$

cujas grandezas designamos por “componentes” do campo de gravitação.

Se no espaço considerado existe “matéria”, então aparece o seu tensor de energia no lado direito de (2), respetivamente, de (3). Nós estabelecemos que³

$$G_{im} = -\kappa \left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T \right), \quad (2a)$$

³[Nota da tradutora: $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$, onde c é a velocidade da luz e G é a constante gravitacional.]

em que

$$\sum_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma} T_{\rho\sigma} = \sum_{\sigma} T_{\sigma}^{\sigma} = T; \quad (5)$$

T é o escalar do tensor de energia da “matéria”, o lado direito de (2a) é um tensor. Se distinguirmos outra vez o sistema de coordenadas de modo usual, então obtemos em lugar de (2a) as equações equivalentes

$$R_{im} = \sum_l \frac{\partial \Gamma_{im}^l}{\partial x_l} + \sum_{\rho i} \Gamma_{i\rho}^l \Gamma_{ml}^{\rho} = -\kappa \left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T \right) \quad (6)$$

$$\sqrt{-g} = 1. \quad (3a)$$

Como sempre, assumimos que a divergência do tensor de energia-momento desaparece no sentido do cálculo diferencial geral (teorema do impulso). Distinguindo a escolha de coordenadas segundo (3a) isto leva a que os T_{im} devem satisfazer as condições

$$\sum_{\tau} \frac{\partial T_{\sigma}^{\lambda}}{\partial x_{\lambda}} = -\frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} T_{\mu\nu} \quad (7)$$

ou

$$\sum_{\tau} \frac{\partial T_{\sigma}^{\lambda}}{\partial x_{\lambda}} = -\sum_{\mu\nu} \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu} T_{\mu}^{\nu}. \quad (7a)$$

Multiplicando (6) por $\frac{\partial g^{im}}{\partial x_{\sigma}}$ e somando sobre i e m , então, respeitando (7) e a seguinte relação de (3a)

$$\frac{1}{2} \sum_{im} g_{im} \frac{\partial g^{im}}{\partial x_{\sigma}} = -\frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x_{\sigma}} = 0$$

obtem-se⁴ o teorema de conservação para a matéria e o campo de gravitação na forma

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} \left(T_{\sigma}^{\lambda} + t_{\sigma}^{\lambda} \right) = 0, \quad (8)$$

em que t_{σ}^{λ} (o “tensor de energia” do campo de gravitação) é dado por

$$\kappa t_{\sigma}^{\lambda} = \frac{1}{2} \delta_{\sigma}^{\lambda} \sum_{\mu\nu\alpha\beta} g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} - \sum g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\lambda}. \quad (8a)$$

⁴Sobre a dedução cf. Atas XLIV, 1915, p.784/785. Peço ao leitor que consulte também o desenvolvimento apresentado na p.785 para comparação com o que se segue.

As razões que me levaram a introduzir o segundo termo do lado direito de (2a) e (6) clarificam-se só a partir das seguintes reflexões, que são análogas às apresentadas no sítio há pouco referido (p.785).

Se multiplicarmos (6) por g^{im} e somarmos sobre os índices i e m , então obtemos após um cálculo simples

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \kappa(T + t) = 0, \quad (9)$$

em que, correspondentemente a (5), é usada para abreviatura

$$\sum_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma} t_{\rho\sigma} = \sum_{\sigma} t_{\sigma}^{\sigma} = t. \quad (8b)$$

Observe-se que o nosso termo adicional tem como consequência, que em (9) o tensor de energia do campo gravitacional aparece ao lado do da matéria de forma igual, o que não é o caso na equação (21) loc.cit..

Além disso, deduz-se, em vez da equação (22) loc.cit. do mesmo modo lá indicado com a ajuda da equação de energia, as relações

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \kappa(T + t) \right] = 0. \quad (10)$$

O nosso termo adicional implica que estas equações não contêm nenhuma condição nova em relação a (9), de tal modo que o tensor da matéria não precisa de obedecer a outra hipótese senão à de que corresponde ao teorema do impulso.

