Ensino da Matemática

Editor Convidado: Paula Reis

Sangaku, a geometria nos santuários do Japão

Margarida Matias Pinto
e-mail: mmatiaspinto@gmail.com

Resumo: Sob os telhados de alguns templos xintoístas do Japão podem ver-se velhas tábuas de madeira decoradas com problemas de geometria euclidiana, repletas de desenhos onde circunferências, elipses e quadrados se intersectam. Quem as colocou lá? Com que propósito?

Abstract Under the roofs of some Shinto shrines in Japan we can find old wooden boards decorated with problems of Euclidean geometry, full of drawings where circles, ellipses and squares intersect. Who put them there? Why ?

palavras-chave: Sangaku; geometria; Japão; xintoísmo.

keywords: Sangaku; geometry; Japan; Shinto.

1 Introdução

Quem visita pela primeira vez o Japão surpreende-se ao encontrar tábuas de madeira decoradas com coloridas figuras geométricas. Chamam-se *sangaku* e foram comuns na época Edo, nos séculos XVII a XIX. O Japão atravessava um longo período de isolamento em relação ao ocidente e a própria comunicação interna era difícil. Os templos e santuários, locais de reunião por excelência, foram utilizados para a divulgação de ideias e os *sangaku* eram aí colocados tanto por cidadãos comuns que manifestavam aos deuses a sua gratidão pela ajuda concedida na resolução de um problema particularmente difícil da vida real, como por matemáticos consagrados que pretendiam lançar um desafio aos seus pares. Também os jovens aspirantes a matemáticos os afixavam, exprimindo o seu talento, desejosos de chamar a atenção dos mestres e de, assim, conseguirem ser convidados a ingressar numa escola para prosseguirem os seus estudos. Serviam ainda como difusor de conhecimentos e veículo de publicidade das escolas que enviavam representantes às zonas remotas do país e que assim anunciavam aos habitantes a chegada de um mestre.

Alguns *sangaku* são extremamente simples e resolvem-se por aplicação do teorema de Pitágoras ou semelhanças de triângulos, outros exigem conhecimentos de séries ou integrais e muitos envolvem cálculos que, não sendo difíceis, são trabalhosos.

Comum a todos eles é a escassez de informação, a falta de rigor nos enunciados. Em geral apenas têm o desenho, o desafio e o nome do autor; raramente é acrescentado um esboço da resolução. Assume-se que as figuras obedecem ao que os olhos vêem: os círculos que se tocam são tangentes, o que aparenta ser um quadrado ou um triângulo isósceles é-o realmente.

2 Alguns *sangaku*

Vejamos quatro exemplos simples em que tomamos como certas as relações que as figuras nos mostram. São atividades que podem ser desenvolvidas com alunos dos ensinos básico e secundário desde que, neste caso, lhe sejam fornecidos os dados aqui omissos. Em todos eles temos à esquerda a figura original e à direita uma construção auxiliar.

2.1 Dois círculos

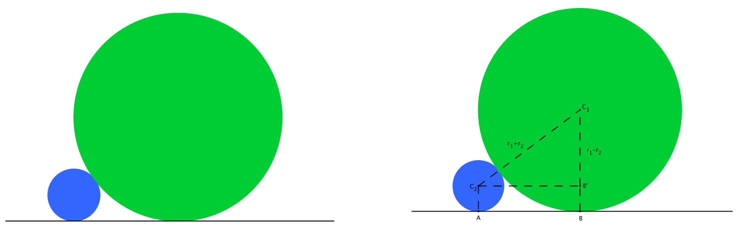


Figura 1: Dois círculos.

Relacionar a distância dos pontos de tangência da recta com os círculos e os seus raios.

A construção auxiliar sugerida pela figura da direita e a aplicação do teorema de Pitágoras levam-nos à conclusão:

$$\overline{AB}^2 = 4r_1r_2$$

2.2 Triângulo inscrito

Calcular o raio do círculo a partir de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ *e* $\overline{CM}$.

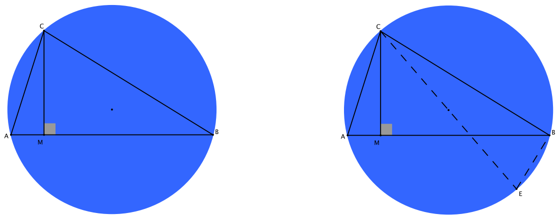


Figura 2: Triângulo inscrito.

Da semelhança dos triângulos $[ACM]$ e $[BCE]$ podemos concluir que

$$r = \frac{\overline{BC} \times \overline{AC}}{\overline{CM}}$$

2.3 Anjo com hóstia

Escrever os raios dos círculos como função do lado do quadrado.

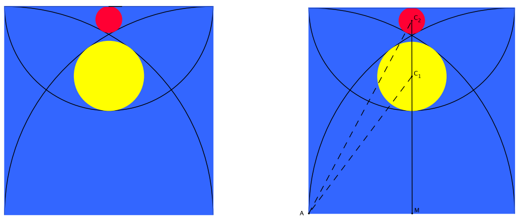


Figura 3: Anjo com hóstia.

A resolução deste problema passa pela aplicação do teorema de Pitágoras a cada um dos dois triângulos retângulos da figura auxiliar.

2.4 Círculos e semicírculo

Relacionar os raios dos dois círculos com o do semicírculos.

Comecemos por escrever os lados dos triângulos $[ACM]$ e $[CDG]$ em função do raio do semicírculo e de $\overline{CM}$ e os lados dos triângulos $[ACM]$ e $[ACF]$ em função do raio do semicírculo e de $\overline{EF}$. A semelhança dos três triângulos e alguns cálculos levam-nos a concluir que os raios dos círculos de centros D e E expressos em função do raio do semicírculo são, respectivamente $\frac{r}{2}$ e $\frac{1}{8}r$.

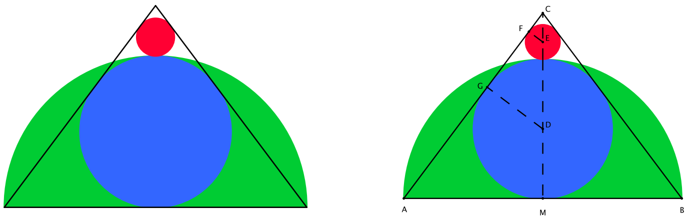


Figura 4: Círculos e semicírculo.

3 Considerações finais

Os exemplos aqui apresentados podem, como foi dito inicialmente, ser trabalhados por alunos dos ensinos básico e secundário com a inclusão no enunciado dos dados que as figuras deixam adivinhar. Os exemplos permitem mesmo diferentes graus de dificuldade bastando, para tal, concretizar alguns dos valores de raios ou lados.

Para mais exemplos de *sangaku* e respetivas demonstrações sugere-se a leitura do número 165 da *Gazeta de Matemática*.

Referências

[1] H. Fukagawa e T. Rothman *Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry*, Princeton, New Jersey, 2008..

[2] G. Huvent, *Sangaku, Le mystère des énigmes géometriques japonaises*, Dunod, New York, 2008.

[3] F. J. Capitán, *Problemas San Gaku*, Córdoba, 2003.

[4] M.M. Pinto *Gazeta de Matemática 165*, Lisboa 2011.

