Geometria e Topologia

Editor Convidado: João Faria Martins

Classificação de espaços homogéneos naturalmente redutíveis em dimensões $n \leq 6$

Ana Cristina Ferreira
Centro de Matemática da Universidade do Minho
Campus de Gualtar
4710-057 Braga, Portugal
e-mail: anaferreira@math.uminho.pt

Resumo: Esta é uma versão escrita bastante informal da comunicação com o mesmo título apresentada na sessão de Geometria e Topologia do Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática em 2014. No seminário foi introduzido um novo método para a classificação de espaços homogéneos naturalmente redutíveis, método este que é baseado em técnicas de geometria Riemanniana com torção. Estas técnicas permitem reproduzir, de forma mais simples, as já conhecidas classificações em dimensões 3, 4 e 5. Em dimensão 5, torção paralela genérica define uma estrutura quase-Sasaki. Foi anunciada a classificação em dimensão 6 e estabelecida a relação com a geometria de estruturas quase complexas. Este é trabalho conjunto com Ilka Agricola (Universidade Philipps em Marburg, Alemanha) e Thomas Friedrich (Universidade Humboldt em Berlim, Alemanha).

palavras-chave: espaços homogéneos naturalmente redutíveis; conexões com torção anti-simétrica; estruturas geométricas.

1 Introdução

A classificação de espaços simétricos por Élie Cartan em 1926 foi uma das suas grandes contribuições para a matemática, relacionando de forma única a teoria algébrica de grupos de Lie e as noções geométricas de curvatura, isometria e holonomia. No entanto, a classificação de espaços homogéneos na sua completa generalidade parece ser verdadeiramente impossível. Existe bastante literatura dedicada a certas classes de espaços homogéneos, como por exemplo, espaços isotropicamente irredutíveis, espaços com curvatura positiva ou espaços compactos de dimensão muito baixa. Esta nota é sobre uma dessas classes de espaços homogéneos – os espaços naturalmente redutíveis. A investigação aqui exposta sucintamente é parte integrante do artigo [AFF14].

2 Espaços naturalmente redutíveis

Do ponto de vista algébrico, estes espaços são definidos como sendo variedades Riemannianas $M = G/K$ munidas de uma ação transitiva do grupo de Lie G, um subgrupo do grupo das isometrias de M, e de um complemento redutivo $\mathfrak{m}$ da subálgebra de Lie $\mathfrak{k}$ relativamente à álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ tal que

$$\langle [X,Y]_{\mathfrak{m}}, Z\rangle + \langle [X,Z]_{\mathfrak{m}}, Y\rangle = 0, \tag{1}$$

para todos os $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$ e o produto interno é o induzido pela métrica Riemanniana g de M. Exemplos clássicos destes espaços incluem espaços simétricos irredutíveis, espaços homogéneos isotropicamente irredutíveis, grupos de Lie com métrica bi-invariante e espaços 3-simétricos. Nem sempre é possível decidir facilmente se um determinado espaço homogéneo é ou não naturalmente redutível, uma vez que é necessário considerar *todos* os grupos de isometrias transitivos e encontrar um complemento da subálgebra do estabilizador de um ponto que satisfaça a condição dada em (1). O nosso estudo de espaços naturalmente redutíveis usa uma descrição alternativa e permite-nos obter resultados sobre G-estruturas não só para tais espaços mas também para um classe maior de variedades – variedades com torção anti-simétrica paralela. É um facto bem conhecido que um espaço homogéneo que satisfaz a equação (1) é tal que a conexão canónica ∇^c de $M = G/K$ tem torção anti-simétrica $T^c \in \Lambda^3 M$. Por outro lado, um resultado clássico de Ambrose e Singer afirma que a torção T^c e a curvatura $\mathcal{R}^c$ de ∇^c são ∇^c-paralelas, [AS58]. Por estas razões, dizemos que uma variedade Riemanniana (M, g) é naturalmente redutível se for um espaço homogéneo $M = G/K$ munido de uma conexão métrica com torção anti-simétrica T tal que a torção e a curvatura $\mathcal{R}$ são paralelas, isto é, $\nabla T = 0 = \nabla\mathcal{R}$. No caso de M ser completa, conexa e simplesmente conexa, as duas noções de espaço naturalmente redutível são coincidentes, [TV83]. À partida, encontrar uma conexão com torção nas condições referidas será também ele um problema não muito simples. No entanto, este problema pode ser abordado do ponto de vista das G-estruturas. Recordamos que para uma variedade Riemanianna munida de uma G-estrutura, uma conexão característica é uma G-conexão com torção anti-simétrica. Existem classes bastante amplas de variedades para as quais sabemos existir uma conexão característica com torção paralela, por exemplo: variedades *Sasaki*, variedades *nearly Kähler* e variedades G_2 *nearly parallel*.

3 Classificação e estrutura geométrica

A classificação de espaços naturalmente redutíveis foi obtida anteriormente, em dimensão 3, por Tricerri e Vanhecke, [TV83], e em dimensões 4 e 5 por Kowalksi e Vanhecke, [KV83] e [KV85], respetivamente. A abordagem consistiu em derivar formas normais para o tensor de curvatura, seguindo-se a torção como consequência. Com esta abordagem bastante computacional, obter classificações em dimensões mais altas parece ser genuinamente impossível, além de não fazer transparecer a estrutura geométrica dos espaços em questão. Em contraste, a nossa estratégia está focada na torção como objeto fundamental, sendo que a filosofia é a seguinte: para uma 3-forma de torção suficientemente não degenerada, a conexão procurada é a conexão característica de uma G-estrutura adequada. Além disso, a holonomia de tal conexão está longe de ser genérica, o que permite fazer uso sistemático da chamada construção de Nomizu.