Com isto está finalmente concluída a teoria da relatividade geral como construção lógica. O postulado de relatividade na sua versão geral, que transforma as coordenadas de espaço-tempo em parâmetros sem significado do ponto de vista físico, leva com necessidade obrigatória a uma determinada teoria de gravitação, que explica o movimento do periélio do Mercúrio. Pelo contrário, o postulado geral da relatividade não consegue revelar nada sobre a essência dos processos restantes da natureza além do que a relatividade restrita já não tenha explicado. A minha opinião a este respeito, apresentada recentemente, estava errada. Cada teoria física que está de acordo com a teoria da relatividade restrita pode, por meio do cálculo diferencial absoluto, ser integrada no sistema da teoria da relatividade geral, sem que esta última apresentasse algum critério para a legitimidade dessa teoria.

Distribuído no dia 2 de dezembro.

SOBRE A TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

De *A. Einstein.*

Tradução de
Irene Brito

Resumo: Tradução a partir do original alemão “Zur allgemeinen Relativitätstheorie”, A. Einstein, Sitzungsberichte XLIV der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 778-786, 4.11.1915 (Sobre a teoria da relatividade geral, A. Einstein, Atas XLIV da Academia Prussiana das Ciências de Berlim).

Em anexo a esta tradução são apresentadas as equações de “Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie” (O fundamento formal da teoria de relatividade geral, A. Einstein, Atas XLI, 1066-1077, 1914) citadas neste artigo (por “loc. cit.”).

Nos últimos anos esforcei-me por fundar uma teoria de relatividade geral no pressuposto da relatividade de movimentos não uniformes também. De facto pensei ter descoberto a única lei de gravitação, que corresponde ao sentido do postulado da relatividade geral, e procurei mostrar a necessidade desta solução num trabalho¹ que apareceu nestas atas do ano anterior.

Uma nova crítica mostrou-me que essa necessidade, no caminho lá adotado, não é possível ser demonstrada de forma absoluta; mas que isto parecia ser o caso devia-se a um erro. O postulado da relatividade, que eu lá exigia, é sempre satisfeito, desde que se baseie no princípio Hamiltoniano; mas na verdade não fornece um pretexto para determinar a função Hamiltoniana H do campo de gravitação. De facto, a escolha de H restringida pela equação (77) loc. cit. só exprime que H deve ser um invariante em relação a transformações lineares, cuja exigência não tem nada a haver com a relatividade da aceleração. Além disso, a escolha tomada através da equação (78) loc. cit. não é de maneira alguma fixada pela equação (77).

Por estas razões perdi completamente a confiança nas equações de campo estabelecidas por mim e procurei um caminho que limitasse as possibilidades de uma forma natural. Assim voltei à exigência de uma covariância geral das equações de campo, da qual me tinha separado, a muito custo, só há três

¹O fundamento formal da teoria de relatividade geral. Atas XLI, 1914, p.1066-1077. No que se segue, as equações deste tratado serão distinguidas das do presente trabalho adicionando “loc. cit.” à citação.

anos quando trabalhava com o meu amigo Grossmann. De facto, na altura, já estávamos muito próximos da solução do problema exposta a seguir.

Assim como a teoria de relatividade restrita se baseia no postulado de que as suas equações devem ser covariantes em relação a transformações lineares ortogonais, assim se assenta a teoria aqui exposta no postulado de covariância de todos os sistemas de equações em relação a transformações com o determinante de substituição 1.

Da magia desta teoria ninguém que realmente a percebeu conseguirá escapar; ela significa um verdadeiro triunfo do método de cálculo diferencial geral estabelecido por Gauss, Riemann, Christoffel, Ricci e Levi-Civita.

§1 Leis de formulação covariante

Como no meu trabalho do ano passado apresentei detalhadamente os métodos do cálculo diferencial absoluto, posso aqui resumir as leis de formulação covariante que aqui vão ser usados; só precisamos de analisar o que se vai alterar na teoria de covariantes, ao permitir só substituições do determinante 1.