Os Problemas de Matemática de Almada Negreiros

Pedro J. Freitas
CELC e Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
Av Prof Gama Pinto 2
1649-003 Lisboa Portugal
e-mail: pjfreitas@fc.ul.pt

Simão Palmeirim Costa
CIEBA, Centro de Investigação e de Estudos em Belas-Artes e FBAUL
Largo da Academia Nacional de Belas-Artes
1249-058 Lisboa, Portugal
e-mail: simaopalmeirim@gmail.com

Resumo: Está em curso uma análise do espólio de Almada Negreiros, que inclui várias obras com uma forte componente geométrica. Apesar de o autor ter como intenção primeira produzir obras de arte, muito do seu trabalho pode ser apreciado matematicamente. Neste artigo apresentaremos alguns desenhos que podem ser lidos como problemas de geometria e apresentamos, como exemplo, a solução de um deles.

Abstract The estate of Almada Negreiros is currently undergoing inventory, and it incudes many works with a strong geometrical flavour. Even though the author's first intention was to produce artworks, a lot of his production can be appreciated from a mathematical viewpoint. In this paper we present some drawings that can be interpreted as problems in geometry and we present the solution to one of them.

palavras-chave: resolução de problemas, geometria, arte, Almada Negreiros

keywords: problem-solving, geometry, art, Almada Negreiros

1 Motivação

Almada Negreiros (1893-1970) foi um dos artistas mais marcantes do século vinte em Portugal. Debruçou-se sobre áreas tão diversas como a literatura, o teatro, a poesia ou as artes plásticas, e foi nestas últimas que, partir de certa altura, vem a dedicar-se à produção de desenhos e pinturas com teor fortemente geométrico. Este interesse pela geometria surge do fascínio pela pintura portuguesa antiga, nomeadamente pelos Painéis de São Vicente, que Almada analisou ao longo de cerca de cinquenta anos. Inicialmente o seu estudo é apenas sobre a composição dos próprios painéis, mas rapidamente vem a incluir também estudos sobre a sua posição numa parede da Capela do Fundador no Mosteiro da Batalha, estudo esse que veio também a incluir o *Ecce Homo* e mais algumas tábuas pintadas que, segundo os estudos geométricos de Almada, seriam um conjunto feito explicitamente para esta parede.

A visão da geometria enquanto chave para descrever a composição de uma pintura veio a despertar um fascínio mais profundo: a partir de certa altura, Almada postula a existência de um Cânone geométrico subjacente a toda a arte, que ilustra com a análise de objetos e estudos vindos de várias proveniências: um vaso da Babilónia, um friso do palácio de Cnossos, ou um desenho de Leonardo da Vinci chamado *Figura Supérflua Ex Errore* (que vem a incluir no painel *Começar*). Segundo o próprio Almada, os elementos deste Cânone seriam os seguintes.

> A divisão simultânea do quadrado e do círculo em partes iguais e partes proporcionais é a origem simultânea das constantes da relação nove/dez, grau, medida e extrema razão e prova dos nove.[1]

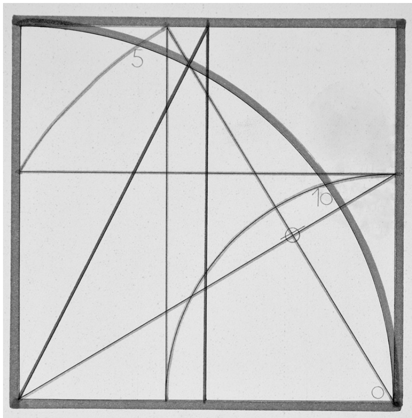
Assim, as obras geométricas que Almada produz (especialmente a partir dos anos 50) são exercícios de explicitação das relações entre os elementos deste Cânone, que deveria ser imediatamente captável, segundo o autor. Ora, sendo estas primeiramente obras de arte, elas podem ser interpretadas matematicamente. Perante as construções geométricas almadianas, podemos perguntar-nos por exemplo se são ou não exatas, e se forem, podemos tentar encontrar uma demonstração para essa exatidão, tornando assim estas figuras em problemas de matemática (subvertendo, é certo, a sua intenção inicial). É isso que faremos na próxima secção, analisando uma construção geométrica de Almada Negreiros.

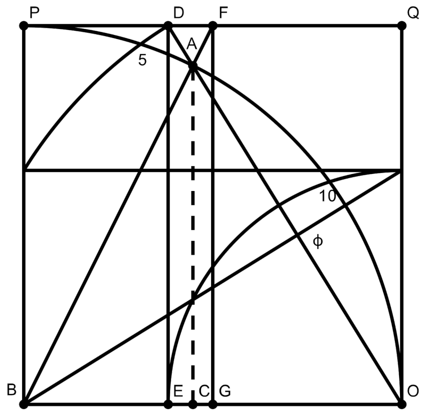
2 Linguagem do Quadrado

Encontra-se no espólio de Almada uma coleção interessantíssima de desenhos com conteúdo exclusivamente geométrico, apresentando construções baseadas num quadrado com um quarto de circunferência inscrito, ou um retângulo formado por dois quadrados com meia circunferência. Esta co-

[1] *Assim Fala Geometria*, 1960 (Diário de Notícias, 16 de junho).

leção tem o nome genérico *Linguagem do Quadrado*. Analisamos aqui um desses desenhos.





Os números 5 e 10 referem-se à quinta e décima partes do círculo, respetivamente, medidas a partir de O, e a letra ϕ afirma que o retângulo $[DEOQ]$ é um retângulo de ouro. Neste caso, todas as afirmações são exatas, e passamos a fazer as verificações. Para ver que o retângulo é de ouro, basta verificar que $DE/EO = \phi$. É mais simples neste caso verificar que

$$\frac{EO}{DE} = \frac{1}{\phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Uma vez que os triângulos $[DEO]$ e $[ACO]$ são semelhantes, temos

$$\frac{EO}{DE} = \frac{OC}{AC} = \frac{OB - BC}{AC} = \frac{OB}{AC} - \frac{BC}{AC} = \frac{AB}{AC} - \frac{BC}{AC}.$$

Usamos agora a semelhança dos triângulos $[ACB]$ e $[FGB]$, notando que em ambos os casos o cateto maior mede o dobro do menor, uma vez que o retângulo $[BPFG]$ é meio quadrado. Portanto $BC = (1/2)AC$ e

$$AC^2 + \left(\frac{1}{2}AC\right)^2 = AB^2 \Leftrightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{5}{4}.$$

Assim

$$\frac{EO}{DE} = \frac{AB}{AC} - \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\phi}$$

como desejávamos.

Quanto à quinta e décima partes da circunferência, Almada afirma que as cordas determinadas por estes arcos são respetivamente $[EO]$ e $[DO]$. Se r for o raio da circunferência (e o lado do quadrado), estes segmentos têm as seguintes medidas, de acordo com os cálculos já feitos:

$$\overline{EO} = \frac{r}{\phi} \quad \text{e} \quad \overline{DO} = \frac{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{2} r.$$

Ora, sabendo que a corda de um arco de medida α é dada por $2r\sin(\alpha/2)$, fazendo as contas para os arcos de 36º e 72º e consultando uma tabela de senos, verificamos que estes valores são exatos.

3 Conclusão

No exemplo estudado, as medidas apresentadas eram exatas, mas isto nem sempre acontece. Almada muitas vezes apresenta construções para a sétima e a nona partes do círculo (até mesmo no monumental mural *Começar*), quando se sabe que estas partes não se conseguem determinar exatamente com régua não graduada e compasso, pelo Teorema de Gauss-Wantzel.

