Álgebra e Combinatória

Editores Convidados:

António Malheiro & João Jorge Araújo (*editor consultivo*)

Álgebras de composição standard de tipo II

P. D. Beites
CMA-UBI e Departamento de Matemática
Universidade da Beira Interior
e-mail: `pbeites@ubi.pt`

A. P. Nicolás
IMUVa e Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Valladolid
e-mail: `anicolas@maf.uva.es`

Resumo: Uma caracterização das álgebras de composição *standard* de tipo II, sobre um corpo de característica diferente de dois, é apresentada.

Abstract: A characterization of the standard composition algebras of type II, over a field of characteristic different from two, is presented.

palavras-chave: Álgebra de Hurwitz; identidade; composição *standard* de tipo II.

keywords: Hurwitz algebra; identity; standard composition of type II.

1 Estado da arte das álgebras de composição

Os elementos mais conhecidos da classe das álgebras de composição são as álgebras de Hurwitz. Estas, contrariamente às restantes álgebras de composição, possuem identidade e, consequentemente, são de dimensão finita, [3]. Sobre um corpo de característica diferente de dois, pelo Teorema de Hurwitz generalizado em [5], qualquer álgebra de Hurwitz é isomorfa a uma das seguintes álgebras: o corpo base; uma extensão quadrática separável do corpo base; uma álgebra de quaterniões generalizada; uma álgebra de octoniões generalizada.

Até ao momento, as álgebras de composição sem identidade mas satisfazendo uma condição adicional (ou a associatividade da norma, ou a identidade flexível, ou uma identidade de Moufang, ou a associatividade das terceira e/ou da quarta potências, ou grau dois) foram estudadas por Cuenca-Mira, Elduque, Myung, Okubo, Osborn, Pérez-Izquierdo e Sánchez-Campos. Mais detalhes podem ser consultados em [4] e referências aí citadas.

2 Conceitos e resultados em torno do tipo II

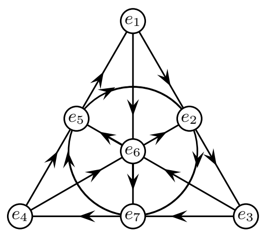
Sejam F um corpo tal que $\text{car}(F) \neq 2$ e V uma álgebra sobre F, com multiplicação denotada por justaposição.

A álgebra V é uma *álgebra de composição* se está munida de uma forma quadrática não degenerada (a *norma*) $n : V \to F$ que é *multiplicativa*, isto é, para quaisquer $x, y \in V$, $n(xy) = n(x)n(y)$. Dizer que a forma n é *não degenerada* significa que a forma bilinear simétrica associada $n(x, y) = \frac{1}{2}(n(x+y) - n(x) - n(y))$ é não degenerada.

As álgebras de Hurwitz são o ingrediente principal para construir álgebras de composição de dimensão finita sem identidade, [3]. Desta referência, recorrendo ao chamado truque de Kaplansky, tem-se também que a dimensão de qualquer álgebra de composição de dimensão finita é igual a $1, 2, 4$ ou 8.

A modificação como se segue da multiplicação $*$ de uma álgebra de Hurwitz $(U, *)$, com identidade e, conduz a novas álgebras de composição relativamente à mesma forma quadrática n: (I) $x * y$, (II) $\overline{x} * y$, (III) $x * \overline{y}$, (IV) $\overline{x} * \overline{y}$, onde $x \mapsto \overline{x} = n(x, e)e - x$ define a involução *usual* de $(U, *)$ e, para qualquer $x \in U$, $n(x)e = \overline{x} * x = x * \overline{x}$. As álgebras assim construídas são chamadas *álgebras de composição standard* de *tipo* I, II, III, IV, respetivamente, *associadas a* $(U, *)$. Se $\dim U = 1$, então todas as álgebras de composição *standard* são o corpo base F. Em dimensões superiores, as de diferentes tipos não são isomorfas.

Daqui em diante, pode assumir-se, estendendo escalares se necessário, que F é algebricamente fechado. Seja $(\mathbb{H}, *)$ a álgebra quaterniónica sobre F com base $\{e_i : i \in \{0, 1, 2, 3\}\}$ e tabela de multiplicação dada por $e_1 * e_1 = e_2 * e_2 = e_3 * e_3 = e_1 * e_2 * e_3 = -e_0$, onde e_0 é a identidade. Seja $(\mathbb{O}, *)$ a álgebra octoniónica sobre F com base $\{e_i : i \in \{0, \ldots, 7\}\}$, com tabela de multiplicação dada por $e_i * e_i = -e_0$, para $i \in \{1, \ldots, 7\}$ e onde e_0 é a identidade, e com o plano de Fano subsequente, onde a ordenação cíclica de cada três elementos sobre a mesma linha é mostrada pelas setas.