A equação válida para quaisquer substituições²

$$d\tau' = \frac{\partial(x'_1 \cdots x'_4)}{\partial(x_1 \cdots x_4)} d\tau$$

transforma-se, como consequência da premissa da nossa teoria

$$\frac{\partial(x'_1 \cdots x'_4)}{\partial(x_1 \cdots x_4)} = 1, \quad (1)$$

em

$$d\tau' = d\tau; \quad (2)$$

o elemento de volume de dimensão quatro $d\tau$ é então um invariante. Como, além disso (equação (17) loc. cit.) $\sqrt{-g}d\tau$ é um invariante em relação a substituições arbitrárias, então o grupo que nos interessa é também

$$\sqrt{-g'} = \sqrt{-g} \quad (3)$$

O determinante dos $g_{\mu\nu}$ é então um invariante. Graças ao carácter escalar de $\sqrt{-g}$, as fórmulas fundamentais da formulação covariante permitem uma

²[Nota da tradutora: x_1, x_2, x_3, x_4 são as coordenadas no espaço-tempo com métrica $g_{\mu\nu}$.]

simplificação em relação às que são válidas para covariância geral, que, dito de forma breve, se baseia no facto de nas fórmulas fundamentais os fatores $\sqrt{-g}$ e $\frac{1}{\sqrt{-g}}$ já não aparecerem, e a diferença entre tensores e V-tensores³ desaparece. Em particular resulta o seguinte:

1. Em vez dos tensores $G_{iklm} = \sqrt{-g}\delta_{iklm}$
e $G^{iklm} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\delta_{iklm}$
(19) e (21a) loc. cit.) aparecem agora os tensores mais simples

$$G_{iklm} = G^{iklm} = \delta_{iklm} \tag{4}$$

2. As fórmulas fundamentais (29) loc. cit. e (30) loc. cit. para a extensão de tensores não podem ser substituídas por fórmulas mais simples, por causa da nossa premissa, mas sim a equação da definição da divergência, que consiste na combinação das equações (30) loc.cit. e (31) loc. cit.. Ela pode escrever-se assim⁴

$$A^{\alpha_1 \dots \alpha_l} = \sum_s \frac{\partial A^{\alpha_1 \dots \alpha_l s}}{\partial x_s} + \sum_{s\tau} \left[\left\{ \begin{matrix} s\tau \\ \alpha_1 \end{matrix} \right\} A^{\tau\alpha_2 \dots \alpha_l s} + \dots \left\{ \begin{matrix} s\tau \\ \alpha_l \end{matrix} \right\} A^{\alpha_1 \dots \alpha_{l-1} \tau s} \right] + \sum_{s\tau} \left\{ \begin{matrix} s\tau \\ s \end{matrix} \right\} A^{\alpha_1 \dots \alpha_l \tau}. \tag{5}$$

Agora, segundo (24) loc. cit. e (24a) loc. cit. tem-se

$$\sum_{\tau} \left\{ \begin{matrix} s\tau \\ s \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha s} g^{s\alpha} \left(\frac{\partial g_{s\alpha}}{\partial x_{\tau}} + \frac{\partial g_{\tau\alpha}}{\partial x_s} - \frac{\partial g_{s\tau}}{\partial x_{\alpha}} \right) = \frac{1}{2} \sum g^{s\alpha} \frac{\partial g_{s\alpha}}{\partial x_{\tau}} = \frac{\partial(\lg\sqrt{-g})}{\partial x_{\tau}}. \tag{6}$$

Esta quantidade tem então, por (3), carácter vetorial. Como consequência, o último termo do lado direito de (5) é um tensor contravariante de ordem l . Por isso estamos autorizados a substituir (5) pela

³[Nota da tradutora: V-tensores (tensores de volume) são tensores que são multiplicados por $\sqrt{-g}$.]

⁴[Nota da tradutora: Em notação moderna a equação escreve-se da forma

$$A^{\alpha_1 \dots \alpha_l} = \frac{\partial A^{\alpha_1 \dots \alpha_l s}}{\partial x_s} - [\Gamma_{s\tau}^{\alpha_1} A^{\tau\alpha_2 \dots \alpha_l s} + \dots \Gamma_{s\tau}^{\alpha_l} A^{\alpha_1 \dots \alpha_{l-1} \tau s] - \Gamma_{s\tau}^s A^{\alpha_1 \dots \alpha_l \tau}.]$$

seguinte definição mais simples da divergência

$$A^{\alpha_1 \dots \alpha_l} = \sum \frac{\partial A^{\alpha_1 \dots \alpha_l s}}{\partial x_s} + \sum_{s\tau} \left[\left\{ \begin{matrix} s\tau \\ \alpha_1 \end{matrix} \right\} A^{\tau \alpha_2 \dots \alpha_l s} + \dots \left\{ \begin{matrix} s\tau \\ \alpha_l \end{matrix} \right\} A^{\alpha_1 \dots \alpha_{l-1} \tau s} \right], \quad (5a)$$

o que queremos fazer conseqüentemente. Assim, a definição (37) loc. cit.