Outro objeto fundamental no nosso estudo é a 4-forma $\sigma_T(X,Y,Z,W) = g(T(X,Y),T(Z,W)) + g(T(Z,X),T(Y,W)) + g(T(Y,Z),T(X,W))$ e o caso degenerado corresponde a $\sigma_T = 0$. Para $\dim M \geq 5$, apresentamos uma resultado que classifica esta situação em todas as dimensões: essencialmente M é um grupo de Lie com métrica bi-invariante ou o seu dual simétrico. Usando os métodos descritos, facilmente se reobtém a classificação em dimensão 3 – espaços de curvatura constante: $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3$ e $\mathbb{H}^3$; ou grupos de Lie com uma métrica invariante por translações à esquerda: SU(2), a cobertura universal de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ ou o grupo de Heisenberg H^3. A nossa construção é particularmente eficiente em dimensão 4; neste caso, qualquer torção paralela $T \neq 0$ define um campo vetorial que induz uma decomposição local num produto. Em dimensão 5, no caso não degenerado, o dual métrico de $*\sigma_T$ define uma direção particular no fibrado tangente e apresenta-se como candidato a vetor de Reeb de uma estrutura de contacto. Temos duas possibilidades para o grupo de isotropia de T: ISO(T)=SO(2) $\times$ SO(2) ou ISO(T)=U(2). Provamos que uma variedade de dimensão 5 com torção paralela é quase Sasaki no primeiro caso e α-Sasaki no segundo. No primeiro caso, uma tal variedade é automaticamente naturalmente redutível, enquanto que no segundo caso, existem vários contra-exemplos de variedades Sasaki não homogéneas. Terminamos este caso com a rederivação da lista de todas os espaços homogéneos 5-dimensionais: SU(3)/SU(2), SU(2, 1)/SU(2), o grupo de Heisenberg H^5, ou um espaço do tipo $(G_1 \times G_2)/SO(2)$ onde G_1 e G_2 são os grupos de Lie da classificação em 3 dimensões.

O nosso resultado principal é a classificação completa dos espaços redutíveis 6-dimensionais. A observação crucial é a de que a torção induz uma

2-forma, $*\sigma_T$, que pode ser vista como um endomorfismo anti-simétrico do fibrado tangente e como tal é candidato a estrutura quase complexa. A característica de tal endomorfismo pode ser 0, 2, 4 ou 6. O caso em que car = 0, é o caso degenerado. No caso em que car = 2, temos que M é o produto de dois espaços naturalmente redutíves de dimensão 3, os grupos de Lie da classificação tridimensional. O caso em que a car = 4 não é possível. Finalmente, o caso em que a car = 6 é efetivamente o caso em que obtemos uma estrutura quase complexa de tipo $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3$. Uma variedade com torção paralela ou é do tipo $\mathcal{W}_1$ (*nearly Kähler*) ou, caso contrário, é automaticamente naturalmente redutível. No primeiro caso, as variedades que são também homogéneas são naturalmente redutíves e são elas $\mathbb{S}^6$, $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, $\mathbb{CP}^3$ e a variedade *flag* $F(1,2) = U(3)/U(1)^3$. No segundo caso, em que a componente em $\mathcal{W}_3$ não se anula, obtemos a seguinte lista que cobre todas as possibilidades: $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ vista como uma variedade real, $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3 \ltimes \mathbb{R}^3$ e um certo grupo de Lie nilpotente (para o qual a álgebra de Lie é dada por $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ e o colchete de Lie por $[(v_1, w_1), (v_2, w_2)] = (0, v_1 \times v_2)$).

Agradecimentos – Este trabalho foi financiado pelos projetos 1388 “Representation Theory” da DFG e pelos projetos PEst-C/MAT/UI0013/2011 e PTDC/MAT/118682/2010 da FCT.

Referências

[AFF14] I. Agricola, A. C. Ferreira, Th. Friedrich, *The classification of naturaturally reductive homogeous spaces in dimensions* $n \leq 6$, to appear.

[AS58] W. Ambrose, I. M. Singer, *On homogeneous Riemannian manifolds*, Duke Math. J. 25, 647-669 (1958).

[KV83] O. Kowalski, L. Vanhecke, *Four-dimensional naturally reductive homogeneous spaces*, Differential geometry on homogeneous spaces, Conf. Torino/Italy 1983, Rend. Semin. Mat., Torino, Fasc. Spec., 223-232 (1983).

[KV85] O. Kowalski, L. Vanhecke, *Classification of five dimensional naturally reductive spaces*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 97, 445-463 (1985).

[TV83] F. Tricerri and L. Vanhecke, *Homogeneous structures on Riemannian manifolds*, London Math. Soc. Lecture Notes Series, vol. 83, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1983.

Da geometria dos fibrados vectoriais com métricas esfericamente simétricas

Rui Albuquerque
Universidade de Évora e Università di Torino
e-mail: rpa@uevora.pt

Resumo: Apontamento sobre a construção de métricas com simetria esférica em fibrados vectoriais riemannianos sobre variedades riemannianas.

Abstract: A note on the construction of metrics with spherical symmetry on Riemannian vector bundles over Riemannian manifolds.

palavras-chave: fibrado vectorial; conexão métrica.

keywords: fibre bundle; metric connection.

1 Geometria dos fibrados vectoriais

É bem conhecido que os fibrados vectoriais $\pi : E \longrightarrow M$ são também variedades diferenciáveis. Com efeito, as aplicações de trivialização induzem as necessárias cartas, do mesmo grau de diferenciabilidade sobre as intersecções. Em cada fibra $\pi^{-1}(x) = E_x$, $x \in M$, tais cartas são ainda aplicações lineares, pelo que se pode identificar naturalmente T_eE_x com E_x. Ou seja, $T(E_x) = E_x \times E_x$ e, mais ainda, pode-se verificar que $\mathcal{V} := \ker \mathrm{d}\pi \subset TE$ coincide com o subfibrado tangente às fibras, pelo que em suma $\mathcal{V} \simeq \pi^*E$. Por outro lado, tem-se a sucessão exacta de fibrados vectoriais sobre E

$$0 \longrightarrow \mathcal{V} \longrightarrow TE \xrightarrow{\mathrm{d}\pi} \pi^*TM \longrightarrow 0\ . \tag{1}$$

Dada uma conexão $D^{^E} : \Gamma(M;E) \longrightarrow \Gamma(M;T^*M \otimes E)$, esta permite-nos construir um subespaço dito horizontal $\mathcal{H}^{D^E} \subset TE$ complementar do vertical $\mathcal{V}$, que se identifica por sua vez com π^*TM por via de $\mathrm{d}\pi$. Assim obtemos

$$TE = \mathcal{H}^{D^E} \oplus \mathcal{V} \simeq \pi^*TM \oplus \pi^\star E\ . \tag{2}$$