Considerem-se, sobre F, as álgebras $\mathcal{H}$ e $\mathcal{O}$ de composição *standard* de tipo II associadas às álgebras de Hurwitz $\mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$. A multiplicação, denotada por justaposição, é dada por $xy := \overline{x} * y$. Em [6] estudaram-se certas identidades satisfeitas por $\mathcal{H}$ e $\mathcal{O}$. Algumas foram obtidas pelo método dos vetores aleatórios que envolve Álgebra Linear Computacional sobre matrizes. Ainda na referência [6], provou-se que $\mathcal{H}$ e $\mathcal{O}$ satisfazem a identidade $x^2y = n(x)y$.

3 Caracterização do tipo II

Seja F um corpo tal que $\mathrm{car}(F) \neq 2$. Recorde-se que a única álgebra de composição de dimensão 1 sobre F é o corpo base. Em dimensão 2, tem-se a classificação seguinte dada por Petersson.

Teorema 1 [2] *Seja A uma álgebra de composição de dimensão 2 sobre F com multiplicação denotada por justaposição. Então pode definir-se uma multiplicação $*$ em A tal que $(A, *)$ é uma álgebra de Hurwitz e a justaposição é dada por uma das seguintes fórmulas:*

1. $xy = x * y$, 2. $xy = \overline{x} * y$, 3. $xy = x * \overline{y}$, 4. $xy = u * \overline{x} * \overline{y}$, onde u é um elemento fixo com $n(u) = 1$ e $x \mapsto \overline{x}$ define a involução usual de $(A, *)$.

Teorema 2 *Seja A uma álgebra de composição de dimensão 2 sobre F, com multiplicação denotada por justaposição, que satisfaz a identidade $x^2y = n(x)y$. Então A é uma álgebra de composição standard de tipo II.*

Demonstração: Invocando o Teorema 1, seja e_0 a identidade de $(A, *)$. Supondo 1. do mesmo, de $x^2y = n(x)y$ obtém-se $x * x * y = \overline{x} * x * y$. Com $y = e_0$ e assumindo que $n(x) \neq 0$, chega-se a $x = \overline{x}$. Sendo $\{e_0, l\}$ uma base da álgebra quadrática $(A, *)$, $l * l = \mu e_0$ com $\mu \in F\backslash\{0\}$ (ver [5]). Note-se que $n(l) \neq 0$ e que $\overline{l} = -l$, contradição. Assumindo 3. do já mencionado teorema, verifica-se que $x^2y = x * \overline{x} * \overline{y} = n(x)\overline{y}$ e tem-se $x^2y = n(x)y$. Mas, tomando $x = e_0$, obtém-se $\overline{y} = y$, contradição. Supondo 4. do Teorema 1, deduz-se que $x^2y = u * \overline{u * \overline{x} * \overline{x}} * \overline{y} = u * \overline{u} * x * x * \overline{y} = n(u)x * x * \overline{y} = x * x * \overline{y}$ e tem-se $x^2y = n(x)y$. Com $x = e_0$ vem $\overline{y} = y$, contradição. $\square$

Quanto às álgebras de composição de dimensão 4 sobre F, a classificação dada no teorema subsequente deve-se a Stampfli-Rollier.

Teorema 3 [1] *A multiplicação, denotada por justaposição, de uma álgebra de composição de dimensão 4 sobre F é dada por uma das seguintes fórmulas:*

1. $xy = a * x * (a * b)^{-1} * y * b$,
2. $xy = (b * a)^{-1} * \overline{x} * a * y * b$,
3. $xy = a * x * b * \overline{y} * (b * a)^{-1}$,
4. $xy = \overline{a} * \overline{x} * (b * a)^{-1} * \overline{y} * \overline{b}$,

onde $*$ denota a multiplicação de uma álgebra de quaterniões generalizada, $x \mapsto \overline{x}$ define a sua involução usual e a, b são elementos fixos com $n(a) \neq 0 \neq n(b)$.

Para as álgebras de composição *standard* de tipo II com dimensão 4 sobre F, recorrendo ao resultado precedente, pode pensar-se de forma similar ao que foi feito no Teorema 2 em dimensão 2. Mas esta estratégia não pode ser continuada, pois não se conhece uma descrição, como as dos Teoremas 1 e 3, para as álgebras de composição de dimensão 8 sobre F. Contudo, via topologia de Zariski, a caracterização das álgebras de composição *standard* de tipo II com a identidade $x^2y = n(x)y$ pode ser obtida.