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} (\sqrt{-g} A^{\mu})$$

seria substituída pela definição mais simples

$$\Phi = \sum_{\mu} \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\mu}}, \quad (7)$$

a equação (40) loc. cit. para a divergência do seis-vetor⁵ contravariante, pela mais simples

$$A^{\mu} = \sum_{\nu} \frac{\partial A^{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}}. \quad (8)$$

Em vez de (41a) loc. cit., aparece devido ao que fixamos

$$A_{\sigma} = \sum_{\nu} \frac{\partial A_{\sigma}^{\nu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\tau} g^{\tau\mu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} A_{\tau}. \quad (9)$$

Uma comparação com (41b), mostra que, para a nossa fixação, a lei para a divergência é a mesma que a lei para a divergência do V-tensor, segundo o cálculo diferencial geral. É possível deduzir facilmente de (5) e (5a) que esta observação é válida para várias divergências de tensores.

3. A simplificação mais radical leva a nossa limitação a transformações do determinante 1 para os covariantes que podem ser construídos somente a partir de $g_{\mu\nu}$ e das suas derivadas. A Matemática ensina que estes covariantes podem ser todos deduzidos a partir do tensor de Riemann-Christoffel de ordem quatro, que (na sua forma covariante) é expresso por⁶

⁵[Nota da tradutora: $A^{\mu\nu}$ é designado por seis-vetor porque é um tensor antissimétrico e tem, assim, seis componentes independentes.]

⁶[Nota da tradutora: Em notação moderna o tensor é expresso por $R_{iklm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x_i \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_k \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial x_i \partial x_l} \right) + \Gamma_{im}^{\sigma} \Gamma_{kl}^{\rho} - \Gamma_{il}^{\sigma} \Gamma_{km}^{\rho}$ e (12) escreve-se da forma $G_{im} = g^{kl} R_{iklm}$.]

$$\begin{aligned}
(ik, lm) = & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x_i \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_k \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial x_l \partial x_i} \right) \\
& + \sum_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma} \left(\begin{bmatrix} i & m \\ \rho & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & l \\ \sigma & \rho \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i & l \\ \rho & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & m \\ \sigma & \rho \end{bmatrix} \right). \quad (10)
\end{aligned}$$

O problema da gravitação implica que nos interessemos sobretudo por tensores de ordem dois, que podem ser construídos a partir deste tensor de ordem quatro e $g_{\mu\nu}$ através da multiplicação interna. Por causa das propriedades de simetria evidenciadas por (10) do tensor de Riemann

$$\left. \begin{aligned}
(ik, lm) &= (lm, ik) \\
(ik, lm) &= -(ki, lm)
\end{aligned} \right\} \quad (11)$$

essa construção só pode ser efetuada de uma maneira; obtendo-se o tensor

$$G_{im} = \sum_{kl} g^{kl} (ik, lm). \quad (12)$$

Vamos deduzir este tensor para o nosso objetivo de uma forma mais vantajosa a partir de uma segunda expressão do tensor (10), proposta por Christoffel, nomeadamente⁷

$$\begin{aligned}
\{ik, lm\} = \sum_{\rho} g^{k\rho} (i\rho, lm) &= \frac{\partial \begin{Bmatrix} i & l \\ k & \end{Bmatrix}}{\partial x_m} - \frac{\partial \begin{Bmatrix} i & m \\ k & \end{Bmatrix}}{\partial x_l} \\
&+ \sum_{\rho} \left(\begin{Bmatrix} i & l \\ \rho & \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho & m \\ k & \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} i & m \\ \rho & \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho & l \\ k & \end{Bmatrix} \right). \quad (13)
\end{aligned}$$

Deste resulta o tensor G_{im} , ao multiplicá-lo por (multiplicação interna)

$$\delta_k^l = \sum_{\alpha} g_{k\alpha} g^{\alpha l} :$$

⁷Uma demonstração simples para o carácter tensorial desta expressão encontra-se na p. 1053 do meu trabalho citado várias vezes. [Nota da tradutora: “Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie”, Atas XLI].