Teorema de Gauss-Wantzel. *É possível dividir a circunferência em n partes iguais com régua não graduada e compasso se e só se*

$$n = 2^k p_1 \ldots p_t$$

em que $p_1, \ldots, p_t$ são primos de Fermat distintos.

No entanto, e em geral, as aproximações são bastante boas, sendo algumas mesmo indetetáveis no contexto da observação simples de uma obra de arte.

Estes desenhos, e outros constantes de vários cadernos da autoria de Almada Negreiros, serão em breve compilados num livro de problemas em que o leitor é convidado a fazer a análise matemática das figuras. Esperamos que a análise simples aqui feita possa abrir o apetite.

Este trabalho foi realizado no âmbito do projeto Modernismo Online (www.modernismo.pt), da Faculdade de Ciências Sociais e Humanas da Universidade Nova de Lisboa, financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia, que procura reunir e arquivar, em formato digital, a herança material do modernismo português.

Agradecemos à família de Almada Negreiros a possibilidade de reproduzir aqui estas obras e o respetivo estudo.

Teoremas elementares clássicos na sala de aula

Luís Miguel de Freitas Bernardino
Agrupamento de Escolas de Nun' Álvares
Arrentela, Seixal
e-mail: `bernluis@gmail.com`

Resumo: Nesta apresentação procuramos mostrar o interesse do estudo de alguns teoremas elementares clássicos, tanto para a criação de propostas de trabalho como para a satisfação pessoal de cada docente e também para a revisão de alguns teoremas que voltaram a fazer parte do currículo da disciplina de matemática.

palavras-chave: Teoremas; problemas; ensino.

Francisco Gomes Teixeira afirmou, numa conferência que proferiu em 1923 em Salamanca e em 1925 no Porto, que *"os que se ocupam da matemática começam a estudá-la pelo que tem de útil, principiam a amá-la quando compreendem o que tem de belo e apaixonam-se por ela quando subiram assaz alto para abranger o que tem de sublime."*

Nesta linha, cremos que a resolução de problemas é o que a matemática tem de mais belo. Mas como aumentar as competências dos nossos alunos para este tema?

Pensamos que tal se consegue com a proposta de resolução de problemas, escolhidos com algum cuidado, procurando que sejam diversificados, interessantes e não em número excessivamente elevado.

O estudo de teoremas elementares clássicos poderá ser um meio privilegiado para atingir tais objetivos uma vez que, aos estudarmos as demonstrações destes, deparamo-nos com as ideias essenciais para a resolução da maioria dos problemas que possam ser propostos o que nos leva a compreender René Descartes (1596-1650) quando afirma: *"Cada problema que eu resolvi transformou-se numa regra, que servisse mais tarde para resolver outros problemas."*

Deste modo, abordaremos alguns resultados clássicos associados a triângulos, a circunferências e a ternos pitagóricos (TP).

Os problemas geométricos apresentados tiveram por base o trabalho desenvolvido para a obtenção do grau de mestre, o qual teve um tema central

Encontro Nacional da SPM 2014, Ensino da Matematica, pp. 25-28

relacionado com coordenadas baricêntricas, para o que foi necessário o estudo de alguns resultados que chamamos teoremas fundamentais: Teorema de Steiner; Fórmula de Herão; Teorema de Menelau e Teorema de Ceva. Para a demonstração destes teoremas fundamentais precisamos de resultados preliminares, aos quais, nesta apresentação, chamamos de resultados clássicos: Teorema do cateto; Teorema dos cossenos; Teorema das áreas; Teorema dos senos; Teorema da corda; Teorema da bissetriz e relação entre ângulo ao centro e ângulo inscrito.

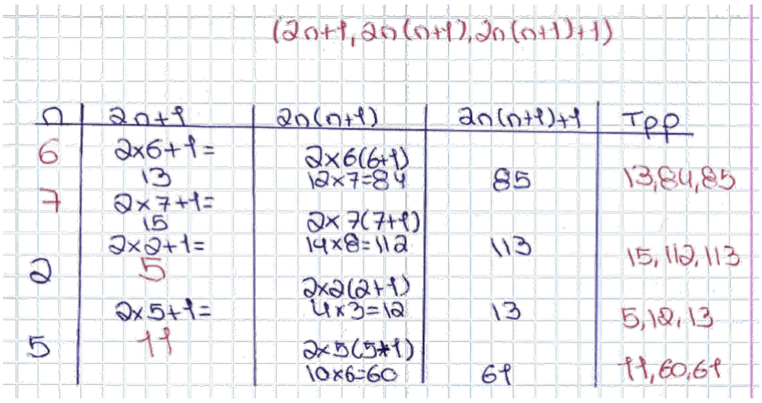
Realce-se que há uma grande semelhança entre esta lista de resultados e a que é indicada como Teoremas fundamentais sobre Circunferências e Triângulos, pelo projeto Delfos, responsável pela preparação e seleção das equipas que representam Portugal em Olimpíadas de Matemática a nível internacional, na sua brochura *Experiencia IV: Geometria*.

Estes teoremas são importantes, o que se pode inferir do facto de não só alguns já terem feito parte do currículo da disciplina de matemática, bem como, para o caso específico do Teorema dos senos e do Teorema dos cossenos, passarem a integrar o Programa e Metas de Secundário, aquando da lecionação do domínio *Trignometria e Funções Trignométricas*, ao nível do 11º ano.

Já as atividades com os ternos pitagóricos assentaram num trabalho de pesquisa que foi feito no âmbito do RMM11 (Este trabalho tem por base a palestra *A Very Useful Pythagorean Tree*, da autoria de Alda Carvalho e Carlos Santos), que possibilitou o conhecimento de diversas formas de gerar TP e Ternos Pitagóricos Primitivos (TPP). Assim, são apresentados alguns exemplos de resoluções feitas por alunos, salientando-se as dificuldades, por eles manifestadas.

O estudo dos TP permitiu preparar atividades que foram apresentadas a alunos de 8º ano e a alunos de cursos de educação e formação. Nestas atividades trabalhou-se a soma de racionais, a determinação de termos de sucessões não elementares bem como a determinação do quadrado de binómios não elementares ou pouco usuais no trabalho em sala de aula, conforme exemplos apresentados nas figuras 1 a 3.

Foi possível propor atividades com graus de dificuldade diversos, permitindo adequá-las ao distinto perfil dos alunos. Verificou-se que estes se revelaram mais persistentes na realização das tarefas, ultrapassando algumas com grau de dificuldade superior ao que habitualmente fazem. Pareceu-nos que tal se deveu ao facto de eles obterem prazer na verificação de que os termos das sucessões que iam obtendo constavam da tabela de TPP abaixo apresentada e que esteve projetada durante a realização da tarefa.