Desde logo E admite um campo vectorial tautológico ξ, vertical por natureza e definido como $\xi_e = e \in \mathcal{V}$, $\forall e \in E$. Tal campo *parece* variar apenas ao longo das fibras de E; com efeito, em $m := \dim M$ direcções horizontais não varia de todo. Não desvirtuando quaisquer definições canónicas, temos o subespaço horizontal e projecção

$$\mathcal{H}^{D^E} = \ker \pi^\star D^{^E}_{\cdot}\xi \qquad \pi^\star D^{^E}_Y\xi = Y,\ \forall Y \in \mathcal{V}\ . \tag{3}$$

Fazemos agora nova suposição, a de a variedade M estar munida de uma conexão linear ∇^M, ou seja, uma conexão definida no fibrado tangente de M. Respeitando as projecções e isomorfismos indicados em (2), obtém-se de imediato, bem definida, uma conexão linear sobre a variedade E. Admitimos assim que $D^\star = \pi^*\nabla^M \oplus \pi^\star D^E$ está definida em TE.

A seguinte proposição pode-se provar em duas linhas, apenas com o que já se introduziu. Mas por ser tão fundamental em tudo o que segue optamos por um retorno às cartas. Sendo R^{D^E} o tensor de curvatura de D^E,

$$R^{D^E}(X,Y)e = D^E_X D^E_Y e - D^E_Y D^E_X e - D^E_{[X,Y]}e\ , \quad \forall X,Y \in TM\,, \tag{4}$$

notamos $\mathcal{R}^\xi$ o *tensor* definido por $\mathcal{R}^\xi(X,Y) = \pi^\star R^{D^E}(X,Y)\xi$, $\forall X,Y \in TE$, o qual como se espera provém da curvatura de $\pi^\star D^E$.

Proposição 1.1. *A torsão de $D^\star$ verifica*

$$T^{D^\star} = \pi^* T^{\nabla^M} \oplus \mathcal{R}^\xi\ . \tag{5}$$

Demonstração. Tomemos um carta $x = (x^1,\ldots,x^m)$ num aberto U de M e um referencial $\{e_\alpha\}_{\alpha=1,\ldots,k}$ de E no mesmo domínio, onde k é o ranque de E. Escrevamos os símbolos de Christoffel $\nabla^M_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^{M,h}_{ij}\partial_h$ e $D^E_{\partial_i}e_\alpha = \Gamma^{E,\beta}_{i\alpha}e_\beta$, com as convenções usuais. Temos em particular uma carta (x,y) em $\pi^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{R}^k$ que permite escrever $\xi = y^\alpha\pi^\star e_\alpha \simeq y^\alpha\partial_\alpha$. Derivando ξ na direcção de um qualquer vector $X = X^i\partial_i + Y^\alpha\partial_\alpha$ tangente a E, encontramos a decomposição (2) de X:

$$X \;=\; (X^i\partial_i - X^i y^\alpha\Gamma^{E,\beta}_{i\alpha}\partial_\beta) \;+\; (X^i y^\alpha\Gamma^{E,\beta}_{i\alpha} + Y^\beta)\partial_\beta$$

Ou seja os vectores $\pi^*\partial_i := \partial_i - y^\alpha\Gamma^{E,\beta}_{i\alpha}\partial_\beta$ formam em cada ponto uma base de $\mathcal{H}^{D^E}$ e os vectores $\partial_\beta = \pi^\star e_\beta$ uma base de $\mathcal{V}$. Obviamente $\mathrm{d}\pi(\partial_j) = \partial_j$.

Queremos provar que $D^\star_X Y - D^\star_Y X - [X,Y] = \mathcal{R}^\xi(X,Y)$ — aceitemos desde logo que ∇^M tem torsão nula, pois o caso geral é pouco mais complicado. Primeiro,

$$\begin{aligned} D^\star_{\partial_j}\partial_i &= \pi^*\nabla^M_{\partial_j}\pi^*\partial_i + \pi^\star D^E_{\partial_j}(y^\alpha\Gamma^{E,\beta}_{i\alpha}\partial_\beta) \\ &= \Gamma^{M,h}_{ji}\pi^*\partial_h + y^\alpha\left(\frac{\partial\Gamma^{E,\gamma}_{i\alpha}}{\partial x^j} + \Gamma^{E,\beta}_{i\alpha}\Gamma^{E,\gamma}_{j\beta}\right)\partial_\gamma\ . \end{aligned}$$

Como ∇^M é simétrica, $\Gamma^{M,h}_{ji} = \Gamma^{M,h}_{ij}$, resulta em mais uma linha que $T^{D^\star}(\partial_i,\partial_j) = \mathcal{R}^\xi(\partial_i,\partial_j)$. De facto, o tensor $\mathcal{R}^\xi$ é nulo se alguma das entradas for vertical. Deixa-se ao cuidado do leitor a demonstração das igualdades

$$D^\star_{\partial_i}\partial_\alpha = D^\star_{\partial_\alpha}\partial_i = \Gamma^{E,\beta}_{i\alpha}\partial_\beta \qquad \text{e} \qquad D^\star_{\partial_\alpha}\partial_\beta = 0$$

que permitem finalmente concluir o resultado em geral. □

Vemos assim uma interpretação da torsão como expressão da curvatura, ou vice-versa, fenómeno comum da geometria diferencial como teoria simultâneamente una e plena de ubiquidades. A introdução de tensores e derivadas covariantes permite fazer o estudo da geometria de E de forma avançada, independente de coordenadas, focada em novas estruturas globais.

2 Métricas esfericamente simétricas

Continuando a tomar (E, D^{E}) da secção anterior, suponhamos que o fibrado vectorial E vem ainda munido de uma métrica $g_{E} \in \Gamma(M; S^2E^*)$, definida positiva, com a qual a conexão dada é compatível, isto é, $D^{E} g_{E} = 0$, e suponhamos que a variedade base M é uma variedade riemanniana com métrica g_{M}. Podemos então introduzir uma estrutura pseudo-riemanniana $\mathrm{g}_{M,E}$ sobre E respeitando a decomposição (2) e escrevendo

$$\mathrm{g}_{M,E} = e^{2\varphi_1}\pi^* g_{M} \oplus \pm e^{2\varphi_2}\pi^\star g_{E} \tag{6}$$

onde $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{C}^\infty_E(\mathbb{R})$ são duas quaisquer funções escalares em E. Chamamos *métrica esfericamente simétrica* aquela em que φ_1, φ_2 dependem apenas de um parâmetro, a saber, o raio-quadrado $r = r(e) = \|e\|^2_{E}$, $\forall e \in E$.