$$G_{im} = \{ik, lm\} = R_{im} + S_{im} \quad (13)$$

$$R_{im} = -\frac{\partial \left\{ \begin{matrix} im \\ l \end{matrix} \right\}}{\partial x_l} + \sum_{\rho} \left\{ \begin{matrix} il \\ \rho \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \rho m \\ l \end{matrix} \right\} \quad (13a)$$

$$S_{im} = \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} il \\ l \end{matrix} \right\}}{\partial x_m} - \left\{ \begin{matrix} im \\ \rho \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \rho l \\ l \end{matrix} \right\} \quad (13b)$$

Restringindo-se a transformações do determinante 1, então não é só (G_{im}) um tensor, mas também (R_{im}) e (S_{im}) possuem carácter tensorial. De facto, segue da circunstância de $\sqrt{-g}$ ser um escalar, devido a (6), que $\left\{ \begin{matrix} il \\ l \end{matrix} \right\}$ é um quatro-vetor covariante. Mas (S_{im}) é, de acordo com (29) loc. cit., nada mais do que a extensão deste quatro-vetor, portanto também um tensor. Do carácter tensorial de (G_{im}) e (S_{im}) segue de (13) também o carácter tensorial de (R_{im}). Este último tensor tem para a teoria da gravitação grande importância.

§2 Observações sobre as leis diferenciais dos processos “materiais”

1. Teorema de impulsão-energia para a matéria (incluindo os processos eletromagnéticos no vácuo. Em vez da equação (42a) loc. cit. deve aparecer segundo as considerações do parágrafo anterior:

$$\sum_{\nu} \frac{\partial T_{\sigma}^{\nu}}{\partial x_{\nu}} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\tau\nu} g^{\tau\mu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} T_{\tau}^{\nu} + K_{\nu}; \quad (14)$$

onde T_{σ}^{ν} é um tensor usual, K_{ν} um quatro-vetor usual covariante (nenhum V-tensor, respetivamente V-vetor). A esta equação teremos que juntar uma observação importante para o que se segue. Esta equação de conservação levou-me, no passado, a considerar as quantidades

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu} g^{\tau\mu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}}$$

como expressão natural para as componentes do campo de gravitação, apesar de, tendo em vista as fórmulas do cálculo diferencial absoluto,

ser melhor introduzir os símbolos de Christoffel

$$\left\{ \begin{matrix} \nu \sigma \\ \tau \end{matrix} \right\}$$

em vez das outras quantidades. Isto foi um preconceito desastroso. Uma preferência do símbolo de Christoffel justifica-se sobretudo por causa da simetria dos dois índices de carácter covariante (aqui ν e σ) e porque o mesmo aparece nas equações importantes fundamentais da linha geodésica (23b) loc. cit., que, do ponto de vista físico, são as equações de movimento do ponto material num campo de gravitação. A equação (14) também não forma um contra-argumento, porque o primeiro termo do lado direito pode ser transformado em

$$\sum_{\nu\tau} \left\{ \begin{matrix} \sigma \nu \\ \tau \end{matrix} \right\} T_{\tau}^{\nu}.$$

Daí designamos no que se segue como componentes do campo de gravitação as quantidades

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} &= - \left\{ \begin{matrix} \mu \nu \\ \sigma \end{matrix} \right\} = - \sum_{\alpha} g^{\sigma\alpha} \left[\begin{matrix} \mu \nu \\ \alpha \end{matrix} \right] = \\ &= - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} g^{\sigma\alpha} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Se T_{σ}^{ν} designa o tensor de energia do acontecimento “material” total, então K_{ν} desaparece; o teorema da conservação (14) toma então a forma

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial T_{\sigma}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = - \sum_{\alpha\beta} \Gamma_{\sigma\beta}^{\alpha} T_{\alpha}^{\beta}. \quad (14a)$$

Fazemos notar que as equações de movimento (23b) loc.cit. do ponto material no campo de gravitação tomam a forma⁸

$$\frac{d^2 x_{\tau}}{ds^2} = \sum_{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\tau} \frac{dx_{\mu}}{ds} \frac{dx_{\nu}}{ds}. \quad (15)$$

2. Nas considerações dos parágrafos 10 e 11 do trabalho citado não se altera nada, só que agora as construções lá designadas por V-escalares e V-tensores têm carácter de escalares e tensores usuais.

