História da Matemática

Editor Convidado: Bernardo Mota

Jorge Nuno Silva
O livro dos jogos de Afonso X, o Sábio 63

Carlota Simões
Pedro Nunes e a coroação de D. Sebastião
.... 69

Nuno Castel-Branco
Início da Mecânica em Portugal e o Tratado da Estática de Hendrick Uwens
(1645) 73

António Costa Canas
Longitude – Uma revolução na ciência náutica 77

Maria Elisabete Ferreira
Teoria(s) de proporções em Portugal na primeira metade do século XVIII
.... 81

Reinhard Kahle
O fim da GRUNDLAGENKRISE 87

O livro dos jogos de Afonso X, o Sábio

Jorge Nuno Silva
e-mail: jnsilva@gmail.com

No âmbito do projecto História dos Jogos em Portugal[1], com vista a contribuir para as bases do estudo das tradições lúdicas portuguesas, elaborámos uma versão portuguesa da obra de Afonso X.

O *Livro de Jogos* de Afonso X, o Sábio, é uma fonte incontornável para o estudo dos jogos de tabuleiro medievais, não somente entre nós. Em boa hora optámos por produzir uma versão portuguesa, baseada na excelente tradução de Ida Boavida. Apesar de ter sido escrita há mais de sete séculos, esta obra ainda não tem versões nas línguas mais utilizadas no mundo, por exemplo, não existem versões em inglês ou em francês. A razão reside, estamos convencidos, na complexidade e profundidade da obra. O trabalho de Sonia Golladay (Golladay 2007), uma tese de doutoramento com mais de 1400 páginas, aí está para o mostrar.

As versões modernas da obra do Rei-Sábio foram consultadas, nomeadamente as que transcendem a simples tradução, abordando os jogos descritos na obra, como Calvo (Calvo 1987), Calvo & Schädler (Alfons X Der Weise 2009), Canettieri (Canettieri 1996) e Golladay (Golladay 2007). De acordo com a nossa opção, não explorámos as componentes artísticas e simbólicas do Livro de Jogos, como Golladay fez.

Quisemos proporcionar aos leitores de língua portuguesa, por um lado, um caminho simples para a obra afonsina, mantendo o estilo da escrita que transporta o leitor a tempos medievais; por outro lado, o tratamento moderno que demos aos jogos, principalmente ao xadrez, pretende servir o jogador hodierno.

Afonso, o Sábio, nasceu em Toledo em 1221 e morreu em Sevilha em 1284. Rei de Castela e Leão entre 1252 e 1284, foi também imperador do Sacro Império Romano-Germânico, cargo que nunca exerceu de facto. Os seus tempos foram marcados pelas guerras com os mouros provenientes do Norte de África, em que acompanhou seu pai, Fernando III de Castela, desde novo. A morte do seu filho primogénito, Fernando de La Cerda e as lutas pela sucessão que se seguiram, repletas de abandonos e traições, amarguraram os últimos anos do monarca.

O avô materno de D. Dinis de Portugal fomentou a actividade cultural de modo marcante. Do seu tempo é a escola de tradutores de Toledo, em que cristãos,

[1] Projecto FCT PTDC/HCT/70823/2006.

judeus e muçulmanos traduziram para as línguas ocidentais as obras clássicas, preservadas e anotadas pelos estudiosos islâmicos. Este «renascimento do século XIII» desencadeou os grandes avanços na sociedade medieval.

Afonso foi mecenas cultural generoso, mas também um autor maior. A sua obra mais conhecida, As Cantigas de Santa Maria, é um marco da literatura galaico-portuguesa medieval.

Nas ciências, colaborou em livros de astronomia, sendo as *Tabelas Afonsinas*, um registo científico do posicionamento dos astros, obra de referência para os vindouros, por muitos séculos.

Outros temas foram abordados pela pena do Rei-Sábio, como o direito (*As Sete Partidas*, 1265), a história (*Crónica Geral de Espanha, História Geral*) e a mineralogia (*O Lapidário*).

O Livro dos Jogos de Afonso X foi terminado em 1283[2], em Sevilha, um ano antes da morte do erudito monarca. O volume único, ilustrado com centena e meia de iluminuras belíssimas, está hoje no Escorial[3]. A riqueza artística, cultural e simbólica da obra está hoje, tantos séculos depois do seu aparecimento, por compreender totalmente.

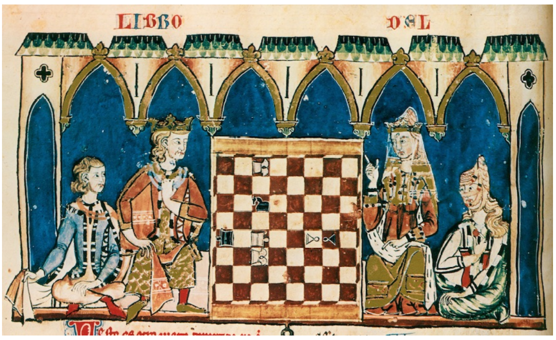
As iluminuras, nomeadamente as que acompanham os problemas de xadrez, contêm representações do próprio rei, de sua mulher, Violande (Prob. 16), de sua amante (Prob. 19), de seu filho Sancho (Prob. 74), de sua filha natural Beatriz, que viria a ser rainha de Portugal e mãe de D. Dinis (Prob. 86), mas também de árabes (Prob. 7), judeus (Prob. 5), músicos (Prob. 42), freiras (Prob. 44), entre outros.

Violande, à direita, defronta a concubina de Afonso, Mayor Guillén de Guzmán, Fol. 18r.

[2]Na era espanhola a data é 1321. Que a soma dos dígitos deste número seja 7, o número favorito de Afonso, pode ser aqui uma simples coincidência.

[3]Man. J.T.6.

Outras figuras parecem representar agentes importantes na época, ainda por identificar, ou referir-se ao passado. Muito há ainda para ler nestas ilustrações, como se pode constatar em Golladay (Golladay 2007).



O rei Afonso e a rainha Violande jogam xadrez, Fol. 54v.

Golladay, na sua extensa e profunda tese de doutoramento, faz a pergunta central: "Por que escreveu Afonso X um livro de jogos?". Esta pergunta conduz-nos naturalmente a questionar a função dos jogos na história da Humanidade.

A prevalência dos jogos na cultura começou a ser teorizada em *Homo Ludens*, por Huizinga (Huizinga 1955) no século passado.

Johan Huizinga mostra como a actividade de jogar[4] precede a cultura e como esta surge nessa forma antes de se cristalizar no sagrado e no civilizacional.

> [...] culture arises in the form of play, [...] it is played from the very beginning» (p. 46).

Homo Ludens apresenta ainda estudos pioneiros da relação entre o jogo e outras áreas da vivência humana, como a arte, a filosofia e a lei, por exemplo.