(2n+1, 2n(n+1), 2n(n+1)+1)

n	2n+1	2n(n+1)	2n(n+1)+1	Tpp
6	2×6+1= 13	2×6(6+1) 12×7=84	85	13,84,85
7	2×7+1= 15	2×7(7+1) 14×8=112	113	15,112,113
2	2×2+1= 5	2×2(2+1) 4×3=12	13	5,12,13
5	2×5+1= 11	2×5(5+1) 10×6=60	61	11,60,61

Figura 1

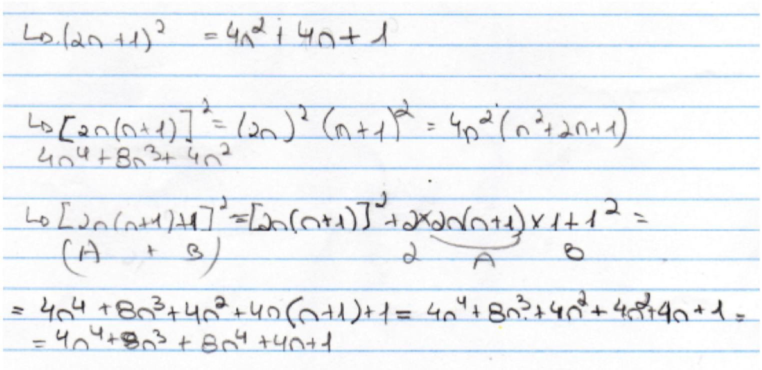


Figura 2

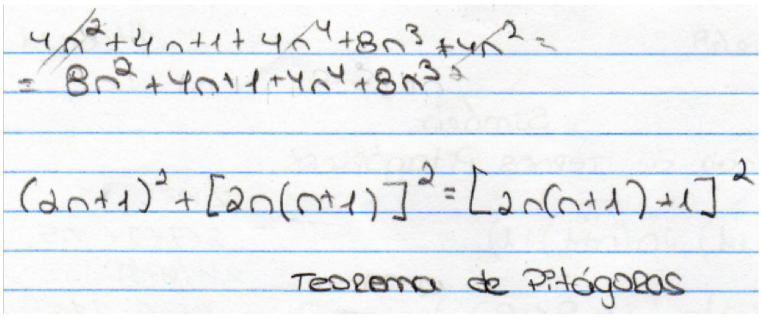


Figura 3

As propostas apresentadas, a serem trabalhadas sobretudo ao longo de

3, 4, 5	12, 35, 37	33, 56, 65
5, 12, 13	13, 84, 85	36, 77, 85
7, 24, 25	16, 63, 65	39, 80, 89
8, 15, 17	20, 21, 29	48, 55, 73
9, 40, 41	20, 99, 101	60, 91, 109
11, 60, 61	28, 45, 53	65, 72, 97

todo o 3º ciclo aquando da lecionação do domínio *Geometria e Medida*, basearam-se não só em passagens da demonstração dos resultados enunciados, acompanhados dos temas que se pretendem trabalhar, bem como do nível de ensino, a que eles serão adequados, e da tipologia de alunos a que se deverão apresentar – grupos de alunos com diferentes níveis de desempenho, clube de matemática e problemas para competições do tipo olimpíadas de matemática.

Em conclusão, refira-se que uma sequência de problemas adequada pode contribuir para que o aluno obtenha satisfação pelo alcance de resultados mais abrangentes (teoremas) do que aqueles que se alcançam nas propostas que habitualmente se trabalham na sala de aula. Por outro lado, a imensidão de resultados ditos clássicos é tão grande que, por muito que se estudem, há sempre uma grande quantidade que é do desconhecimento de qualquer matemático, pelo que sempre que os estudamos obtemos satisfação pela beleza das suas propriedades. Deste modo, torna-se mais agradável a elaboração de materiais necessários à prática docente.

Referências

[1] Bernardino, Luís, "Temas Escolhidos de Geometria do Triângulo", dissertação para a obtenção do grau de mestre em Matemática – Especialização em Matemática para o Ensino, Universidade do Algarve, Faro, 2008.

[2] Silva, Jaime C., *et alli*, *Aleph 10*, ASA, 2010.

[3] "Programa e Metas Curriculares Matemática – Ensino Básico", 2013.

[4] "Programa e Metas Curriculares Matemática A – Ensino Secundário" Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas 2014.

Resolver problemas – uma atividade mágica!

Ana Rute Domingos
CMAF e Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
Campo Grande, Edifício C6, piso 2
P-1749-016 Lisboa
e-mail: `ardomingos@fc.ul.pt`

Resumo: Neste artigo apresentamos formas de explorar a matemática através da resolução de problemas, trabalhando conteúdos e ferramentas.

Abstract In this article we explore contents and mathematical tools *via* problem-solving.

palavras-chave: Resolução de problemas; estratégias de cálculo mental; potências; magia matemática; base 2; base 10.

keywords: Techniques of problem solving; mental computation strategies; powers; mathematical magic; base 2; base 10.

1 Introdução

A matemática que *vive* em determinados problemas pode ser trabalhada de forma a surpreender e deslumbrar os alunos, tornando a resolução dos problemas uma atividade *mágica*. Neste artigo apresentamos atividades que integram o programa de sessões matemáticas que desenvolvemos para alunos não universitários (“Magia matemática”, “Aventuras matemáticas”, etc.) e que incluem a resolução de problemas criteriosamente selecionados.
Descrevemos a abordagem construída que, para além de trabalhar os conceitos matemáticos envolvidos, permite a exploração de ferramentas fundamentais no raciocínio matemático, tais como: a identificação de padrões, a capacidade de argumentar e conjeturar, a destreza de cálculo, o desenvolvimento do espírito crítico, etc. Ao longo do processo, os alunos são encorajados a participar ativamente na discussão, através de perguntas e comentários que os guiam na resolução dos problemas propostos.

2 Multiplicar por 11

A primeira atividade é iniciada com a pergunta que se segue.
Como multiplicar um número de dois algarismos por 11 fazendo apenas uma adição?

Para calcular 35×11, afastar o 3 do 5 e no meio dos dois algarismos colocar a sua soma. Obtém-se 385. A realização da operação confirma que o procedimento efetuado produz o resultado correto.
Repetindo o procedimento (com números adequados), por exemplo,

$$25 \times 11 = ?, \quad 2 \leftrightarrow 5, \quad 2+5=7, \quad 25 \times 11 = 275$$
$$42 \times 11 = ?, \quad 4 \leftrightarrow 2, \quad 4+2=6, \quad 42 \times 11 = 462$$

e fazendo a verificação, observa-se que os resultados estão corretos. Testando a *regra* anterior para o cálculo 39×11 obtemos 3129, que *parece ser* um valor muito grande, já que $39 \times 10 = 390$. Efetivamente $39 \times 11 = 429$, donde se conclui que o procedimento inicial não é generalizável. O que falhou? Há uma *regra* para este caso? Neste caso a soma dos algarismos do número é maior do que 9, no entanto, uma análise do resultado leva a concluir que no *meio* fica o algarismos das dezenas (2) da soma $(9+3=12)$ dos algarismos e que o algarismo das centenas (4) é o sucessor do algarismo das dezenas do número original (3). Surge, naturalmente, a necessidade de perceber o mecanismo.
Um número natural n de dois algarismos pode escrever-se na forma $10a+b$, com $a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ e $b \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Seja $P := n \times 11$. Assim,

$$P = (10a+b) \times 11 = (10a+b) \times (10+1) = 100a + 10(a+b) + b.$$

O algarismo das unidades de P é b. Se $a+b \leq 9$, então o algarismo das dezenas de P é $(a+b)$ e o algarismo das centenas é a. Pode então formular-se a regra: se a soma dos algarismos de n é inferior a 10, então para determinar o produto do número n por 11 basta *afastar* os algarismos do número e no *meio* colocar a sua soma.
Exemplo: $52 \times 11 = 572$.
Se $a+b > 9$, então $a+b = 10+d$, com $d \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ (observe-se que $10 \leq a+b \leq 18$). Pode reescrever-se P na forma

$$P = 100a + 10(10+d) + b = 100(a+1) + 10d + b$$

donde se conclui que o algarismo das dezenas de P é d e que P pode ser um número com 3 ou 4 algarismos. Se $a=9$, então $P = 1000 + 10d + b$ ou seja, o algarismo das centenas é zero e o dos milhares 1.
Exemplo: $95 \times 11 = 1045$.
Se $a < 9$, então P tem três algarismos e o algarismo das centenas de P é $a+1$.