⁸[Nota da tradutora: Estas são as equações das geodésicas em coordenadas $\{x_{\mu}\}$.]

§3 As equações de campo da gravitação

Depois do que foi dito é evidente fixar as equações de campo na forma⁹

$$R_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad (16)$$

porque já sabemos que estas equações são covariantes em relação a transformações arbitrárias do determinante 1. De facto, estas equações satisfazem todas as condições que temos que estabelecer para elas. Escritas de forma detalhada, estas são, segundo (13a) e (15)

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} + \sum_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (16a)$$

Queremos agora mostrar que estas equações de campo se podem escrever na forma hamiltoniana

$$\delta \left\{ \int \left(\mathfrak{L} - \kappa \sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \right) d\tau \right\} \quad (17)$$

$$\mathfrak{L} = \sum_{\sigma\tau\alpha\beta} g^{\sigma\tau} \Gamma_{\sigma\beta}^{\alpha} \Gamma_{\tau\alpha}^{\beta}$$

em que $g^{\mu\nu}$ varia e $T_{\mu\nu}$ deve ser tratado como constante. É que (17) é equivalente às equações

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} \right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad (18)$$

onde \mathfrak{L} é pensada como função de $g^{\mu\nu}$ e $\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} (= g_{\sigma}^{\mu\nu})$. Por outro lado, resultam de um cálculo longo, mas efetuado sem dificuldades, as relações

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}} = - \sum_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} \quad (19)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} = \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}. \quad (19a)$$

Estas formam, juntamente com (18), as equações de campo (16a).

⁹[Nota da tradutora: Einstein viria a corrigir estas equações no artigo “Die Feldgleichungen der Gravitation” (As equações de campo da gravitação).]

Agora também pode provar-se facilmente, que o princípio da conservação da energia e do impulso é satisfeito. Se se multiplicar (18) por $g_{\sigma}^{\mu\nu}$ e somar sobre os índices μ e ν , obtém-se após transformações comuns

$$\sum_{\alpha\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(g_{\sigma}^{\mu\nu} \frac{\mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} \right) - \frac{\mathfrak{L}}{\partial x_{\sigma}} = -\kappa \sum_{\mu\nu} T_{\mu\nu} g_{\sigma}^{\mu\nu}.$$

Por outro lado, segundo (14), tem-se para o tensor de energia total da matéria que

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial T_{\sigma}^{\lambda}}{\partial x_{\lambda}} = -\frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} T_{\mu\nu}.$$

Das duas últimas equações resulta que

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial}{\partial x_{\lambda}} (T_{\sigma}^{\lambda} + t_{\sigma}^{\lambda}) = 0, \quad (20)$$

onde

$$t_{\sigma}^{\lambda} = \frac{1}{2\kappa} \left(\mathfrak{L} \delta_{\sigma}^{\lambda} - \sum_{\mu\nu} g_{\sigma}^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\lambda}^{\mu\nu}} \right) \quad (20a)$$

designa o “tensor de energia” do campo gravitacional, que, de resto, só perante transformações lineares tem carácter de tensor. De (20a) e (19a) obtém-se depois de uma transformação simples

$$t_{\sigma}^{\lambda} = \frac{1}{2} \delta_{\sigma}^{\lambda} \sum_{\mu\nu\alpha\beta} g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} - \sum_{\mu\nu\alpha} g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\lambda} \quad (20b)$$

Finalmente, é ainda de interesse deduzir duas equações escalares que resultam das equações de campo. Se multiplicarmos (16a) por $g^{\mu\nu}$ e somarmos sobre μ e ν , então obtemos depois de uma transformação simples

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} - \sum_{\sigma\tau\alpha\beta} g^{\sigma\tau} \Gamma_{\sigma\beta}^{\alpha} \Gamma_{\tau\alpha}^{\beta} + \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(g^{\alpha\beta} \frac{\partial \lg \sqrt{-g}}{\partial x_{\beta}} \right) = -\kappa \sum_{\sigma} T_{\sigma}^{\sigma}. \quad (21)$$