Entre nós, Sílvio Lima antecipa por pouco algumas das ideias fundamentais de Huizinga (Lima 2002).

A importância e ubiquidade dos jogos jamais deixou de ser constatada por estudiosos de vários campos. A sua origem perde-se nos tempos longínquos e emaranha-se com símbolos, mitos e artes divinatórias.

Esta obra em sete capítulos e doze (doze signos do zodíaco!) cabeçalhos tem, na opinião de Golladay, uma intenção profundamente espiritual.

> As simulacra of cosmic interplay, games are physical expressions or artifacts of the same function as myths, i.e. man's attempts

[4] Aqui, jogar entende-se em sentido lato, semelhante ao inglês to play.

to understand and explain the world and his place within it. Games, like myths, cathedral architecture and music, are all designed to elevate the consciousness to a spiritual plane and ultimately to awaken a higher dimension of understanding» (Golladay 2007, p. 85).

O livro está dividido em sete capítulos (O Livro do Xadrez, O Livro de Dados, Livro de Jogos das Tábulas, Livro dos Jogos Grandes, Jogos das Quatro Estações, Livro do Alguergue, O Livro dos Jogos de Astronomia) sendo sete um número simbolicamente muito importante para Afonso, dada a sua carga cristã, de união entre a Terra (4) e o Céu (3). Este número está presente em vários contextos na obra de Afonso. Dividiu a sua obra jurídica em sete partes; em múltiplos de sete, as tabelas astronómicas; o Setenário refere, por exemplo, os sete ensinamentos que recebeu de seu pai, os sete nomes de Deus, as sete virtudes, as sete artes liberais, os sete planetas . Há diversas ocorrências numerológicas no livro, tentaremos assinalar algumas das mais relevantes.

O capítulo dedicado ao xadrez contém sessenta e quatro fólios, numa referência óbvia ao número de casas do tabuleiro.

No prólogo, Afonso aborda a origem mítica dos jogos que vai tratar. Relata a lenda do rei que, na Índia, consultou três sábios sobre se deve ser a inteligência ou a sorte a ter maior relevância na vida, solicitando-lhes jogos que apoiassem as suas respostas. Após consultarem os seus livros, os sábios dividiram-se; o primeiro valorizava a inteligência e mostrou o xadrez; o segundo acreditava que nada se pode contra a sorte, e ilustrou com os Dados; o terceiro sábio defendeu a inteligência para tirar partido dos caprichos da sorte e mostrou o Gamão.

Dos muitos mitos ligados à criação do xadrez que se conhecem, este que Afonso apresenta é original. A presença de três sábios liga-o aos três Reis Magos e à religião cristã. Aliás, esta ligação vê-se reforçada ao constatar que Santo Isidoro de Sevilha (560-636) havia já mencionado os mesmos jogos, na mesma ordem, no «Livro XVIII» das suas *Etimologiae* (Isidoro 1960).

Referências

Alfons X, "der Weise". *Das Buch der Spiele.* Ludographie 1. Berlin, Wien: LIT, 2009.

Alfonso X El Sabio. *Libro de los juegos: acedrex, dados y tablas. Orde-*

namiento de las tafurerias. Edição de Raúl Orellana Calderón. Biblioteca Castro. Madrid: Fundación José Antonio de Castro, 2007.

Calvo, Ricardo. "El libro de los juegos". In P. Garcia Morencos (org.), *Alfonso X el Sabio, libros del ajedrez, dados e tablas* (facsimile and commentary). Madrid/Valencia, 1987.

Canettieri, Paolo. *Alfonso X, El Sabio, Il Libro dei Giochi*. Bologna, 1996.

Crombach, Mechthild. "Transcripcíon de los textos del manuscrito original". In P. Garcia Morencos (org.), *Alfonso X el Sabio, libros del ajedrez, dados e tablas* (facsimile and commentary). Madrid/Valencia, 1987.

Golladay, Sonja. *Los Libros de Acedrex Dados e Tablas: Historical, Artistic and Metaphysical Dimensions of Alfonso X's Book of Games*. University of Arizona, 2007.

Huizinga, Johan. *Homo Ludens*. Boston: Beacon Press, 1955.

Isidoro. *De Natura Rerum. Isidore de Seville: Traité de la Nature*. Org. por Jaque Fontaine. Féret, 1960.

Lima, Sílvio. *Obras Completas*. 2 vols. Fundação Calouste Gulbenkian, 2002.

Das Schachzabelbuch Konig Alfons Des Weisen. Genève/Zurich, 1941.

Silva, J.N., *O livro de jogos de Afonso X, o Sábio*. Apenas 2013.

Pedro Nunes e a coroação de D. Sebastião

Carlota Simões
Centro de Física Computacional e
Departamento de Matemática da
Faculdade de Ciências e Tecnologia, e
Museu da Ciência
Universidade de Coimbra
e-mail: `carlota@mat.uc.pt`

Resumo: Nos anos 20 do século passado, Gomes Teixeira dava-nos conta de um suposto conselho dado por Pedro Nunes à Rainha D. Catarina, regente do Reino de Portugal, em vésperas da coroação de D. Sebastião, no sentido de adiar a cerimónia alegando motivos astrológicos. Neste texto discutimos a possibilidade de Pedro Nunes ter de facto construído a carta astrológica para o momento da coroação. Será que a análise das efemérides para aquele momento à luz dos tratados da época pode trazer algo mais a este assunto?

Abstract: During the 20's of last century, Gomes Teixeira wrote about an alleged advice from Pedro Nunes to Queen D. Catarina, ruler of the Kingdom of Portugal, a few days before the coronation of King Sebastian, in order to postpone the ceremony for astrological reasons. We discuss the possibility that Pedro Nunes had actually examined the astrological chart for the moment of the coronation. Will the analysis of ephemeris using literature from that period bring more information on this subject?

palavras-chave: Pedro Nunes; Gomes Teixeira; D. Sebastião.

keywords: Pedro Nunes; Gomes Teixeira; King Sebastian.

1 Pedro Nunes e D. Catarina

A fonte de Gomes Teixeira (1924) [6] é o Conde de Sabugosa (1919) [4] que por sua vez cita o Padre José Pereira Bayão (1737) [8], que afirma ter Pedro Nunes dito à Rainha que *cuidasse muito em dilatar o acto da entrega alguns dias, ainda que não fossem mais que três, porque [...] se El-Rei começasse a governar naquele dia, seria seu reinado instável, cheio de inquietação ordinária e de mui pouca dura.* Conhecemos ainda uma referência ao episódio por Manuel de Faria e Sousa (*Epitome de las Historias Portuguesas*, Madrid, 1628), anterior a Bayão em mais de cem anos, mas a indicação dos três dias não aparece. Será o episódio uma lenda, como afirma Gomes Teixeira, ou triste realidade, como diz o Padre Bayão?