Exemplo: $47 \times 11 = 527$.
Esta atividade permite trabalhar várias ferramentas matemáticas: conjeturar, explorar, demonstrar. A partir dela outras perguntas surgem naturalmente que podem ser transformadas em atividades exploratórias para os alunos. É possível generalizar as regras anteriores ao produto de um número de três algarismos por 11? E se tiver quatro algarismos? A atividade tem três passos: experimentar; analisar os resultados e formular regras; demonstrar a(s) regra(s).

3 Magia Matemática - Em que dia nasceu?

Pede-se a uma pessoa que diga em quais das tabelas que se seguem está o dia do seu aniversário.

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

Apenas com essa informação, é possível *adivinhar* o dia do aniversário da pessoa. Como funciona o truque?

Do outro lado do *pano* - como e porquê.

De cada cartão apenas é preciso de saber o número que se encontra no canto superior esquerdo. Suponhamos que a pessoa faz anos no dia 11. Então a pessoa indica as tabelas que têm no quanto superior esquerdo os números 1, 2 e 8 ($1 + 2 + 8 = 11$).
Que *magia* têm os números 1, 2, 4, 8 e 16?
Estes números são potências de base 2 e as tabelas são construídas atendendo à forma única de escrever os números de 1 a 31 como soma destas potências, em que cada uma delas só pode ser usada uma única vez em cada soma. Por exemplo, $14 = 2 + 2^2 + 2^3$, pelo que o 14 figura nas tabelas do 2, do 4 e do 8. Assim, em cada cartão colocam-se os números que usam, na sua escrita, a potência de 2 a que o cartão diz respeito.

Se uma pessoa indica uma das tabelas significa que a potência *mágica* dessa tabela é usada na soma, pelo que somando os números *mágicos* das tabelas assinaladas obtém-se o dia do aniversário.

Explorando o terreno!

A atividade anterior usa a escrita de um número na base 2 e permite trabalhar vários aspetos importantes em matemática. Destacamos alguns deles, e apresentamos algumas abordagens aos mesmos.

Identificação das potências. Apresentar a lista dos números 1, 2, 4, 8, 16 e perguntar o que é que estes números têm em comum; é uma forma de se começar a trabalhar este exercício e que vai permitir enfatizar o facto de $1 = 2^0$, o que nem sempre é uma situação que os alunos reconheçam de imediato.

Manipulação algébrica. O preenchimento as tabelas é um bom exercício de manipulação algébrica.

Padrões. Cada tabela apresenta um padrão. Por exemplo, a tabela do 1 apresenta todos os números ímpares, e a tabela do 2 apresenta dois números consecutivos, salta os dois seguintes e assim sucessivamente.

Generalizações. E usando mais potências de 2, até onde se pode ir? Ao considerar-se as primeiras cinco potências do 2, consegue-se contruir todos os números até ao 31 ($31 = 2^5 - 1$). Ao usar-se também a potência seguinte, ou seja o 32, pode construir-se, com a mesma regra, todos os números naturais até ao $63 = 2^6 - 1$. Neste caso, quantos números terá cada tabela?

Outras bases. Atividades semelhantes podem ser feitas usando outras bases. No caso de se escolher as potências de base 3, cada uma delas pode ser usada até duas vezes, para escrever todos os números naturais. Por exemplo, $62 = 2 \times 3^0 + 2 \times 3^1 + 2 \times 3^3$. É necessário mais algum dado em cada tabela que nos permita dizer quantas vezes é que cada potência foi usada, o que pode ser feito usando uma cor diferente para todos os números que usam duas vezes a potência.

Sistema binário. Esta atividade pode ser usada para introduzir o algoritmo da escrita de um número na base 2 (ou outra base) e passar do sistema binário para o decimal.

Referências

[1] S. Krantz, *Techniques of Problem Solving*, AMS, 1991.

[2] A. Paenza, *Matemática...estás aí?*, Dom Quixote, 2008.

[3] Y. Perelman, *Experiências e problemas recreativos I*, Biblioteca Desafios Matemáticos, RBA, 2008.

Módulo interactivo sobre mecanismos

Ana Cristina Oliveira
Associação Atractor (www.atractor.pt)
Rua de Ceuta nº 118, 5º, 4050-190 Porto
e-mail: `amolivei@fc.up.pt`

Resumo: Um sistema articulado é uma cadeia finita de hastes rígidas, com algumas junções fixas e outras móveis, que funciona movendo os nós sob algum constrangimento. O espaço de configuração de um tal sistema é a união de todas as suas posições permitidas. Descreveremos o funcionamento de um módulo interactivo, com mais de cem animações realizadas com o programa *Mathematica*, que explica de um modo elementar como é possível transferir informação topológica de um conjunto de pontos e hastes em movimento no plano para um espaço abstracto de pontos, cuja representação conduz a modelos tão regulares como uma esfera ou um toro.

Abstract: A mechanical linkage consists of a finite number of rods joined together by hinges, some of which are pinned down with respect to a fixed frame, so that the system is free to move in a plane. The configuration space of a linkage is the set of all its admissible positions. We will describe the gear of an interactive module, containing more than a hundred animations performed with the program *Mathematica*, which explains in an elementary way how can we convey topological information from a set of moving points and rods to an abstract space, whose modeling may be as smooth as a sphere or a torus.

palavras-chave: Mecanismo; espaço de configuração.

keywords: Linkage; configuration space.

1 Introdução

As estruturas que aqui consideramos são versões planas de dispositivos simples que podem ser reformulados matematicamente como uniões de pontos e hastes, formando um quadrilátero ou um pentágono articulado. Pretende-se analisar o conjunto de todas as suas posições possíveis. Este estudo responde à necessidade de compreender o funcionamento de um mecanismo, de clarificar a génese do respectivo conjunto de posições admissíveis e de construir um vocabulário matemático que traduza de modo inequívoco o movimento e as posições dos sistemas articulados na forma e na topologia de espaços de configuração. Contudo, na maioria dos casos interessantes, estes mecanismos não admitem modelos físicos que possam ser manipuláveis porque as hastes apropriadas têm comprimentos demasiado grandes. Por isso se optou por explorar um contexto virtual, que não apresenta estes constrangimentos, embora surgissem outras dificuldades técnicas. O módulo interactivo é construído por páginas *html* e animações interactivas realizadas com o programa *Mathematica*. A escolha deste *software* deve-se ao facto de ele permitir associar os mecanismos a figuras com *design* apelativo que correspondem precisamente, e em tempo real, aos objectos matemáticos descritos. Contudo, contrariamente ao que se passa com programas de geometria dinâmica, o *Mathematica* não inclui rotinas próprias adequadas à descrição do movimento de sistemas articulados no plano. Essa característica obrigou-nos a redesenhar o movimento destes sistemas de pontos e hastes em termos de Geometria Analítica, e a criar programas novos a partir de outras rotinas que o *Mathematica* disponibiliza.