Por outro lado, se multiplicarmos (16a) por $g^{\nu\lambda}$ e se somarmos sobre ν , então obtemos

$$\sum_{\alpha\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (g^{\nu\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}) - \sum_{\alpha\beta\nu} g^{\nu\beta} \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} \Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda} = -\kappa T_{\mu}^{\lambda},$$

ou, com respeito a (20b)

$$\sum_{\alpha\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (g^{\nu\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - \frac{1}{2} \delta_\mu^\lambda \sum_{\mu\nu\alpha\beta} g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta = -\kappa (T_\mu^\lambda + t_\nu^\lambda).$$

Daqui resulta ainda, tendo em conta (20), após uma transformação simples, a equação

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \sum_{\sigma\tau\alpha\beta} g^{\sigma\tau} \Gamma_{\sigma\beta}^\alpha \Gamma_{\tau\alpha}^\beta \right] = 0. \quad (22)$$

Mas nós exigimos, continuando um pouco, que

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \sum_{\sigma\tau\alpha\beta} g^{\sigma\tau} \Gamma_{\sigma\beta}^\alpha \Gamma_{\tau\alpha}^\beta = 0, \quad (22a)$$

de modo que (21) fica

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(g^{\alpha\beta} \frac{\partial \lg \sqrt{-g}}{\partial x_\beta} \right) = -\kappa \sum_\sigma T_\sigma^\sigma. \quad (21a)$$

Da equação (21a) resulta que é impossível escolher o sistema de coordenadas de tal forma que $\sqrt{-g}$ seja igual a 1; porque o escalar do tensor de energia não pode ser anulado¹⁰.

A equação (22a) é uma relação à qual estão subjugados só os $g_{\mu\nu}$ e que já não seria válida num novo sistema de coordenadas se resultasse de uma transformação proibida do sistema de coordenadas usado inicialmente. Esta equação exprime assim, como o sistema de coordenadas deve ser adaptado à variedade.

§4 Algumas observações sobre as qualidades físicas da teoria

As equações (22a) dão como primeira aproximação

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0.$$

¹⁰[Nota da tradutora: Einstein viria a considerar $\sqrt{-g} = 1$ na sua versão final da teoria.]

Deste modo, o sistema de coordenadas ainda não está fixado, enquanto são necessárias 4 equações para a determinação do mesmo. Por isso, podemos estabelecer de modo arbitrário para primeira aproximação

$$\sum_{\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} = 0. \quad (22)$$

Além disso, queremos introduzir, para a simplificação da apresentação, o tempo imaginário como quarta variável. Então as equações de campo (16a) adotam como primeira aproximação a forma

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha} \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}^2} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (16b)$$

da qual se torna evidente, que contém a Lei de Newton como aproximação.

O facto de que a relatividade do movimento de acordo com a nova teoria é efetivamente percebido, resulta de que entre as transformações permitidas estarem as que correspondem a uma rotação do novo sistema em relação ao antigo com velocidade angular arbitrariamente alterável, assim como transformações em que o ponto inicial do novo sistema realiza um movimento arbitrariamente prescrito no sistema antigo.

De facto, as substituições

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \tau + y \sin \tau \\ y' &= -x \sin \tau + y \cos \tau \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x' &= x - \tau_1 \\ y' &= y - \tau_2 \\ z' &= z - \tau_3 \\ t' &= t, \end{aligned}$$

onde τ , respetivamente τ_1, τ_2, τ_3 são funções arbitrárias de t , são substituições do determinante 1.

Distribuído no dia 11 de novembro.

Anexo

Equações de “Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie” (O fundamento formal da teoria de relatividade geral, A. Einstein, Atas XLI, 1066-1077, 1914), que são citadas neste artigo pela ordem aqui apresentada.