2 Nascimento e Coroação de D. Sebastião

Embora não se conheça qualquer carta astrológica para o momento da coroação de D. Sebastião, chegou aos nossos dias uma carta do seu nascimento, da autoria de João Baptista Lavanha (1550-1624) [3]. Comparar esta carta com a que podemos produzir a partir de efemérides astronómicas calculadas nos dias de hoje permite avaliar o rigor dos dados de que dispunha Lavanha e deduzir que cálculos terá feito Pedro Nunes para a data da coroação - supondo que os fez.

D. Sebastião nasceu 19 horas e 18 minutos após a passagem meridiana do sol (o meio dia) do dia 19 de Janeiro de 1554, ou seja, às 7 horas e 18 minutos do dia 20 de Janeiro de 1554. Há ainda a fazer uma correcção da data, pois em 1554 estava em vigor o calendário Juliano. No calendário Gregoriano, a data é 30 de Janeiro de 1554. Comparando os valores obtidos por Lavanha com os que obtemos a partir da consulta de efemérides para aquela data[1], verificamos que as posições de Lavanha para o Sol, a Lua, os nodos lunares e Saturno têm um erro inferior a 30 minutos de grau. Para os restantes planetas o erro é de cerca de $1^o30'$, com excepção de Mercúrio. Lavanha comete um erro de mais de sete graus na posição de Mercúrio e coloca-o em movimento directo, quando o astro está em movimento retrógrado naquele momento. Podemos então confiar nas efemérides actuais, excepto eventualmente no que diz respeito a Mercúrio.

ASTRO	posição às 12.00 de 20 de Janeiro de 1568 (calendário Juliano)
Sol	$9^o47'45''$ Aquário
Lua	$0^o3'14''$ Escorpião
Mercúrio	$24^o54'50''$ Capricórnio (Ret.)
Vénus	$0^o49'7''$ Capricórnio
Marte	$27^o3'45''$ Cancer (Ret.)
Júpiter	$5^o28'5''$ Sagitário
Saturno	$26^o35'40''$ Virgo (Ret.)
Nodo Norte	$18^o51'27''$ Libra

D. Sebastião foi coroado rei no dia do seu décimo quarto aniversário, a 20 de Janeiro de 1568 (calendário Juliano), mas não é conhecida a hora. Podemos analisar que alterações sofre a carta astrológica ao longo do dia 20 de Janeiro e dos três dias seguintes consultando as efemérides para aquela semana. Apenas a Lua mudou de signo, de Libra para Escorpião no dia 20 às 12.10 e de Escorpião para Sagitário no dia 22 de Janeiro às 18.35. Vénus mudou de Sagitário para Capricórnio, mas tal aconteceu no dia 18 de Janeiro. Como Pedro Nunes aconselha a Rainha a esperar pelo menos três dias, o que quer que ele tenha visto não está relacionado com as casas astrológicas, já que estas dependem apenas da hora. Resta-nos analisar a

[1] Estes cálculos podem ser feitos a partir da página `http://www.astro.com`.

Lua, a única que muda de signo, e os aspectos entre os astros, ou seja, os ângulos que estes fazem entre si. Como as posições do Sol, dos planetas e do nodo norte variam muito pouco ao longo daqueles três dias, resta-nos analisar os astros em aspecto com a Lua. De 20 a 23 de Janeiro, a Lua esteve em quadratura[2], primeiro com Marte durante o dia 20 e depois com o Sol durante o dia 21. No dia 23 a Lua estava já em Sagitário, em conjunção com Júpiter. Não há aspectos entre os restantes astros que se modifiquem ao longo daqueles três dias.

3 O Livro Cunprido de Aly Aben Ragel

Sabemos hoje que *El Libro Conplido en los Iudizios de las Estrellas*, tradução castelhana da obra de Aly Aben Ragel, terá chegado a D. Dinis pelas mãos do seu avô, o Rei Afonso X de Castela [7]. Na Biblioteca Nacional de Madrid encontra-se parte da obra (partes 1 a 5). O livro foi traduzido para português em 1411, por ordem de D. João I. O texto, intitulado *Livro Cunprido en os Juizos das Estrelas*, foi proibido em Portugal no Séc. XVI, constando dos índices portugueses de 1561 e 1581. Um manuscrito do livro em português chegou a Inglaterra em 1563 e parte dele (partes 4 a 8) encontra-se hoje na Bodleian Library Oxford [5]. A versão castelhana dos livros 1 a 5 e a versão portuguesa dos livros 4 a 8 dão-nos acesso à obra completa, cuidadosamente editada e comentada por Gerold Hilty [1, 2]. Mas será que Pedro Nunes conhecia esta obra? Tendo sido Cosmógrafo-Mor do Reino de Portugal desde 1529, certamente que sim.

A *Parte Séptima* do *Livro Cumprido* é inteiramente dedicada a *'eleçoes das estrelas e os começamentos das cousas' [...].* Nela podemos ler: *'A boa eleiçon pera receber as coroas e os reignos e os grandes senhorios é que seja a Lua linpia e salva'* e ainda *'quando tu quigeres começar algua cousa [...], poen a Lua e o ascendente nos signos convenentes a aquela cousa que queres e faz chegar a Lua aas fortunas con recebimento en aqueles signos. [...] Quando quigeres começar alguun feito, melhora o ascendente e seu senhor e a Lua [...] e guarda-te de maus estados dela [...].'* E entre os maus estados da Lua, *'a setena é quando é cauda dos angulos ou en caminho queimada, que é a fin de Libra e o começamento de Escorpion, e isto é o pior de todolos infortunamentos da Lua'*. A *Parte Octava* acrescenta: *'Quando se ayuntare la Luna con Mares, signjfica nueuas mentirosas e vertymjentos de sangres e muchas mentiras [...]. E si este llegamjento fuere de quadratura e fuere de su quarta, signjfica malfetria de Rey e que Robaran e tomaran a tuerto'* [2].

[2]quadratura: ângulo de 90^o (admite-se um erro de $\pm 4^o$).

Se de facto Pedro Nunes construiu a carta para a coroação de D. Sebastião, terá visto que no dia 20 a Lua estava na pior posição possível: fim de Libra e princípio de Escorpião e em quadratura com Marte. A Lua só saiu de Escorpião no final do dia 22 de Janeiro e no dia seguinte estaria finalmente em posição favorável. Perante as efemérides e o livro de Aly Aben Ragel, o conselho a dar era precisamente o de adiar a cerimónia, nem que fosse apenas três dias. Nunca saberemos se tal conversa entre o matemático e a rainha alguma vez teve lugar, mas analisando a informação de que Pedro Nunes dispunha, à luz dos tratados de astrologia da época, é caso para dizer que *se non è vero, è ben trovato*.