O módulo[1] permite uma aprendizagem interactiva do funcionamento de um mecanismo e do modo como as relações de ordem entre comprimentos de hastes determinam os traços topológicos dos espaços de configuração. Baseia-se numa lista sucinta de instruções e utiliza inúmeras animações que sincronizam as escolhas do utilizador com o movimento do sistema de hastes articuladas e a criação dos respectivos espaços de configuração. O processo indutivo de construção, que é visualizado no módulo, assegura que a lista desses espaços contém a família completa das superfícies orientáveis. Este é um tema matematicamente avançado mas que é aqui apresentado num registo elementar através de dois percursos de dificuldade distinta dirigidos a públicos com formação matemática diferente. O texto [1][2] complementa o módulo, contendo detalhes técnicos, demonstrações dos resultados que são mencionados e informação matemática ou bibliográfica adicional.

2 Utilização do módulo

Inicialmente, sugere-se ao utilizador que se familiarize com a noção de mecanismo, e, em particular, de polígono articulado. Colocam-se-lhe então algumas questões naturais, como por exemplo: Em que circunstâncias um

[1] Disponível em http://www.atractor.pt/mat/MovimentoForma/modulo, em formato CDF e Html.

[2] [1] A.C. Oliveira, *Matemática Experimental*, Tese de Doutoramento, Universidade do Porto, 2013.

polígono articulado é realizável? Quando é que corresponde a uma realização única? Para auxiliar o utilizador na descoberta das respostas, há animações interactivas que o guiam e um glossário a que pode recorrer sempre que isso seja conveniente. O conceito matemático que se segue nesta exploração interactiva é o de espaço de configuração. Para o determinarmos, precisamos de identificar o contributo de cada componente móvel, enquanto controlamos a posição relativa de todas as outras partes, fixas e móveis, do mecanismo. Se uma haste com base num ponto fixo Q fosse, de resto, inteiramente livre, traçaria no plano uma circunferência centrada em Q e de raio igual ao comprimento da haste. É a ligação a outras hastes que condiciona esse movimento e, portanto, restringe o que afinal o espaço de configuração contém. Este espaço é o resultado de um procedimento que transfere informação matemática de um conjunto de pontos e hastes, que se movem num plano onde as distâncias se medem com a métrica euclidiana, para um mundo abstracto de posições admissíveis do sistema articulado que tem de receber noções de vizinhança e proximidade compatíveis com os movimentos e posições do mecanismo.

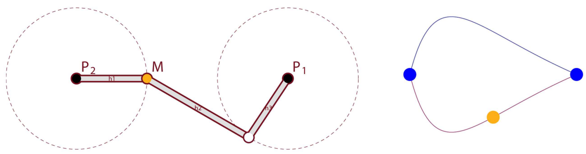


Figura 1: Mecanismo e uma representação das posições admissíveis.

No módulo, este processo é aplicado inicialmente a quadriláteros e a alguns exemplos simples. Estes devem encorajar o utilizador para que sistematize essa informação, generalizando-a a todas as curvas que são espaços de configuração de quadriláteros articulados.

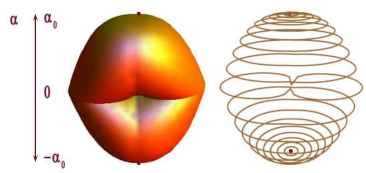


Figura 2: União de curvas em camadas.

A junção de uma haste a um quadrilátero articulado acrescenta um grau de liberdade ao mecanismo, e consequentemente à dimensão dos espaços a considerar; e coloca novos desafios ao utilizador. Trata-se agora de visualizar a construção dos espaços de configuração como união de curvas *por estratos* com uma topologia adequada. A lista de exemplos que o utilizador pode construir não é demasiado extensa, e dela o módulo destaca a esfera e o toro.

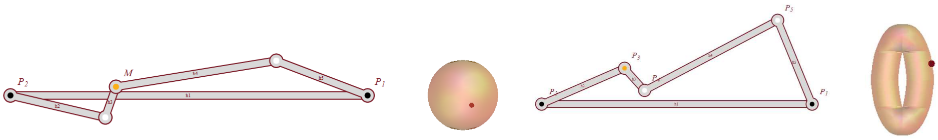


Figura 3: Mecanismos com espaços de configuração homeomorfos a uma esfera e a um toro, respectivamente.

Num percurso opcional, o utilizador notará o efeito de se juntar uma ou várias hastes a um pentágono articulado. Uma vez entendido esse método iterativo, poderá convencer-se de que ele corresponde à junção de ansas a uma esfera. E que, desse modo, se constroem todas as superfícies orientáveis como representações de espaços de configuração de pentágonos articulados aumentados adequadamente escolhidos.

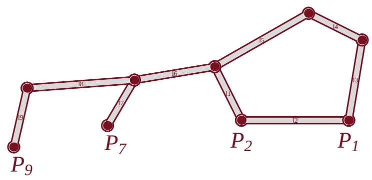


Figura 4: Pentágono articulado aumentado.

3 Comentário

Por ser interactivo, o módulo não obriga o utilizador a seguir um trajecto pré-fixado. Há inúmeras questões e actividades suscitadas pelas várias secções do módulo, podendo cada utilizador ter um roteiro autónomo, gizado pela sua curiosidade e conduzido pela sua formação matemática. Numa primeira abordagem, o utilizador poderá identificar rapidamente as formas dos espaços que se geram no movimento de um quadrilátero articulado. Se prosseguir com uma exploração mais minuciosa das transições entre as possíveis posições de um mecanismo e dos diferentes tipos de espaços de configuração, poderá descobrir aspectos mais complexos de natureza topológica, como as noções de componente conexa, genus e simetria.

Transição da Matemática do Secundário para a do Superior: o ponto de vista dos estudantes

Helena Monteiro
Esc. Sup. Tecnologia de Abrantes
IPTomar, Abrantes, Portugal
e-mail: helena.monteiro@ipt.pt

Maria João Afonso
Faculdade de Psicologia
Universidade de Lisboa
e-mail: mjafonso@psicologia.ulisboa.pt

Marília Pires
Fac. Ciências e Tecnologia
Universidade do Algarve
e-mail: mpires@ualg.pt

Resumo: Neste artigo, analisam-se algumas opiniões, atitudes e dificuldades manifestadas por estudantes do 1.º ano de cursos de Engenharia, em relação ao ensino e à aprendizagem da Matemática no ensino secundário e no início do ensino superior. Elas foram recolhidas através de entrevistas realizadas em duas subamostras destes estudantes, contrastados quanto ao nível de conhecimentos de Matemática que demonstraram nas avaliações do final do 1.º semestre.

Abstract In this article, we explore some opinions, attitudes and difficulties experienced by students in the 1st year of Engineering courses about the teaching and learning of Mathematics in high school and early in college. The data were gathered by means of interviewing some of these students, contrasting in the level of achievement in Mathematics displayed at the end of the 1st semester.

palavras-chave: adaptação ao ensino superior; dificuldades em Matemática; PMAT.

keywords: adaptation to higher education; difficulties in Mathematics; PMAT.