(77):

$$S_{\sigma}^{\nu} = \sum_{\mu\tau} \left(g^{\nu\tau} \frac{\partial H \sqrt{-g}}{\partial g^{\sigma\nu}} + g_{\mu}^{\nu\tau} \frac{\partial H \sqrt{-g}}{\partial g_{\mu}^{\sigma\tau}} + \frac{1}{2} \delta_{\sigma}^{\nu} H \sqrt{-g} - \frac{1}{2} g_{\sigma}^{\mu\tau} \frac{\partial H \sqrt{-g}}{\partial g_{\nu}^{\mu\tau}} \right) \equiv 0$$

(78):

$$H = \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\tau\varrho} g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial g^{\tau\varrho}}{\partial x_{\beta}}$$

(17):

$$\sqrt{g} d\tau = d\tau_0^*, \quad \text{onde } |g_{\mu\nu}| = g, \quad d\tau_0^* = \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

(19):

$$G_{iklm} = \sqrt{g} \delta_{iklm}$$

(21a):

$$G^{iklm} = \frac{1}{\sqrt{g}} \delta_{iklm}$$

(29):

$$A_{\alpha_1 \dots \alpha_l s} = \frac{\partial A_{\alpha_1 \dots \alpha_l}}{\partial x_s} - \sum_{\tau} \left[\left\{ \begin{matrix} \alpha_1 s \\ \tau \end{matrix} \right\} A_{\tau \alpha_2 \dots \alpha_l} + \left\{ \begin{matrix} \alpha_2 s \\ \tau \end{matrix} \right\} A_{\alpha_1 \tau \alpha_3 \dots \alpha_l} \dots \right]$$

(30):

$$A_s^{\alpha_1 \dots \alpha_l} = \frac{\partial A^{\alpha_1 \dots \alpha_l}}{\partial x_s} - \sum_{\tau} \left[\left\{ \begin{matrix} s \tau \\ \alpha_1 \end{matrix} \right\} A^{\tau \alpha_2 \dots \alpha_l} + \left\{ \begin{matrix} s \tau \\ \alpha_2 \end{matrix} \right\} A^{\alpha_1 \tau \alpha_3 \dots \alpha_l} + \dots \right]$$

(31):

$$A^{\alpha_1 \dots \alpha_{l-1}} = \sum_{\alpha_l s} A_s^{\alpha_1 \dots \alpha_l} \delta_{\alpha_l}^s$$

(24):

$$\left[\begin{matrix} \mu \nu \\ \sigma \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\tau}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} \right)$$

(24a):

$$\left\{ \begin{matrix} \mu \nu \\ \tau \end{matrix} \right\} = \sum_{\sigma} g^{\sigma\tau} \left[\begin{matrix} \mu \nu \\ \sigma \end{matrix} \right]$$

(37):

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} (\sqrt{g} A^{\mu})$$

(40):

$$A^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\nu} \frac{\partial (A^{\mu\nu} \sqrt{g})}{\partial x_{\nu}}$$

(41):

$$A_{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial (g_{\mu\sigma} A^{\mu\nu} \sqrt{g})}{\partial x_{\nu}} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} A^{\mu\nu} \sqrt{g} \right)$$

(41a):

$$A_{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_{\nu} \frac{\partial (A_{\sigma}^{\nu} \sqrt{g})}{\partial x_{\nu}} - \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\tau} g^{\tau\mu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} A_{\tau}^{\nu} \sqrt{g} \right)$$

(41b):

$$\mathfrak{A}_{\sigma} = \sum_{\nu} \frac{\partial \mathfrak{A}_{\sigma}^{\nu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{1}{2} \sum_{\mu\tau\nu} g^{\tau\mu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} \mathfrak{A}_{\tau}^{\nu},$$

onde $\mathfrak{A}_{\sigma} = A_{\sigma} \sqrt{g}$ e $\mathfrak{A}_{\sigma}^{\nu} = A_{\sigma}^{\nu} \sqrt{g}$ são V-tensores.

(42a):

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \mathfrak{T}_{\sigma}^{\nu}}{\partial x_{\nu}} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\tau\nu} g^{\tau\mu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} \mathfrak{T}_{\tau}^{\nu} + \mathfrak{K}_{\sigma},$$

onde $\mathfrak{T}_{\sigma}^{\nu} = T_{\sigma}^{\nu} \sqrt{g}$ e $\mathfrak{K}_{\sigma} = K_{\sigma} \sqrt{g}$ são V-tensores.

(23b):

$$\frac{d^2 x_{\tau}}{ds^2} + \sum_{\mu\nu} \left\{ \begin{matrix} \mu \nu \\ \tau \end{matrix} \right\} \frac{dx_{\mu}}{ds} \frac{dx_{\nu}}{ds} = 0$$