Referências

[1] Aly Aben Ragel, *El libro Conplido en los Iudizios de las Estrellas. Partes 1 a 5*. Introducción y edición por Gerold Hilty. Prólogo de Arnald Steiger. Real Academia Española, Madrid, 1954.

[2] Aly Aben Ragel, *El Libro Conplido en los Iudizios de las Estrellas. Partes 6 a 8*. Introducción y edición de Gerold Hilty, con la colaboración de Luis Miguel Vicente García. Instituto de Estudios Islámicos y del Oriente Próximo, Zaragoza, 2005.

[3] Códice 887, *Relações das cousas principaes q sucederão em Portugal em tempo del Rey D. Sebastião, tiradas de originaes do Reyno per João Bap.ta Lavanha, Cronista mor do Reino de Portugal*, Biblioteca Nacional de Portugal.

[4] Conde de Sabugosa, *Neves de Antanho*, Portugal-Brasil Limitada, Lisboa, 1919.

[5] Gerold Hilty, 'A versão portuguesa do 'Livro Cunprido”, *Biblos*, Vol. LVIII, pp. 207-67, 1982.

[6] Gomes Teixeira, “Pedro Nunes e a Astrologia”, *Conde de Sabugosa: In Memoriam*, Portugália Editora, 1924.

[7] Luciano Pereira da Silva, 'O Astrólogo João Gil e o Livro da Montaria', *Obras Completas de Luciano Pereira da Silva*, Agência Geral das Colónias, Lisboa, 1943.

[8] Padre José Pereira Baião, *Portugal Cuidadoso e Lastimado com a vida e perda do Senhor Rey Dom Sebastião*, 1737.

Início da Mecânica em Portugal e o Tratado da Estática de Hendrick Uwens (1645)

Nuno Castel-Branco
Departamento de Física, IST
e-mail: nuno.castel-branco@tecnico.ulisboa.pt

Abstract: The Society of Jesus' mathematicians from Flanders, from the so-called school of Grégoire de Saint-Vincent, were pioneers of a more practical way of doing mathematics. Heinrich Uwens (Henrique Buseu), a member of this school of thought, was in Portugal for several years. His classes in the "Aula da Esfera" survive in a 1645 manuscript and show that a window was opened in Portugal to an important mathematical tradition developed in our country in the mid-17th century, which was forgotten until today. In this communication, I gave answes to the questions related with its origin, contents and influence.

palavras-chave: Aula da Esfera; Mecânica; Heinrich Uwens.

keywords: Aula da Esfera; Mechanics; Heinrich Uwens.

1 Introdução

A mecânica é uma das principais áreas da Física moderna e o seu desenvolvimento acompanha e representa, sem dúvida, o desenvolvimento da ciência moderna [1]. O século XVII é um dos que mais se destaca nesse processo, pois foi o século em que Galileu (1564-1642) e Newton (1642-1727), entre outros, desenvolveram os seus estudos em filosofia natural. Mais importante ainda, sabe-se que a mecânica de Galileu é o culminar de uma grande tradição científica oriunda de filósofos como Tartaglia (1500-1557) e Guidobaldo (1545-1607), entre outros [2]. Ou seja, a mecânica como nós a conhecemos estava a nascer na Europa, mas o que se estava a passar em Portugal a nível de estudos de mecânica é ainda desconhecido.

A "Aula da Esfera" da Companhia de Jesus, que era um conjunto de aulas de matemática em português e em Lisboa, revelam que algo se passou em Portugal. Para leccionar nestas áreas os melhores professores da Companhia vinham de toda a Europa para Lisboa, no entanto era raro o que se dedicava a ensinar mecânica a sério, em detrimento de matérias mais teóricas e matemáticas [3].

2 A tradição de Flandres

As primeiras aulas de matemática no colégio jesuíta de Antuérpia começaram a ser dadas por Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667), formado por Clavius (1538-1612) em Roma. Ele foi professor de notáveis estudantes que, por sua vez, também vieram a leccionar matemática e filosofia natural, entre os quais se destacam Joannes della Faille (1597-1652), Joannes Ciermans (1602-1648) e André Tacquet (1612-1660) [4].

Ciermans leccionou a cátedra de Saint-Vincent de 1637 a 1641. Os conteúdos dessas aulas podem ser encontrados na famosa obra *Disciplinae Mathematicae* (1640), que apresenta o exemplo típico da mecânica feita na Flandres, muito ligada ao rigor matemático de Clavius em Roma e, nessa linha, baseada na tradição arquimedeana divulgada por Guidobaldo.

Em 1641 Ciermans veio para Portugal, acompanhado pelo também jesuíta Heinrich Uwens (1618-1667), com apenas 23 anos de idade. Em Portugal, ficaram conhecidos pelos nomes João Pascásio Cosmander e Henrique Buseu. Ciermans leccionou na "Aula da Esfera" logo que chegou, em 1641 e 1642. Nos anos seguintes, até 1645, foi Uwens quem continuou a leccionar na "Aula da Esfera". Na Índia, onde ficou até morrer, Uwens desempenhou diversos cargos, em particular o de reitor do Colégio de Agra e de preceptor do filho do Imperador da Índia [3].

3 O *Tratado da Estática* de Heinrich Uwens

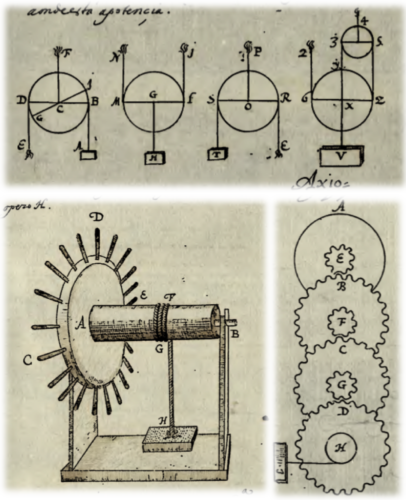
As aulas de Uwens estão registadas num manuscrito da Biblioteca Nacional de Portugal de 1645 que pertence à colecção de manuscritos do Colégio de Sto. Antão, com a referência cod. 4333. Contém 211 folhas encadernadas e encontra-se em muito bom estado. Todos os seus conteúdos são escritos pela mesma mão, ainda que poucas vezes se note uma segunda mão para clarificar determinadas frases mais difíceis de ler. O manuscrito apresenta uma ordem de ideias clara e muitas figuras com rigor geométrico. Por esta razão, e por ter sido escrito no penúltimo ano das aulas de Uwens, pode-se concluir que o manuscrito foi cuidadosamente copiado de notas de aulas, de alunos ou do próprio professor.