1 Introdução

De um modo geral, os estudantes têm dificuldades em Matemática quando transitam do ensino secundário para cursos superiores de ciências e tecnologias. No sentido de facilitar o sucesso escolar dos alunos do 1.º ano destes cursos, para além do diagnóstico dos seus conhecimentos em Matemática, também é importante, no processo pedagógico, considerar o seu ponto de vista relativo a esta fase problemática do percurso académico.

Para conhecer emoções que experimentaram e atitudes que desenvolveram, perante o novo processo de ensino e aprendizagem da Matemática, entrevistaram-se 25 estudantes do 1.º ano/1.ª vez de cursos de Engenharia, no decorrer do 2.º semestre, em 2011. Os entrevistados foram agrupados em Melhores Alunos (MA) e Piores Alunos (PA), consoante o nível de sucesso em Matemática que obtiveram no 1.º semestre. As entrevistas, individuais e semiestruturadas, foram orientadas por um protocolo construído com base nas diretrizes de Foddy (2002). Entre outros tópicos, procurou-se conhecer a opinião dos estudantes sobre o próprio percurso na aprendizagem da Matemática e o modo como ela lhes foi ensinada, assim como as dificuldades que tiveram para estudar as matérias das unidades curriculares (UC) de Matemática do 1.º semestre e as suas sugestões para promover o sucesso nessas UC.

2 Caracterização dos Entrevistados

As UC de Matemática do 1.º ano/1.º semestre dos cursos frequentados pelos 71 estudantes de onde foram selecionados os entrevistados são Álgebra Linear (AL) e Cálculo Diferencial e Integral I (CDI). Estes estudantes realizaram o Exame Nacional de Matemática A e, no início de cada semestre, o mesmo teste de conhecimentos de Matemática da SPM, o PMAT (identifica-se por PMAT-T na 1.ª aplicação e por PMAT-R no reteste após treino de competências nas UC do 1.º semestre).

Os entrevistados MA foram aprovados a AL e a CDI e obtiveram as 14 melhores médias da classificação final destas UC, bem como da pontuação nos PMAT-T e PMAT-R. Os 11 PA foram avaliados em AL e em CDI, reprovaram a ambas ou a uma destas UC, tiveram menos de 13 valores naquela em que foram aprovados e melhoraram a pontuação do PMAT-T para o PMAT-R. Na data da entrevista, todos os estudantes tinham 18 anos de idade. Entre os MA contam-se nove rapazes e cinco raparigas; no grupo dos PA há dez rapazes e uma rapariga.

3 Resultados das Entrevistas

No protocolo das entrevistas, as perguntas estão agrupadas por temas. Apresentam-se as que suscitaram respostas mais relevantes.

História pessoal da relação com a Matemática
A maioria dos entrevistados gostava de Matemática antes de entrar no en-

sino superior e continua a gostar, embora alguns prefiram a Matemática do secundário.

No ensino secundário, o relacionamento de 4 PA com a Matemática não era muito bom, mas para os outros entrevistados era bom; enquanto 4 MA e 1PA pioraram esse relacionamento no superior, 2 PA melhoraram. Um destes PA comentou "agora percebo melhor a Matemática do que antes".

Relativamente à preparação para estudar Matemática no ensino superior, antes de a conhecerem, 2 MA e 4 PA consideravam que era razoável e os outros que era boa; depois de a conhecerem, 8 MA e 7 PA admitiram que a sua preparação não era tão boa como julgavam.

A Matemática no ensino superior

A maioria dos entrevistados concorda com o número de horas de aulas, com a quantidade de matéria e com o método de ensino. No entanto, alguns preferiam que as aulas fossem dadas mais devagar, que tivessem mais tempo para resolver exercícios e que não fosse dada tanta teoria. Um dos MA referiu "O método de ensino é melhor que o do secundário porque não se está sempre a dar a mesma coisa, os exercícios são todos diferentes".

A proibição de utilizar calculadora, a que estão sujeitos todos os entrevistados, é bem aceite pela maioria. Um dos MA ficou "chocado" quando soube desta restrição, um dos PA reconhece que, deste modo, se pensa melhor e vários defendem o uso da calculadora para confirmar resultados, fazer gráficos e poupar tempo com cálculos intermédios.

Alguns entrevistados gostam mais de estudar Matemática no ensino superior porque "a matéria é mais específica", "é mais consistente", "não é tão repetida" e "aprende-se mais". No entanto, a maioria tem opinião contrária porque acha que a matéria de AL e de CDI é muito teórica, mais difícil que a do secundário e o método de ensino não é tão bom.

Perante a questão "Ter entre 10 e 13 na Matemática do secundário, é suficiente para ter sucesso a AL e a CDI?", 7 MA (com notas entre 16 e 20 no 11.º e entre 15 e 19 no 12.º) responderam que não, mesmo que os alunos trabalhem muito; 3 MA e 2 PA (com notas entre 15 e 19) disseram que sim, mas "com muitas dificuldades e a menos que não façam outras disciplinas"; responderam que sim, desde que com muito esforço, dedicação e empenho, os entrevistados com notas mais baixas a Matemática A (menos de 15).

Menos de metade dos entrevistados (4 MA e 5 PA) considera que o ensino secundário não prepara bem os alunos para o superior porque há facilitismo nas avaliações, a matéria é repetitiva, não se ensina nem exige bons métodos de trabalho e não se demonstram resultados. São poucos os que acham o ensino superior demasiado exigente.

Dificuldades em Matemática

Segundo os MA, as dificuldades enfrentadas pela maioria dos alunos consistem em saber estudar, perceber a matéria e organizar o tempo. Também apontaram, tal como alguns PA, a dificuldade em acompanhar o ritmo das aulas e em não desistir perante um exercício difícil. Apenas entrevistados PA mencionaram dificuldades na adaptação ao novo método de ensino e de estudo, às aulas teóricas e à quantidade de trabalho necessário para ter aproveitamento nas UC.

Para promover o sucesso a AL e a CDI, os MA deram, entre outras, as seguintes sugestões: maior interação nas aulas; mais aulas de apoio; mais fichas de trabalho obrigatórias; aulas teóricas e práticas dadas pelo mesmo professor, que deve "desenvolver o espírito de perspicácia do aluno para ele saber qual é o melhor método ou fórmula a aplicar"; haver mais aulas práticas. Esta sugestão também foi dada pelos PA, que acrescentaram: decorar as fórmulas das derivadas no secundário; mais exigência no secundário e menos no superior, onde se podia dar menos teoria; reduzir o tempo dedicado à parte inicial da matéria de CDI, para haver mais aulas sobre a parte em que é quase tudo novo; diminuir o ritmo das aulas no início do ano para que alguns alunos não desistam.

Analisadas as respostas dos entrevistados, percebe-se que, do seu ponto de vista, o ensino secundário prepara bem os alunos para a Matemática do superior, embora os devesse treinar na demonstração de resultados, na prática de métodos de estudo mais eficientes e na resolução de exercícios sem calculadora nem formulários. Eles admitem que o seu (muito) estudo seria facilitado se os professores dessem a matéria mais devagar, a qual deveria ser mais prática e menos teórica, ensinassem os alunos a estudar (a pedido dos MA) e resolvessem testes de anos anteriores (solicitado pelos PA).