Teorema 4 [6] *Seja A uma álgebra de composição de dimensão arbitrária sobre F, com multiplicação denotada por justaposição, que satisfaz a identidade $x^2y = n(x)y$. Então A é uma álgebra de composição standard de tipo II.*

Agradecimentos. P. D. Beites e A. P. Nicolás foram financiados, respetivamente, pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia, projeto PEst-OE/MAT/UI0212/2011, e pelo Ministerio de Educación y Ciencia, projeto MTM2010-18370-C04-01. Os autores agradecem as sugestões do professor Alberto Elduque para [6].

Referências

[1] C. Stampfli-Rollier, "4-dimensionale Quasikompositionsalgebren", *Arch. Math.*, Vol. 40, No. 1 (1983), pp. 516–525.

[2] H. P. Petersson, "Quasi composition algebras", *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, Vol. 35, No. 3-4 (1971), pp. 215–222.

[3] I. Kaplansky, "Infinite-dimensional quadratic forms admitting composition", *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 4, No. 6 (1953), pp. 956–960.

[4] J. Cuenca-Mira e E. Sánchez-Campos, "Composition algebras satisfying certain identities", *J. Algebra*, Vol. 306, No. 2 (2006), pp. 634–644.

[5] N. Jacobson, "Composition algebras and their automorphisms", *Rend. Circ. Mat. Palermo*, Vol. 7, No. 1 (1958), pp. 55–80.

[6] P. D. Beites e A. P. Nicolás, "Standard composition algebras of types II and III", (2014), submetido.

Sets of Parter vertices which are Parter sets

Rosário Fernandes
Faculdade de Ciências e Tecnologia - UNL
2829-516 Caparica, Portugal
e-mail: `mrff@fct.unl.pt`

Resumo: Dada uma árvore G, veremos quais os vértices de G que são vértices de Parter e quais é que formam um conjunto de Parter.

Abstract Let G be a tree. We will see which vertices of G are Parter vertices and which form a Parter set.

palavras-chave: Conjunto de Parter; vértice de Parter; valores próprios.

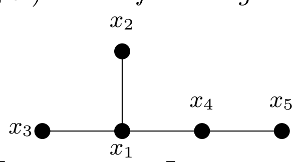
keywords: Parter set; Parter vertex; eigenvalue.

1 Introdução

Let $G = (X, U)$ be a tree (connected undirected graph without cycles), with n vertices $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Let $A = [a_{i,j}]$ be an n-by-n real symmetric matrix. We say that A is a matrix associated with G if $a_{i,j} \neq 0$, for $i \neq j$, if and only if there is an edge between x_i and x_j.

So, if G is a tree with $n \geq 2$ vertices, there are many matrices associated with G.

Example 1.1 *Let $G = (X, U)$ be the following tree*



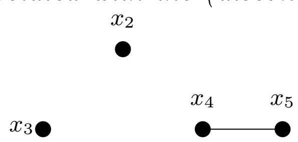
$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ and } A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ *are two distinct matrices associated with G.*

Let A be an n-by-n matrix associated with G and i be an integer such that $1 \leq i \leq n$. We denote by $A(i)$ the principal matrix of A resulting from deletion of row and column i. When T is a subgraph of G, we denote by $A[T]$ the principal submatrix of A associated with T. We denote the multiplicity of $\lambda \in \mathbb{R}$ as an eigenvalue of A (this is, $\det(A - \lambda I_n) = 0$) by $m_A(\lambda)$.

Let λ be an eigenvalue of A, we say that a vertex x_i of G is a weak Parter vertex, for λ relative to A, when λ is an eigenvalue of $A(i)$ with multiplicity $m_{A(i)}(\lambda) = m_A(\lambda) + 1$.

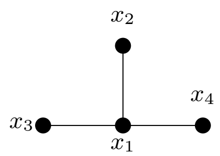
Example 1.2 *The real number* 1 *is an eigenvalue of multiplicity* 1 *of the matrix* $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$*, associated with the tree G (last example).*

Since 1 *is an eigenvalue of the matrix* $A_2(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *with multiplicity* 2*, we say that the vertex* x_1 *is a weak Parter vertex. Note that the matrix* $A_2(1)$ *is a matrix associated with the (disconnected) graph with* 3 *components:*



Moreover, 1 *is an eigenvalue of the principal submatrix of* A_2 *associated with the graph* $G_2 = (\{x_2\}, \emptyset)$ *and with the graph* $G_3 = (\{x_3\}, \emptyset)$ *(two components of the above graph).*

But 1 *also is an eigenvalue of the matrix* $A_2(5) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *with multiplicity* 2*. Consequently, we say that the vertex* x_5 *is a weak Parter vertex. Note that the matrix* $A_2(5)$ *is a matrix associated with the tree*