O autor começa por definir o que é a estática, dizendo que esta "hé sciencia que trata do movimento e quietação", continuando depois com quatro definições gerais e oito axiomas. Só então entra no conteúdo próprio das aulas. O ms. está assim dividido em 5 partes: a Centrobarica (f. 1v), a Mecânica (f. 29v), a Hidrostática (f. 113v), a Aerostática (f. 161v) e a

Pirostática (f. 183r). Por sua vez, as várias partes estão divididas em capítulos, enumerados no início de cada parte, juntamente com um pequeno resumo dessa parte. A apresentação dos conteúdos segue a forma clássica de proposições, onde se apresenta a premissa ou teorema em questão e a sua respectiva demonstração, muitas vezes seguidas por um ou mais corolários.

A primeira parte é a centrobárica que "examina o centro de gravidade e as cousas pertencentes a elle". Está dividida em três capítulos, que incluem o cálculo dos centros de gravidade de figuras geométricas, o estudo de situações sobre quando que um corpo cai quando está apoiado nalgum apoio e a aplicação desta teoria ao homem e outros seres vivos. Nesta parte, apesar de haver alguns esquemas sobre os centros de gravidade, há muitos espaços em branco, destinados a outros desses desenhos.

A parte da Mecânica é claramente a parte maior de todo o tratado. Ao descrever os cinco capítulos que a compõem, Uwens queixa-se que esta é uma tarefa complicada, pois é uma ciência que "de si he quazi infinita". De facto, Rivka Feldhay, numa análise que faz a um documento jesuíta de 1655 sobre mecânica, explica que havia uma tentativa por parte da Companhia de Jesus de conferir à mecânica um carácter académico que ela parecia não ter antes [5].



Nesta parte referem-se as típicas cinco máquinas da tradição arquimedeana: as balanças, as alavancas, as roldanas, as rodas dentadas ligadas a eixos e o movimento relacionado com a cunha e o parafuso de Arquimedes (a coclea), explicados através de planos inclinados, incluindo a relação correcta entre a força para levantar um peso com a inclinação do plano, obtida por Simon Stevin (1548-1620).

A parte da hidrostática, que é a "sciençia que trata do movimento que se faz nas agoas e nas outras couzas liquidas", está dividida em dois capítulos, sobre como os objectos se movem sobre a água e debaixo dela e sobre como conduzir as águas por diversas vias, em particular para níveis superiores.

A aerostática é a "sciençia que trata dos movimentos que se fazem no

Ar e por meyo delle." Esta parte dedica-se à atracção e à expulsão do ar e à recolha das águas por condensação e rarefacção do ar.

Por fim, a quinta parte diz respeito à pirostática, definida como a "sciençia que trata dos movimentos cauzados no fogo que nos outros instrumentos são vários mas que aqui, pella brevidade do tempo" e está reduzida ao estudo da pólvora.

Ainda que cite poucas vezes as suas fontes, Uwens refere os Elementos de Euclides mas também Luca Valerio (1553-1618), Joannes della Faille e François d'Aguilon, quando está a determinar os centros de gravidade; refere Johannes Kepler (1571-1630) e Niccolò Cabeo (1586-1650), para descrever determinadas características do planeta Terra. Na parte da mecânica, Uwens refere os vários filósofos que foram pegando nas tradições de Aristóteles e Arquimedes desde a antiguidade até ao século XVII, referindo Pappo e Hierão de Alexandria.

Hoje ainda há muitos manuscritos da "Aula da Esfera" por estudar e a surpresa ao abrir este manuscrito foi enorme, por revelar que Portugal não ficou atrás dos outros países da Europa na aprendizagem da mecânica a um bom nível científico.

Referências

[1] Westfall, Richard, A Construção da Ciência Moderna: Mecanismos e Mecânica. Porto: Porto Editora, 2001.

[2] Drake, S. & Drabkin, I.E., eds (1969). Mechanics in Sixteenth-Century Italy: Selections from Tartaglia, Benedetti, Guido Ubaldo & Galileo. Madison: University of Wisconsin Press.

[3] Leitão, Henrique (coord) (2008). Sphaera Mundi: A Ciência na «Aula da Esfera». Manuscritos Científicos do Colégio de Santo Antão nas colecções da BNP. Lisboa: Biblioteca Nacional de Portugal.

[4] Vanpaemel, G. (2002). "Jesuit Science in the Spanish Netherlands". In: M. Feingold (Ed.), Jesuit Science and the Republic of Letters. The MIT Press, pp. 389-432.

[5] Feldhay, R. (2006). «On Wonderful Machines, The Transmission of Mechanical Knowledge by Jesuits». In: Science and Education 15:2-4, Kluwer Academic Publishers, pp: 151-172.

Longitude – Uma revolução na ciência náutica

António Costa Canas
Museu de Marinha—CINAV—CIUHCT
e-mail: costacanas@gmail.com

Resumo: Partindo da definição de Thomas Kuhn para **revolução científica** tentaremos perceber quais os principais momentos em que ocorreram revoluções na ciência náutica. A nossa análise será centrada nas técnicas e nos procedimentos desenvolvidos na Europa Ocidental, para condução dos navios em alto-mar.

Começando na Idade Média, podemos considerar a existência de três momentos distintos na ciência náutica. O primeiro corresponde à chamada navegação por rumo e estima. A matemática a bordo é praticamente inexistente. Segue-se a determinação da latitude a bordo, a partir de finais do século XV usando navegação astronómica. É introduzida a matemática a bordo, mas que se resume a operações aritméticas simples. Finalmente, no século XVIII passa a determinar-se a longitude. A matemática usada é muito mais complexa, implicando a resolução de problemas de trigonometria esférica.

palavras-chave: longitude; náutica; revolução científica; paradigma; ciência normal.

1 Revolução científica

Comecemos por caraterizar o conceito de revolução científica. Segundo Kuhn em qualquer ciência existem os chamados períodos de "ciência normal". Esta é a situação mais comum na prática científica. Existe um determinado paradigma científico que vigora ao longo destes períodos. Durante os mesmos não se nota grande evolução em termos da ciência, ocorrendo essencialmente uma acumulação de dados.

Existem, contudo, outros momentos em que determinada ciência progride de uma forma bastante rápida. Estes outros momentos, mais raros e de duração relativamente curta, revolucionam profundamente a prática científica. Numa revolução científica ocorrem alterações profundas em termos de práticas, procedimentos e também ao nível dos instrumentos utilizados.

Em termos de ciência náutica europeia, de cariz oceânico, podemos considerar a existência de três períodos distintos:

Ao longo da Idade Média desenvolveu-se um método que ficou conhecido entre os historiadores da náutica como “rumo e estima”. Este período pode ser considerado como pré-científico. Durante o século XV passou a determinar-se a latitude no mar, implicando uma alteração de procedimentos e de processos de cálculo. Estes processos socorriam-se de matemática bastante simples, pelo que se pode afirmar que se assiste a uma época proto-científica. Finalmente, no século XVIII passou a ser calculada a longitude no mar. A partir daqui pode realmente afirmar-se que a navegação entrou numa fase científica.