Do ponto de vista das autoras, o programa de Matemática do 12.º ano deveria ser diferenciado para os alunos que pretendem frequentar cursos de Engenharia, ou outros com igual nível de exigência em Matemática, sendo ajustado a esses cursos; os professores de Matemática do ensino superior deveriam adotar estratégias pedagógicas que permitam aos alunos superar as lacunas nos seus conhecimentos, perceber a importância da aprendizagem da teoria e desenvolver a capacidade de estudar individualmente.

Referências

[1] W. Foddy, *Como perguntar, teoria e prática da construção de perguntas em entrevistas e questionários*, Celta Editora, Oeiras, 2002.

Mathematical candies

Jaime Gaspar
School of Computing, University of Kent, UK
Centro de Matemática e Aplicações, FCT, UNL
e-mail: `mail@jaimegaspar.com`
`jg478@kent.ac.uk`

Resumo: Quando os alunos expressam os seus sentimentos pela matemática, os adjetivos usuais não são "interessante", "bela" e "agradável", mas "aborrecida", "feia" e "dolorosa". Esta predisposição contra a matemática é uma barreira que os professores de matemática têm de deitar abaixo para libertar o caminho para a aprendizagem da matemática. Como é que podemos fazê-lo? Deleitando os alunos com "doces matemáticos": pequenos pedaços de matemática que são "interessantes", "belos" e "agradáveis".

Abstract: When students express their feelings about mathematics, the usual adjectives are not "interesting", "beautiful" and "pleasant", but "boring", "ugly" and "painful". This predisposition against mathematics is a wall that teachers of mathematics need to tear down to free the way for the learning of mathematics. How do we do this? By delighting students with "mathematical candies": little pieces of mathematics that are "interesting", "beautiful" and "pleasant".

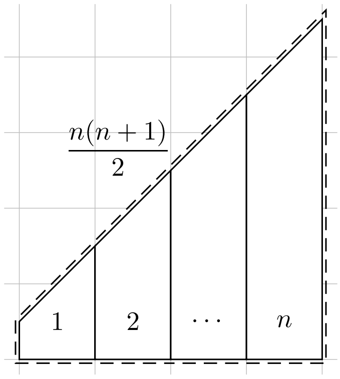
Palavras-chave: Doces matemáticos; número triangular; número irrational; demonstração (não) construtiva; classificação de triângulos.

Keywords: Mathematical candy; triangular/triangle number; irrational number; (non)constructive proof; classification of triangles.

1 Geometric proof of $1 + 2 + \cdots + n = n(n + 1)/2$

When Gauss's teacher asked him to add $1 + 2 + \cdots + 100$, he answered $50 \times 101 = 5050$ realising that $1 + 2 + \cdots + 100$ is the sum of the 50 terms $1+100, 2+99, \ldots, 50+51$ equal to 101. This generalises to $1+2+\cdots+n = n(n + 1)/2$. We give a geometric proof of this formula [1].

Let us put together a first inner right trapezoid with bases of length 0.5 and 1.5, and area 1, a second inner right trapezoid with bases of length 1.5 and 2.5 and area 2, ..., a nth inner right trapezoid with bases of length $n - 0.5$ and $n + 0.5$ and area n, to form an outer right trapezoid with bases of length 0.5 and $n+0.5$. The sum of the areas of the inner trapezoids is $1+2+\cdots+n$. The area of the outer trapezoid is $n(n+1)/2$.



2 At least half of the real numbers are irrational

If we ask students to mention some irrational numbers, we are already lucky if we hear $\sqrt{2}$, π and e. This is natural because almost all everyday numbers are rational, but deceiving because almost all real numbers are irrational. Can we show this to students? We give a elementary proof [2] that at least half (in an intuitive sense) of the real numbers are irrational.

Let us consider the function

$$f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \sqrt{2}+x & \text{if } \sqrt{2}+x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ \sqrt{2}-x & \text{if } \sqrt{2}+x \notin \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

(which is well defined: if $\sqrt{2}+x \notin \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, then $\sqrt{2}-x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, otherwise $\sqrt{2} = \frac{(\sqrt{2}+x)+(\sqrt{2}-x)}{2} \in \mathbb{Q}$, which is false). The function f is injective: if $f(x)=f(y)$, then $x = |f(x)-\sqrt{2}| = |f(y)-\sqrt{2}| = y$. So for each different x in $[0,+\infty[$ we have a different irrational number $f(x)$, therefore there are as many irrational numbers as xs in $[0,+\infty[$, which is half of $\mathbb{R}$.

3 Constructive and nonconstructive proofs

Mathematicians can prove that an equation has a solution (1) constructively by giving a solution or (2) nonconstructively without giving a solution. Most mathematicians accept both proofs, but a minority only accepts constructive proofs. We give an illustrative example [3] of a simple equation with constructive and nonconstructive proofs.

Let us consider the equation

$$c^2x^2 - (c^2 + c)x + c = 0.$$

where c is a constant.

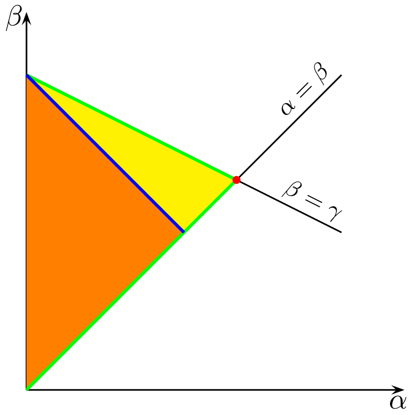
- First, we show that the equation has a solution nonconstructively: aiming at a contradiction, if there is no solution, then $x = 0$ is not a solution, so $c \neq 0$, therefore $x = 1/c$ exists and we can check that is a solution, contradicting the assumption that there is no solution.

- Second, we show that the equation has a solution constructively: $x = 1$ is a solution.

4 Visualising classes of triangles

Students are familiar with the classification of triangles as acute, right, obtuse, scalene, isosceles, equilateral, etc. But this "zoology" can easily become tedious. Can we fix this by doing something funny with it? We give a funny way of visualising the classes of triangles [4].

Each triangle is characterised (modulo similarity) by its internal angles α, β and γ. We can assume that we ordered them so that $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma$, and we can drop γ because we know $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$ (since the sum of the internal angles of a triangle is 180°). In conclusion, each triangle is characterised by its internal angles α and β such that $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$. The set $\Delta = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta\}$ of all "triangles" is itself a triangle. We can identify in Δ the "regions" corresponding to different classes of "triangles", for example, the "region" $\{(\alpha, \beta) \in \Delta : \alpha = \beta \vee \beta = \gamma\}$ corresponding to isosceles "triangles". We paint below these "regions".



isosceles triangles	$\alpha = \beta \vee \beta = \gamma$
equilateral triangles	$\alpha = \beta = \gamma$
right triangles	$\gamma = 90°$
acute triangles	$\gamma < 90°$
obtuse triangles	$\gamma > 90°$

Acknowledges. Financially supported by a Research Postgraduate Scholarship from the Engineering and Physical Sciences Research Council / School of Computing, University of Kent.

References

[1] J. Gaspar, "A proof without words of $1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n + 1)/2$", submitted.

[2] J. Gaspar, "Direct proof of the uncountability of the transcendental numbers", *The American Mathematical Monthly*, Vol. 121, No. 1 (2014), p. 80.

[3] J. Gaspar, "A theorem with constructive and nonconstructive proofs", *The American Mathematical Monthly*, Vol. 120, No. 6 (2013), p. 536.

[4] J. Gaspar and O. Neto, "Seeing all triangles at the same time", in preparation.