No caso das definidas positivas, tais métricas foram introduzidas em formulação geral em [3] (não encontramos outra referência), no seguimento de outros estudos de exemplos concretos por vários geómetras ([1, 2, 4, 5]) e conhecidos físicos como [6].

Como $r = \|\xi\|^2_{E}$, resulta que $\mathrm{d}r(X) = 2\langle\xi, \pi^\star D^{E}_X\xi\rangle_{E} = 2\langle\xi, X\rangle_{E}$ (notamos e.g. $\langle X, Y\rangle_{M} = \pi^* g_{M}(X^h, Y^h)$). Usando a conexão de Levi-Civita provinda da métrica g_{M}, pode-se construir $D^\star$. Obtemos uma conexão métrica $\widetilde{D} = D^\star + C$, com a mesma torsão, somando certo tensor simétrico

$$\begin{aligned} C_XY \;=\; & a(\xi^\flat(X)Y^h + \xi^\flat(Y)X^h) + \\ & + c_1\langle X, Y\rangle_{M}\xi + c_2\langle X, Y\rangle_{E}\xi + b(\xi^\flat(X)Y^v + \xi^\flat(Y)X^v)\ . \end{aligned} \tag{7}$$

O seguinte teorema generaliza [3, Theorem 1.1] ao caso pseudo-riemanniano.

Teorema 2.1. *$\widetilde{D}$ é uma conexão métrica ($\widetilde{D}\,\mathrm{g}_{M,E}=0$) se e só se*

$$a=2\varphi_1' \qquad c_1=\mp 2\varphi_1' e^{2(\varphi_1-\varphi_2)} \qquad b=2\varphi_2'=-c_2\ . \tag{8}$$

Finalmente a conexão de Levi-Civita de $\mathrm{g}_{M,E}$ coincide com

$$\nabla_X^{M,E}Y=D_X^\star Y+C_XY\pm A_XY-\frac{1}{2}\mathcal{R}^\xi(X,Y) \tag{9}$$

onde A é o tensor definido para o caso riemanniano em [3].

Como exemplo das métricas esfericamente simétricas recordamos a construção de Bryant-Salamon sobre $E=\Lambda^2_-T^*M\longrightarrow M^4$, de holonomia não só contida mas igual ao grupo de Lie excepcional G_2 quando $M=S^4$ ou $\mathbb{CP}^2$. A métrica é definida por

$$\mathrm{g}_{M,E}=\sqrt{2\tilde{c}_0^2sr+\tilde{c}_1}\,\pi^*g_M\oplus\frac{\tilde{c}_0^2}{\sqrt{2\tilde{c}_0^2sr+\tilde{c}_1}}\,\pi^\star g_E \tag{10}$$

onde $\tilde{c}_0,\tilde{c}_1>0$ e $s=\mathrm{Scal}^{g_M}/12$. Em [2] mostram-se outras métricas G_2 semelhantes. Aqui deixamos em perspectiva o estudo do caso de holonomia $\widetilde{\mathrm{G}}_2$ dos split-octoniões, associada a métrica de assinatura $(3,4)$.

(Investigação financiada parcialmente pelos fundos FEDER, programa COMPETE, através da FCT Projecto PTDC/MAT/118682/2010.)

Referências

[1] M. T. K. Abbassi and M. Sarih, "On natural metrics on tangent bundles of Riemannian manifolds", *Arch. Math. (Brno)*, Tom. 41 (2005), 71–92.

[2] R. Albuquerque, "Self-duality and associated parallel or cocalibrated G_2 structures", arXiv:math.DG/1401.7314v2, 17 pp.

[3] R. Albuquerque, "On vector bundle manifolds with spherically symmetric metrics", arXiv:math.DG/1411.5952v1, 31 pp.

[4] L. Bérard Bergery, "Quelques exemples de variétés riemanniennes complètes non compactes à courbure de Ricci positive", *C. R. Acad. Sci. Paris*, Sér. I Math. Vol. 302 (1986), 4, pp. 159–161.

[5] R. L. Bryant e S. Salamon, "On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy", *Duke Math. Journ.*, Vol. 58(3), (1989), pp. 829–850.

[6] G. W. Gibbons, D. N. Page e C. N. Pope, "Einstein metrics on S^3, $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^4$ bundles", Comm. Math. Physics Vol. 127 (1990), no. 3, 529–553.

On the homotopy type of free group character varieties[1]

Ana Casimiro
Departamento de Matemática, FCT, UNL
e-mail: amc@fct.unl.pt

Carlos Florentino
Departamento de Matemática, IST, UL
e-mail: cfloren@math.tecnico.ulisboa.pt

Sean Lawton
Dep. Mathematical Sciences, George Mason University, USA
e-mail: slawton3@gmu.edu

André Oliveira
Departamento de Matemática, UTAD
e-mail: agoliv@utad.pt

Abstract Let G be a real reductive algebraic group with maximal compact subgroup K, and let F_r be a rank r free group. Here, we summarize the construction of a natural strong deformation retraction from the space of closed orbits in $\mathsf{Hom}(F_r, G)/G$ to the orbit space $\mathsf{Hom}(F_r, K)/K$. In particular, these spaces have the same homotopy type.

keywords: Character varieties; Real reductive groups; Free group representations.

1 Introduction

In this article, we present one of the main results in [CFLO], about the homotopy equivalence between two related moduli spaces of representations of a free group F_r on r generators. These are the G-character variety $\mathfrak{X}_r(G)$, consisting of the closed orbits in the conjugation quotient space $\mathsf{Hom}(F_r, G)/G$, where G is a real reductive group, and the related quotient space $\mathfrak{X}_r(K) = \mathsf{Hom}(F_r, K)/K$, where K is a maximal compact subgroup of

[1]A.C., C.F. and A.O. were partially supported by FCT projects PTDC/MAT/120411/2010, MAT-GEO/0675/2012 and the Reseacrh Unit PEst-OE/MAT/UI4080/2011, Portugal; S.L. was partially supported by U.S. NSF grants DMS 1107452, 1107263, 1107367 - Gear Network, and 1309376, and the Simons Foundation grant 245642.