2 Método de rumo e estima

Como eram conduzidos os navios na Idade Média? Para conhecerem a posição do navio os pilotos apenas precisavam saber a direção segundo a qual tinham navegado, assim como a distância percorrida. A introdução da bússola veio permitir o conhecimento mais ou menos rigoroso da direção seguida pelo navio, o rumo. A distância percorrida era estimada pelo piloto, daí o nome dado ao método. Em termos matemáticos bastava-lhes usar algumas noções geométricas simples. Com auxílio de compassos traçavam linhas paralelas e mediam distâncias.

Em relação às ferramentas ao dispor do piloto, além da já mencionada bússola, existiam os portulanos e as cartas-portulano. Os primeiros continham um conjunto de regras empíricas, desenvolvidas ao longo dos anos. Conhecem-se alguns textos escritos com essas regras, mas nalguns casos as mesmas poderiam ser transmitidas oralmente e decoradas pelos pilotos. Quanto às cartas-portulano consistiam na representação gráfica da informação descrita nos portulano. Estas cartas continham uma teia de direções (rumos) e uma escala para medir a distância percorrida.

3 Determinação da latitude

O método acima descrito apresentava uma limitação significativa. Foi desenvolvido no Mediterrâneo, onde as distâncias percorridas longe de terra nunca são muito grandes. A possibilidade de avistar frequentemente terra permitia anular os erros que se iam acumulando, devidos essencialmente a erros na estima da distância percorrida e na determinação do rumo a que se tinha navegado. Quando se passou a praticar uma navegação oceânica, na qual os navios passavam longos períodos ao largo, o método de rumo e estima revelou-se insuficiente. Para minimizar os erros apontados, passou a determinar-se a latitude no alto-mar, recorrendo-se à observação de astros.

A navegação astronómica praticada pelos Portugueses a partir do século XV baseava-se na adaptação de procedimentos e de instrumentos usados pelos astrónomos em terra firme. Recorria-se à observação da altura da estrela Polar ou da altura máxima Sol, no seu movimento diurno.

Os pilotos passaram a realizar alguns cálculos, bastante simples. Para medir a altura dos astros usavam astrolábios, quadrantes ou balestilhas. Estes instrumentos permitiam medir alturas com rigor da ordem de um grau. Quanto às contas a efetuar, consistiam em operações aritméticas, de soma ou subtração. Para o caso do Sol, o tipo de conta a realizar dependia da posição relativa entre o equador, o Sol e a vertical do observador. O piloto teria apenas que aplicar a adequada regra do "Regimento do Sol" para obter a sua latitude. Precisava também de conhecer a declinação do Sol. Esta não é mais do que a distância angular entre o equador celeste e o Sol, e varia de dia para dia. O seu valor era geralmente obtido a partir de tabelas calculadas por astrónomos.

Quanto à latitude pela Polar era igualmente necessário fazer uma pequena conta de somar ou subtrair. As regras para escolher a conta a realizar encontravam-se no "Regimento do Norte".

As cartas náuticas passaram a incluir uma escala de latitudes. No restante, mantiveram-se iguais às cartas-portulano, com uma rede de rumos e uma escala para medir distâncias. Também os roteiros, designação que em Portugal se dava aos portulanos, começaram a integrar tabelas de latitudes de diversos locais.

4 Determinação da longitude

Apesar de a determinação da latitude ter permitido uma melhoria no rigor das posições, relativamente ao método de rumo e estima, esse rigor das posições continuava a ser reduzido. A solução para este problema passou pela obtenção em simultâneo da latitude e da longitude, usando métodos astronómicos.

Assiste-se a uma nova mudança de paradigma. Os processos de cálculo implicam o domínio de matemática complexa, nomeadamente de trigonometria esférica. Para garantir o rigor dos cálculos recorre-se aos logaritmos. Além disso, muitos dos cálculos passam a ser preparados antecipadamente e apresentados em tabelas. Os valores tabelados eram obtidos por matemáticos em terra firme, sendo muitas vezes calculados por vários matemáticos, de forma independente, comparando-se os valores obtidos por cada um. Com o uso de valores tabelados conseguia-se reduzir o tempo de cálculo no mar e minimizar os erros que poderiam resultar da realização de diversas operações complexas, levadas a cabo por marinheiros.

Surgem igualmente novos instrumentos: octante, sextante e cronómetro. Os dois primeiros serviam para medir alturas de astros e com eles conseguiam-se ângulos com aproximação ao minuto de grau. O cronómetro, inventado por John Harrisson, em Inglaterra, fornecia o tempo com rigor de um segundo.

O problema da longitude apenas foi resolvido no século XVIII com a invenção do cronómetro e com o aperfeiçoamento do método das distâncias lunares. Ambos os métodos permitiam obter esta coordenada com o mesmo grau de precisão. A ocorrência de diversos acidentes marítimos com alguma gravidade impulsionou essa investigação. Assiste-se ao longo da centúria de Setecentos a um processo de busca de soluções para os diversos problemas que era necessário ultrapassar. Para estimular a investigação foi instituído um prémio de 20000 libras. Este prémio foi regulamentado pelo *Longitude Act* de 1714, do Parlamento Britânico. John Harrison recebeu o prémio, pelo seu cronómetro. Foram ainda pagas diversas quantias menores para recompensar contributos em termos de processos de cálculo ou de melhoria dos instrumentos usados.

Em jeito de conclusão pode afirmar-se que com as mudanças de paradigma acima apontadas se evolui de uma Arte de Navegar, baseada em processos empíricos, para uma Ciência Náutica, com forte suporte matemático.

Referências

[1] Luís de Albuquerque, *Curso de História da Náutica*, Publicações Alfa, Lisboa, 1989.

[2] William J. H. Andrewes [ed.], *The Quest for Longitude. The Proceedings of the Longitude Symposium. Harvard University, Cambridge, Massachusetts. November 4–6, 1993*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1996.

[3] Thomas S. Kuhn, *The Structure of Scientific Revolutions*, University of Chicago Press, 2012.

Teoria(s) de proporções em Portugal na primeira metade do século XVIII

Maria Elisabete Barbosa Ferreira
Agrupamento de Escolas de Lousada Norte
e-mail: betabferreira@gmail.com

Resumo: A teoria de proporções tem sido aplicada em diversas áreas ao longo dos tempos. Com a descoberta das grandezas incomensuráveis, na Antiguidade Grega, foi reconhecida a necessidade de uma teoria de proporções aplicável não só a grandezas comensuráveis como também a grandezas incomensuráveis. A teoria clássica de proporções foi frequentemente criticada pela sua alegada obscuridade e dificuldade, principalmente a partir do Renascimento Europeu. Foram muitos os autores que se dedicaram a esta investigação ao longo dos tempos, tendo sido apresentadas algumas alternativas. Neste artigo será feita uma pequena abordagem às versões da teoria de proporções em textos portugueses na primeira metade do século XVIII, e proceder-se-á à comparação das mesmas, quer entre si, quer com obras de autores europeus contemporâneos.

palavras-chave: Teoria(s) de proporções; Manoel de Azevedo Fortes; Manoel de Campos.