After this example, we see that different kinds of weak Parter vertices origin different graphs. The generalization of Parter-Wiener Theorem (generalized by C.R.Johnson, A. Leal Duarte, C.M. Saiago, [2]) answered this problem. Remark that originally this theorem was stated for Hermitian matrices, but since a real symmetric matrix is an hermitian matrix, we can write:

Theorem 1.3 ([2], Theorem 2) *If G is a tree, A is a matrix associated with G, x_l is a vertex of G and λ is an eigenvalue of A and of $A(l)$, then,*

(a) *there is a vertex x_j of G such that $m_{A(j)}(\lambda) = m_A(\lambda) + 1$.*

(b) *if $m_A(\lambda) \geq 2$, then x_j may be chosen so that there are, at least, 3 components $T_1,\ T_2,\ T_3$ of $G - x_j$ with $m_{A[T_i]}(\lambda) \geq 1$, for $1 \leq i \leq 3$.*

(c) *if $m_A(\lambda) = 1$, then x_j may be chosen so that there are 2 components $T_1,\ T_2$ of $G - x_j$ with $m_{A[T_i]}(\lambda) = 1$, for $1 \leq i \leq 2$.*

Where $G - x_j$ is the subgraph of G resulting from deletion of vertex x_j.

Therefore, we have the definition of Parter vertex.

Definition 1.4 *Let G be a tree, A be a matrix associated with G, x_j be a vertex of G and λ be an eigenvalue of A. We say that x_j is a Parter vertex if x_j satisfies (a), (b) and (c) of Theorem 1.3*

Consequently, in Example 1.2, x_1 is a Parter vertex of G but x_5 is not a Parter vertex of G.

Definition 1.5 *Let G be a tree, A be a matrix associated with G, λ be an eigenvalue of A and $y_1, y_2, \ldots, y_k$ be Parter vertices. We say that $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ is a Parter set, for λ relative to A, if $m_{A[G-\{y_1,y_2,\ldots,y_k\}]}(\lambda) = m_A(\lambda) + k$, where $G - \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ is the subgraph of G resulting from deleting the vertices $y_1, y_2, \ldots, y_k$.*

Several authors observed that there are sets of Parter vertices which are not Parter sets. Indeed, in [1], Example 2.4, the authors constructed a tree G, a matrix A associated with G having an eigenvalue λ with multiplicity 4, and such that G has two Parter vertices which did not form a Parter set.

So, we can ask: Are there a tree and a matrix associated with it having an eigenvalue with multiplicity less than 4, such that there is a set of Parter vertices which is not a Parter set? The answer is “no” as we will see in the next section.

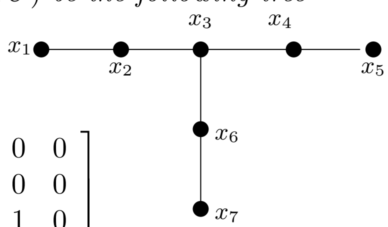
2 Results

Theorem 2.1 ([3], Theorems 3.4, 4.2 and 5.6) *If G is a tree, A is a matrix associated with G, λ is an eigenvalue of A with multiplicity $\alpha \leq 3$ and $y_1, y_2, \ldots, y_k$ are Parter vertices, for λ relative to A, then, $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ is a Parter set, for λ relative to A.*

When the multiplicity of the eigenvalue λ of A is 2 (only in this condition, as we will see in the next example), there is an interesting relation between the Parter vertices:

Theorem 2.2 ([3], Theorem 4.2) *If G is a tree, A is a matrix associated with G, λ is an eigenvalue of A with multiplicity $\alpha = 2$ and $y_1, y_2, \dots, y_k$ are Parter vertices, for λ relative to A, then, $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ is a Parter set, for λ relative to A, and there is a walk of G passing through these vertices.*

Example 2.3 *Let $G = (X, U)$ be the following tree*



$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ *is a matrix associated with G and 1 is an eigenvalue of A_3 with multiplicity 1. However, x_2, x_4, x_6 are Parter vertices but there is no walk of G passing through these vertices.*

Referências

[1] C.R. Johnson, A.Leal Duarte, C.M. Saiago, B.D. Sutton, A.J. Witt, “On the relative position of multiple eigenvalues in the spectrum of an Hermitian matrix with a given graph”, *Linear Algebra and its Applications*, Vol.363 (2003) pp.147-159.

[2] C.R. Johnson, A. Leal Duarte, C.M. Saiago, “The Parter-Wiener theorem: refinement and generalization”, *Siam J. Matrix Anal. Appl.*, Vol.25 (2003) pp.352-361.

[3] R. Fernandes, H.F. da Cruz, “Sets of Parter vertices which are Parter sets”, *Linear Algebra and its Applications*, vol.363 (2014) pp.147-159.