G. One application of this result was the computation of the Poincaré polynomials of some of these character varieties, for non-compact G. We also studied the relation between the topology and *geometry* of the character varieties $\mathfrak{X}_r(G)$ and (the real points of) $\mathfrak{X}_r(\mathbf{G})$, where $\mathbf{G}$ is the complexification of G, making explicit use of *trace coordinates*. We provided a detailed analysis of some examples (real forms G of $\mathbf{G} = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$), showing how the geometry of these spaces compare, and how to understand the deformation retraction in these coordinates. We also briefly described the Kempf-Ness sets for some of these examples. We thank the referee for the comments leading to improvements of this paper.

2 Complex and real character varieties

Let F_r be a rank r free group ($r \in \mathbb{N}$) and $\mathbf{G}$ be a complex reductive algebraic group defined over $\mathbb{R}$. We also assume $\mathbf{G}$ irreducible. The $\mathbf{G}$*-representation variety of* F_r is defined as $\mathfrak{R}_r(\mathbf{G}) := \mathsf{Hom}(F_r, \mathbf{G})$. There is a homeomorphism between $\mathfrak{R}_r(\mathbf{G})$ and $\mathbf{G}^r$, given by the evaluation map which is defined over $\mathbb{R}$, if $\mathfrak{R}_r(\mathbf{G})$ is endowed with the compact-open topology (as defined on a space of maps, with F_r given the discrete topology, and $\mathbf{G}$ the Euclidean topology from some affine embedding $\mathbf{G} \subset \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$), and $\mathbf{G}^r$ with the product topology. As $\mathbf{G}$ is a smooth affine variety defined over $\mathbb{R}$, $\mathfrak{R}_r(\mathbf{G})$ is also a smooth affine variety and it is defined over $\mathbb{R}$. Consider now the action of $\mathbf{G}$ on $\mathfrak{R}_r(\mathbf{G})$ by conjugation. This defines an action of $\mathbf{G}$ on the algebra $\mathbb{C}[\mathfrak{R}_r(\mathbf{G})]$ of regular functions on $\mathfrak{R}_r(\mathbf{G})$. Let $\mathbb{C}[\mathfrak{R}_r(\mathbf{G})]^{\mathbf{G}}$ denote the subalgebra of $\mathbf{G}$-invariant functions. Since $\mathbf{G}$ is reductive the affine categorical quotient may be defined as $\mathfrak{X}_r(\mathbf{G}) := \mathfrak{R}_r(\mathbf{G})/\!/\mathbf{G} = \mathrm{Spec}_{\max}(\mathbb{C}[\mathfrak{R}_r(\mathbf{G})]^{\mathbf{G}})$. This is a singular affine variety (irreducible and normal, since $\mathbf{G}^r$ is smooth and irreducible[2]), whose points correspond to the Zariski closures of the orbits. Since $\mathfrak{X}_r(\mathbf{G})$ is an affine variety, it is a subset of an affine space, and inherits the Euclidean topology. With respect to this topology, in [FL], it is shown that $\mathfrak{X}_r(\mathbf{G})$ is homeomorphic to the conjugation orbit space of closed orbits (called the *polystable quotient*). $\mathfrak{X}_r(\mathbf{G})$, together with that topology, is called the $\mathbf{G}$-*character variety*. Let us define the conditions on a real Lie group G, for which our results will apply.

Definition 2.1. Let K be a compact Lie group. We say that G is a *real K-reductive Lie group* if the following conditions hold: (1) K is a maximal compact subgroup of G; (2) there exists a complex reductive algebraic group

[2] In Subsection 2.2 of [CFLO] it was accidentally stated that $\mathfrak{X}_r(\mathbf{G})$ is not necessarily irreducible; this is generally the case when F_r is replaced by a finitely generated group Γ.

$\mathbf{G}$, defined over $\mathbb{R}$, such that $\mathbf{G}(\mathbb{R})_0 \subseteq G \subseteq \mathbf{G}(\mathbb{R})$, where $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ denotes the real algebraic group of $\mathbb{R}$-points of $\mathbf{G}$, and $\mathbf{G}(\mathbb{R})_0$ its identity component (in the Euclidean topology); (3) G is Zariski dense in $\mathbf{G}$.

We note that, if $G \neq \mathbf{G}(\mathbb{R})$, then G is not necessarily an algebraic group (consider for example $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})_0$). When K is understood, we often simply call G a real reductive Lie group. All classical real matrix groups, as well as all complex reductive Lie groups, are in this setting. As an example which is not under the conditions of Definition 2.1, we can consider $\widetilde{\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})}$, the universal covering group of $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. For $n \geqslant 2$ it is not a matrix group, and so does not satisfy our definition, since all real reductive K-groups are linear.

As above, let K be a compact Lie group, and G be a real K-reductive Lie group. In like fashion, we define the *G-representation variety of F_r*: $\mathfrak{R}_r(G) := \mathsf{Hom}(F_r, G)$. Again, $\mathfrak{R}_r(G)$ is homeomorphic to G^r. Similarly, as a set, we define $\mathfrak{X}_r(G) := \mathfrak{R}_r(G)/\!/G$ to be the set of closed orbits under the conjugation action of G on $\mathfrak{R}_r(G)$. We give $\mathfrak{X}_r(G)$ the quotient topology on the subspace of points with closed orbits in $\mathfrak{R}_r(G)$. This quotient coincides with the one considered by Richardson-Slodowy in [RS, Section 7], and it is a non-trivial result in [RS] that this quotient is always Hausdorff. It is likewise called the *G-character variety of F_r* even though it may not even be a semi-algebraic set. However, it is an affine real semi-algebraic set when G is real algebraic. For K a compact Lie group, with its usual topology, we also define the space $\mathfrak{X}_r(K) := \mathsf{Hom}(F_r, K)/K \cong K^r/K$, called the *$K$-character variety* of F_r. Since the K-orbits are always closed and K is real algebraic, this construction is a special case of the construction above. So it is Hausdorff and can be identified with a semi-algebraic subset of $\mathbb{R}^d$, for some d. Moreover, it is compact, being the compact quotient of a compact space.