1 A "origem" da(s) Teoria(s) de Proporções

No tratado *Elementos*, Euclides apresenta duas teorias de proporções separadas: no Livro V aplicável a grandezas em geral, e no Livro VII aplicável apenas a números. A Definição 5[1] do Livro V explica a proporcionalidade para grandezas em geral e, por ter como base a propriedade dos equimúltiplos, tem sido alvo, ao longo dos tempos, de várias críticas, sendo apelidada de "obscura" por vários autores. A definição análoga para números, a Definição 20[2] do Livro VII, é considerada mais simples e assenta na noção de ser o mesmo múltiplo ou "parte" ou "partes"[3].

[1] Diz-se que grandezas estão na mesma razão, uma primeira para uma segunda e uma terceira para uma quarta, quando quaisquer mesmos múltiplos da primeira e da terceira simultaneamente excedem, são simultaneamente iguais, ou são simultaneamente menores do que quaisquer mesmos múltiplos da segunda e da quarta, tomados na ordem correspondente.

[2] Números estão em proporção [ou dizem-se proporcionais] quando o primeiro é o mesmo múltiplo, ou a mesma parte, ou as mesmas partes, do segundo que o terceiro é do quarto.

[3] Neste contexto ser a mesma "parte" significa ser o mesmo submúltiplo; enquanto ser as mesmas "partes" significa ser o mesmo múltiplo do mesmo submúltiplo.

2 A(s) teoria(s) de proporções na Europa do séc. XVII

Nesta secção será feita uma breve referência à(s) teoria(s) de proporções na Europa na segunda metade do século XVII, visto ser esta a época em que se desenvolveram as teorias que serviram de referência aos autores portugueses.

2.1 Giovanni Alfonso Borelli

Borelli nasceu em Nápoles em 1608 e faleceu em Roma em 1679. Este italiano considerou a teoria de proporções presente nos *Elementos* como difícil e incompreensível, designadamente no que concerne à utilização da propriedade dos equimúltiplos. Na sua obra *Euclides Restitutus* (1658), Borelli reformulou as definições de Euclides, bem como proposições e axiomas, na tentativa de colmatar as lacunas que identificou nos *Elementos.* A sua preocupação era encontrar uma definição mais fácil que pudesse ser aplicada a todo o tipo de grandezas, comensuráveis[4] e incomensuráveis[5], dado que defendia que qualquer definição é o princípio da ciência, devendo por isso ser o mais geral possível. Na obra supracitada, Borelli apresenta um processo para encontrar a "igualdade entre razões" por aproximação.

2.2 André Tacquet

Tacquet nasceu em Antuérpia e viveu entre 1612 e 1660. A partir da obra de Euclides, este belga escreveu em 1654 *Elementa geometriae planae ac solidae*, onde, entre outros aspetos, reformulou as definições clássicas de razão e proporção presentes nos *Elementos.* No seu trabalho Tacquet substitui os termos parte/partes por parte alíquota/parte aliquanta, termos que não surgem nos *Elementos.* Tal como Borelli, Tacquet considera que a Definição 5 do Livro V está na base da dificuldade da(s) teoria(s) de proporções e reformula-a da seguinte forma: "duas razões (A para B e C para F) são semelhantes, iguais, ou as mesmas, quando um antecedente (A) contém igualmente ou do mesmo modo (isto é, nem mais nem menos) o seu consequente (B), assim como o outro antecedente (C) contém o seu consequente (F). Ou quando um antecedente (A) está contido do mesmo modo no seu consequente (B) como o outro antecedente (C) no seu consequente (F)".

Na obra de Tacquet supracitada é apresentada uma outra propriedade/indício principal e infalível para a igualdade de razões: "as razões AB para CF e GM para NQ são iguais, quando tomadas quaisquer par-

[4]São grandezas que admitem uma medida comum, sendo a razão entre as mesmas expressa por números racionais.

[5]São grandezas que não admitem uma medida comum e a razão entre as mesmas está associada a números irracionais.

tes alíquotas semelhantes dos consequentes, estas estão contidas o mesmo número de vezes nos seus antecedentes".

3 Teoria(s) de proporções em textos portugueses na primeira metade do século XVIII

3.1 Manoel de Campos

Manoel de Campos, padre jesuíta nascido em Lisboa em 1680, foi professor de Matemáticas em Madrid, na aula da Esfera do Colégio de Santo Antão de Lisboa e académico da Academia Real de História. O seu trabalho *Elementos de Geometria Plana, e Sólida*, de 1735, é uma tradução adaptada da obra de Tacquet, *Elementa Geometriae*. No seu trabalho o português introduz algumas alterações na estrutura e na utilização de determinados conceitos. Enquanto Tacquet divide o Livro V em três partes, adotando uma estrutura diferente da dos *Elementos*, Manoel de Campos segue a ordem do tratado de Euclides. Não obstante, em termos de conteúdo, o trabalho do português é, de uma forma geral, idêntico ao do belga, estabelecendo as mesmas críticas relativamente à Definição 5. Para Manoel de Campos a Definição 5, por ser baseada nos *Equimúltiplos*, não é evidente nem clara, necessitando mais de ser demonstrada do que alguns resultados que dependem da mesma. Muitos dos resultados do Livro V têm como base esta definição, o que os torna difíceis de entender. Para ultrapassar esta obscuridade, Manoel de Campos sugere a substituição do Princípio dos *Equimúltiplos* pelo *Princípio dos Modernos das Equi-alíquotas*, adotando para razões semelhantes uma definição análoga à de Tacquet. Relativamente ao Livro VI, não se verificam diferenças significativas entre as obras do português e do belga.

3.2 Manoel de Azevedo Fortes

Azevedo Fortes viveu entre 1660 e 1749. A sua formação técnica valeu-lhe uma cadeira de Matemática na Academia Militar da Fortificação portuguesa em 1695. Entre outros trabalhos, é autor do manuscrito *Geometria Especulativa. Trigonometria Espherica Modo de riscar e dar aguadas nas plantas militares* (1724) e de *Lógica Racional, Geométrica e Analítica* (1744), sendo este considerado o primeiro tratado sobre lógica escrito em português na íntegra.