3 Cartan decomposition and deformation to the maximal compact

Let $\mathfrak{g}$ denote the Lie algebra of G, and $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ the Lie algebra of $\mathbf{G}$. We will fix a Cartan involution of $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ which restricts to a Cartan involution, θ, of $\mathfrak{g}$. This choice allows for a Cartan decomposition of those Lie algebras. In paricular, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ with $\theta|_{\mathfrak{k}} = 1$ and $\theta|_{\mathfrak{p}} = -1$. Furthemore, $\mathfrak{k}$ is the Lie algebra of a maximal compact subgroup, K, of G. The Cartan involution of $\mathfrak{g}$ lifts to a Lie group involution $\Theta : G \to G$ whose differential is θ and such that $K = \mathrm{Fix}(\Theta) = \{g \in G : \Theta(g) = g\}$. The multiplication map provides a diffeomorphism $G \simeq K \times \exp(\mathfrak{p})$. In particular, the exponential is injective on $\mathfrak{p}$. If we write $g = k\exp(X)$, for some $k \in K$ and $X \in \mathfrak{p}$, then $\Theta(g)^{-1}g = \exp(2X)$. So define $(\Theta(g)^{-1}g)^t := \exp(2tX)$, for any real parameter t.

Proposition 3.1. *The map $H : [0,1] \times G \to G$, $H(t,g) = f_t(g) := g(\Theta(g)^{-1}g)^{-t/2}$ is a strong deformation retraction from G to K, and for each t, f_t is K-equivariant with respect to the action of conjugation of K in G.*

By Proposition 3.1, there is a K-equivariant strong deformation retraction from G to K, so there is a K-equivariant strong deformation retraction from G^r onto K^r with respect to the diagonal action of K. This immediately implies:

Corollary 3.2. *Let K be a compact Lie group and G be a real K-reductive Lie group. Then $\mathfrak{X}_r(K)$ is a strong deformation retract of $\mathfrak{R}_r(G)/K$.*

4 Kempf-Ness set and deformation retraction for character varieties

As before, fix a compact Lie group K, and a real K-reductive Lie group G. Suppose that G acts linearly on a complex vector space $\mathbb{V}$, equipped with a Hermitian inner product $\langle\,,\rangle$. Without loss of generality we can assume that $\langle\,,\rangle$ is K-invariant, by averaging.

Definition 4.1. A vector $X \in \mathbb{V}$ is a *minimal vector* for the action of G on $\mathbb{V}$ if $\|X\| \leqslant \|g\cdot X\|$, for every $g \in G$, where $||\cdot||$ is the norm corresponding to $\langle\,,\rangle$.

Let $\mathcal{KN}_G = \mathcal{KN}(G,\mathbb{V})$ denote the set of minimal vectors. $\mathcal{KN}_G$ is known as the *Kempf-Ness set* in $\mathbb{V}$ with respect to the action of G. It is a closed algebraic set in $\mathbb{V}$. The Kempf-Ness theory also works for closed G-subspaces. Indeed, let Y be an arbitrary closed G-invariant subspace of $\mathbb{V}$, and define $\mathcal{KN}_G^Y := \mathcal{KN}_G \cap Y$. The next theorem is proved in [RS, Proposition 7.4, Theorems 7.6, 7.7 and 9.1].

Theorem 4.2. *The quotient $Y/\!\!/G$ is a closed Hausdorff space and if, in addition, Y is a real algebraic subset of $\mathbb{V}$, it is also homeomorphic to a closed semi-algebraic set in some $\mathbb{R}^d$. Moreover, there is a K-equivariant deformation retraction of Y onto $\mathcal{KN}_G^Y$.*

To apply the Kempf-Ness theorem to our situation, we need to embed the G-invariant closed set $Y = \mathfrak{R}_r(G) = \mathsf{Hom}(F_r, G) \cong G^r$ in a complex vector space $\mathbb{V}$, as follows. As $\mathbf{G}$ is a complex reductive algebraic group, $\mathbf{G}$ and G can embedded in some $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ and $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, respectively. In this case, the Cartan involution is given by $\theta(A) = -A^t$, so that

$\Theta(g) = (g^{-1})^t$. From now on, we will assume this situation. We can obtain the embedding of K^r ($r \in \mathbb{N}$) into the vector space given by the product of the spaces of all n-square complex matrices, which we denote by $\mathbb{V}$. Precisely, $\mathbb{V} := \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})^r \cong \mathbb{C}^{rn^2}$. The adjoint representation of $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ in $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ restricts to a representation $G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{V})$ given by $g\cdot(X_1,\ldots,X_r) = (gX_1g^{-1},\ldots,gX_rg^{-1}),\ \ g \in G,\ X_i \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Moreover, this yields a representation $\mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathbb{V})$ of the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of G in $\mathbb{V}$ given by the Lie brackets: $A\cdot(X_1,\ldots,X_r) = (AX_1-X_1A,\ldots,AX_r-X_rA) = ([A,X_1],\ldots,[A,X_r])$ for every $A \in \mathfrak{g}$ and $X_i \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. In what follows, the context will be clear enough to distinguish the notations of the above representations. We choose an inner product $\langle\,,\rangle$ in $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ which is K-invariant, under the restriction of the representation $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}))$ to K. From this we obtain an inner product on $\mathbb{V}$, K-invariant by the corresponding diagonal action of K: $\langle(X_1,\ldots,X_r),(Y_1,\ldots,Y_r)\rangle = \sum_{i=1}^r\langle X_i,Y_i\rangle$ for $X_i, Y_j \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. In $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, $\langle\,,\,\rangle$ can be given explicitly by $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(A^*B)$. So by Theorem 4.2, Proposition 3.1 and Corollary 3.2 we have the following theorem:

Theorem 4.3. *The spaces $\mathfrak{X}_r(G)$ and $\mathfrak{X}_r(K)$ have the same homotopy type. In particular, the homotopy type of $\mathfrak{X}_r(G)$ depends only on the maximal compact subgroup K of G.*

In our setting, the Kempf-Ness can be explicitly described as the closed set given by:

Proposition 4.4. $\mathcal{KN}_G^Y = \{(g_1,\cdots,g_r) \in G^r :\ \sum_{i=1}^r g_i^*g_i = \sum_{i=1}^r g_ig_i^*\}$. *In particular, we have the inclusion $K^r \cong \mathsf{Hom}(F_r,K) \subset \mathcal{KN}_G^Y$.*

For G algebraic, there is a natural inclusion of finite CW-complexes $\mathfrak{X}_r(K) \subset \mathfrak{X}_r(G)$ (see Lemma 4.9 of [CFLO]). Using this result, Proposition 4.4, Theorem 4.2 and Whitehead's Theorem we achieve the main result: (see Section 6. of [CFLO] for an example)

Theorem 4.5. *There is a strong deformation retraction from $\mathfrak{X}_r(G)$ to $\mathfrak{X}_r(K)$.*

References

[CFLO] A. Casimiro, C. Florentino, S. Lawton, A. Oliveira, "Topology of moduli spaces of free group representations in real reductive groups", *Forum Math*, DOI: 10.1515/forum-2014-0049.

[FL] C. Florentino and S. Lawton, "Topology of character varieties of Abelian groups", *Topology and its Applications*, Vol. 173 (2014), pp. 32-58.

[RS] R. W. Richardson, P. J. Slodowy, "Minimum vectors for real reductive algebraic groups", *J. London Math. Soc.*, (2) Vol. 42, No. 3 (1990), pp. 409-429.

Moduli Spaces in Higher Gauge Theory

Roger Picken
Center for Mathematical Analysis, Geometry and Dynamical Systems
Mathematics Department, IST, Universidade de Lisboa,
e-mail: roger.picken@tecnico.ulisboa.pt

Resumo: Por analogia com a teoria de *gauge* usual, descrevemos espaços de *moduli* de conexões *flat* em teoria de *gauge* superior.

Abstract: By analogy with ordinary gauge theory, we describe moduli spaces of flat connections in higher gauge theory.

palavras-chave: teoria de *gauge* superior; espaço de *moduli*; 2-grupo.

keywords: higher gauge theory; moduli space; 2-group.

1 Moduli spaces in higher gauge theory

This article describes work done in separate collaborations with João Faria Martins, Jeffrey Morton and Diogo Bragança [3, 5, 1].

Let $\{U_i\}_{i\in I}$ be a good open cover of a manifold M. Recall that a 1-bundle, i.e. a principal G-bundle with connection, may be given in terms of transition functions $g_{ij} : U_{ij} \to G$, (U_{ij} denotes $U_i \cap U_j$) and local connection 1-forms $A_i \in \Lambda^1(U_i, \mathfrak{g})$, where $\mathfrak{g}$ is the Lie algebra of G. Likewise a 2-bundle with structure 2-group $\mathcal{G} = (G, E, \partial, \triangleright)$ (where G and E are two Lie groups - see below for the definition) is described by transition functions $g_{ijk} : U_{ijk} \to E$ and $h_{ij} : U_{ij} \to G$, and transition 1-forms $\eta_{ij} \in \Lambda^1(U_{ij}, \mathfrak{e})$, as well as local connection 1- and 2-forms $A_{ij} \in \Lambda^1(U_{ij}, \mathfrak{g})$ and $B_i \in \Lambda^2(U_i, \mathfrak{e})$. Various relations hold, such as the well-known cocycle condition for g_{ij}. For the continuation of this hierarchy to 3-bundles, see [4].

We will approach (Lie) 2-groups as crossed modules of groups.

Definition 1.1 *A Lie crossed module $(G, E, \partial, \triangleright)$ is given by a pair of Lie groups E, G, together with a group homomorphism $\partial\colon E \to G$ and a left action $\triangleright$ of G on E by automorphisms, such that $\partial(X \triangleright e) = X\partial(e)X^{-1}$ for each $X \in G, e \in E$, and $\partial(e) \triangleright f = efe^{-1}$ for each $e, f \in E$.*

A class of examples comes from central extensions of groups: $1 \to A \to H \xrightarrow{\partial} K \to 1$ gives rise to a crossed module: $E = H \xrightarrow{\partial} K = G$ with lifted action $k \triangleright h = h'hh'^{-1}$ for any h' such that $\partial(h') = k$ (well-defined since $A = \ker\partial$ is central in H). There is a corresponding definition of a differential crossed module of Lie algebras: $\partial\colon \mathfrak{e} \to \mathfrak{g}$ and $\triangleright : \mathfrak{g} \times \mathfrak{e} \to \mathfrak{e}$ where ∂ is a Lie algebra morphism and $\mathfrak{g}$ acts on $\mathfrak{e}$ by derivations.

The algebra associated to crossed modules is naturally 2-dimensional. Consider squares, or 2-cubes, of the form

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, dash, "W"] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, dash, "Z"] \arrow[r, dash, "X"'] \arrow[ur, phantom, "e"] & \cdot \arrow[u, dash, "Y"'] \end{tikzcd} \tag{1}$$

where $X, Y, Z, W \in G$ and $e \in E$, such that $\partial(e) = XYW^{-1}Z^{-1}$. We can define operations of horizontal and vertical multiplication of 2-cubes, in such a way that they satisfy the interchange law: when evaluating a two-by-two array of 2-cubes, we may multiply horizontally then vertically, or vice-versa, and get the same result. Thus we can evaluate consistently the product of any rectangular array of 2-cubes. This construction with 2-cubes is called the *double groupoid* of the crossed module, with a single object, horizontal and vertical morphisms in G, and squares in E.

For 1-bundles the parallel transport along a path is a product of factors in G, like $g_{12}(x)$, the transition function evaluated at $x \in U_{12}$, and $\mathcal{P}\exp\int_{p_1} A_1$, the "path-ordered" exponential of the connection 1-form A_1 along a path p_1 contained in U_1 (which is defined as the solution of an ODE). Likewise the evaluation of surface transports for 2-bundles is carried out by evaluating an array of 2-cubes coming from constituent points, paths and 2-paths, using transition functions and path/surface-ordered integration of 1- and 2-forms [3].

Setting $e = 1$ in (1), we have a commuting 2-cube, equivalent to the equation $XY = ZW$. In the same way, we may define commuting 3-cubes of six 2-cubes and use them to express equations for crossed modules [2, 3]. Similarly there are notions of commuting 4-cubes and beyond.

Gauge transformations for 1-bundles are given by $h_i : U_i \to G$, and their action on transition functions, connections and transports may be expressed in terms of commuting 2-cube equations, e.g. $g_{ij}(x) \mapsto g'_{ij}(x) = h_i(x)g_{ij}(x)h_j(x)^{-1}$. Gauge transformations for 2-bundles are given by $h_{ij} : U_{ij} \to G$ and $\eta_i \in \Lambda^1(U_i, \mathfrak{e})$. Their effect on transition functions, connections and transports is given in terms of commuting higher cubes. We will be analysing them shortly from a slightly different perspective.

For 1-bundles we recall that the moduli space of flat connections modulo gauge transformations is given by $Conn/Gauge = \mathrm{Hom}(\pi_1(M), G)/G$, using the correspondence between connections and holonomies. G acts via the adjoint action on the values of a homomorphism. Pursuing such finite-dimensional models for quotients of infinite-dimensional function spaces, it is convenient to consider manifolds endowed with a cell structure, e.g. a 2-sphere with one 0-cell, one 1-cell and two 2-cells. Then we define the set of connections *Conn* to be the set of assignments $g : \{\text{1-cells}\} \to G$, such that for each 2-cell a flatness condition holds (the product of the 1-cell assignments around the boundary is 1). *Conn* is acted on by the group of gauge transformations, *Gauge*, whose elements are assignments $\gamma : \{\text{0-cells}\} \to \mathrm{G}$, with pointwise group multiplication. The action is expressed, as before, via commuting 2-cube equations, e.g. for a 1-cell c from x to y, we have $g_c \mapsto g'_c = \gamma_x g_c \gamma_y^{-1}$.

We now sketch work with Jeffrey Morton [5] generalizing this picture to 2-bundles. The category (in fact a groupoid) of connections *Conn* has as objects assignments $\{\text{1-cells}\} \to \mathrm{G}$, and as morphisms assignments $\{\text{2-cells}\} \to \mathrm{E}$, such that for each 3-cell in the manifold a commuting 3-cube equation holds. The category *Conn* is acted on by the 2-group of gauge transformations, *Gauge*, given by assignments $\{\text{0-cells}\} \to \mathrm{G}$ and $\{\text{0-cells}\} \to \mathrm{E}$. The action on connections is given by a commuting 3-cube equation for each 1-cell and a commuting 4-cube equation for each 2-cell.

To express this precisely we need a general notion of the action of a 2-group on a category. Recall that the action of a group G on a set X, i.e. a homomorphism $\phi : G \to \mathrm{Aut}\, X$, may be given by a function $\hat{\phi} : G \times X \to X$ such that we have the commuting diagram in the category **Set** on the left below (m is the multiplication map). From this we construct the transformation groupoid $X /\!\!/ G$. By analogy, the action of a 2-group $\mathcal{G}$ on a category or groupoid $\mathbf{C}$ is described by a functor $\hat{\Phi} : \mathcal{G} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ such that we have the (strictly) commuting diagram in the category **Cat** on the right below. From this we construct the transformation double category, or double groupoid, $\mathbf{C} /\!\!/ \mathcal{G}$. We expect that this does not depend on the cell structure up to a suitable notion of (higher) Morita equivalence.

$$\begin{tikzcd} G \times G \times X \arrow[r, "m \times Id_X"] \arrow[d, "Id_G \times \hat{\phi}"'] & G \times X \arrow[d, "\hat{\phi}"] \\ G \times X \arrow[r, "\hat{\phi}"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{G} \times \mathcal{G} \times \mathbf{C} \arrow[r, "\otimes \times Id_{\mathbf{C}}"] \arrow[d, "Id_{\mathcal{G}} \times \hat{\Phi}"'] & \mathcal{G} \times \mathbf{C} \arrow[d, "\hat{\Phi}"] \\ \mathcal{G} \times \mathbf{C} \arrow[r, "\hat{\Phi}"'] & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

As a simple example, we compare the 1- and 2-gauge theory of $M = S^1$, with one 0-cell and one 1-cell: $Conn/Gauge = G /\!\!/ G$ for 1-gauge theory (where G acts on itself by the adjoint action), and $Conn/Gauge = \mathcal{G} /\!\!/ \mathcal{G}$ for 2-gauge theory (using the 2-group adjoint action of $\mathcal{G}$ on $\mathcal{G}$ - see [5]).

When the groups G and E are finite, the possible flat connections and gauge transformations are also finite in number (assuming M has a finite number of cells). In [1] we looked at counting invariants for surfaces with boundary and a given cell structure. These invariants, with nice properties, were obtained by counting the number of compatible colourings of the 1-cells with elements of G and the 2-cells with elements of E, satisfying a compatibility analogous to (1) for each 2-cell. They are of the form:

$$\frac{|E|^v}{|G|^v|E|^e} \sum_{colourings} 1$$

where v is the number of 0-cells, e is the number of 1-cells, and $|G|$ and $|E|$ denote the respective number of elements. In the light of higher gauge theory, one is tempted to interpret this invariant as the volume of the moduli space of flat connections modulo gauge transformations modulo higher gauge transformations.

Acknowledgements This work was co-funded by FCT/Portugal through projects PEst-OE/EEI/LA0009/2013 and EXCL/MAT-GEO/0222/2012.

Referências

[1] D. Bragança and R. Picken, "A new class of 2D TQFT from finite 2-groups", *in preparation, based on the first author's "Novos Talentos em Matemática" project.*

[2] R. Brown, P. J. Higgins and R. Sivera, *Nonabelian algebraic topology. Filtered spaces, crossed complexes, cubical homotopy groupoids*, European Mathematical Society, Zürich, 2011.

[3] J. Faria Martins and R. Picken, "Surface holonomy for non-Abelian 2-bundles via double groupoids", *Adv. Math.*, 226, No. 4 (2011), pp. 3309-3366.

[4] J. Faria Martins and R. Picken, "The fundamental Gray 3-groupoid of a smooth manifold and local 3-dimensional holonomy based on a 2-crossed module", *Differ. Geom. Appl.*, 29, No. 2 (2011), pp. 179-206.

[5] J. C. Morton and R. Picken, "Transformation Double Categories Associated to 2-Group Actions", *arXiv:1401.0149*; "2-Group Actions on Moduli Spaces of Higher Gauge Theory", *in preparation.*