3.2.1 Geometria Especulativa

A ordem que surge neste manuscrito é a mesma dos *Elementos*, contudo, Azevedo Fortes expõe apenas as proposições/teoremas que considera pertinentes e necessárias na sua área. Comparando o manuscrito e a obra *Cours* *de Mathématique* de Jacques Ozanam, edição de 1693, verifica-se que o primeiro é uma tradução da obra do francês. A Definição 5, do Livro V, dada por Azevedo Fortes, é mais genérica e concisa do que as similares de Tacquet e de Manoel de Campos, tendo contudo a mesma essência: "razões *iguais* ou *semelhantes* são aquelas em que os antecedentes contêm, ou são igualmente contidos nos seus consequentes". Tal como Ozanam, Azevedo Fortes não expõe críticas aos *Elementos*, ao contrário de Manoel de Campos. Azevedo Fortes refere que para determinar a razão entre duas grandezas deve-se dividir o antecedente pelo consequente e recorre ao método das Equi-alíquotas para provar a igualdade de razões. Enquanto Tacquet, Dechales, Manoel de Campos e o próprio Ozanam, nas suas obras, referem a comensurabilidade de grandezas, este conceito não surge no Livro V do manuscrito.

3.2.2 Lógica Racional, Geométrica e Analítica

Esta obra encontra-se dividida em três partes: *Lógica Racional* (Parte I), *Lógica Geométrica* (Parte II) e *Lógica Analítica* (Parte III). A Parte I aborda a lógica filosófica; a Parte II trata da Geometria Euclidiana, enquanto a Parte III é dedicada à Álgebra. A temática das razões e das proporções é abordada nas Partes II e III. A principal fonte destas Partes é Bernard Lamy: enquanto a *Lógica Analítica* foi elaborada a partir de *Élémens des Mathématiques*, não se verificando uma correspondência tão "exata" como entre o manuscrito e a obra de Ozanam, constata-se que a Lógica Geométrica é uma tradução incompleta da obra *Les Élémens de Géométrie*[6].

Lógica Geométrica. Nesta Parte Azevedo Fortes estabelece que, para comparar duas grandezas A e B, deve-se recorrer à divisão das mesmas: A por B ou B por A, e adota a notação atual: $\frac{A}{B}$ ou $\frac{B}{A}$. A associação da razão entre duas grandezas a uma operação aritmética representa uma diferença em relação ao manuscrito e também às obras referidas anteriormente, uma vez que é feita de forma explícita. Surge a definição de proporção como sendo uma igualdade de razões e é utilizada a notação atual para designar a proporção entre as grandezas A, B, C e D: $\frac{A}{B}$ ou $\frac{B}{A}$. Para além desta notação, existe também a utilizada no manuscrito, a saber, $A.B :: C.D$. No manuscrito não aparece a definição de proporção. Contudo, é referido que grandezas que têm entre si a mesma razão são grandezas proporcionais. Apesar de utilizar exemplos numéricos na explicação deste conceito, facto que é significativo e revelador da "aritmetização", Azevedo Fortes não mencionou operações aritméticas no seu manuscrito.

[6] No estudo realizado as edições consultadas destas obras de Lamy foram as de 1692 e de 1731, respetivamente.

Lógica Analítica. No Capítulo I do Livro III Azevedo Fortes apresenta uma crítica à natureza de uma razão, referindo que definir razão entre duas grandezas apenas como "o modo de uma conter ou estar contida na outra", não é suficiente. Através de exemplos menciona que a razão é uma grandeza, ou quantidade, não absoluta, mas relativa, e por ser deste género é possível efetuar com ela as operações que se realizam com as grandezas absolutas[7]. Refere também que uma proporção é o que resulta da comparação de duas razões. No Capítulo IV é mencionado que a igualdade de duas razões se verifica através da divisão das grandezas que as constituem: se os quocientes forem iguais, as razões serão iguais. No Livro V a palavra fração é associada a *quebrado* e este termo é utilizado em todo o Livro. A fração é associada à divisão de dois números, o que torna possível assumir para as razões todas as operações aritméticas que se efetuam com os números, estando-se perante mais uma aritmetização das razões. Nas duas obras supracitadas de Lamy são dedicadas secções à incomensurabilidade de grandezas. Contudo, Azevedo Fortes aborda esta temática apenas na *Lógica Analítica*, no Capítulo VIII do Livro V, não utilizando os *Élémens des Mathématiques*, fonte principal para esta Parte III: recorre aos *Élémens de Géométrie*, principal referência para a Parte II. De acordo com Azevedo Fortes, a dificuldade na "matéria dos incomensuráveis" consiste em definir a igualdade de razões *surdas*[8], sendo que a comparação entre razões de *número a número* é muito diferente da comparação entre razões surdas . É possível comparar razões de número a número, reduzindo-as (consiste em reduzir as razões ao mesmo consequente, o que é equivalente a reduzir duas frações ao mesmo denominador), procedimento que não pode ser aplicado às razões surdas, uma vez que se fosse possível, as razões não seriam surdas. Ao contrário de Lamy, Azevedo Fortes não apresenta as operações sobre os incomensuráveis, referindo apenas que estas operações são possíveis.

3.3 Algumas considerações sobre as obras referidas

Associar as grandezas comensuráveis a números racionais possibilita a aplicação das operações numéricas a estas grandezas, o que torna esta aritmetização vantajosa. Para proceder da mesma forma para as grandezas incomensuráveis, é necessário aferir da possibilidade de realizar as operações aritméticas entre os números irracionais (entidades que não eram consideradas números). A instituição de uma Aritmética para os irracionais em

[7] As grandezas absolutas são representadas por números inteiros e as relativas por números quebrados (racionais).

[8] As razões surdas são aquelas que são representadas por números irracionais, enquanto as de número a número são representadas por números racionais.

conjunto com a definida para os racionais viabiliza a realização de todas as operações para qualquer tipo de grandeza.

Efetuando uma comparação entre os autores referidos neste artigo verifica-se a existência de duas conceções. A primeira envolve Tacquet, Manoel de Campos, Ozanam e Azevedo Fortes (no manuscrito). Nas suas obras estes autores seguem a ordem dos *Elementos*, acrescentando alguns corolários e lemas que permitem a demonstração de algumas proposições de forma diferente de Euclides. A segunda conceção reúne Lamy e Azevedo Fortes (na Lógica). Estes não seguem a mesma ordem do tratado de Euclides e apresentam uma abordagem diferente: constroem uma teoria válida para todo o tipo de grandezas, com recurso a processos algébricos.

A evolução da Álgebra é acompanhada de uma transformação progressiva dos conceitos de razão e proporção. O desenvolvimento da Aritmética, decorrente da evolução do conceito de número, permitiu efetuar todas as operações, servindo de modelo à Álgebra, algo que não era possível com a "Aritmética Euclidiana". A associação da Álgebra à Geometria reveste a Matemática de um caráter unitário, facto que exigiu a definição das operações sobre as linhas geométricas. Em teoria, estabelecer as operações da Aritmética no âmbito da Geometria possibilitaria a simplificação desta última e permitiria a associação da Geometria à Aritmética e à Álgebra. Para tornar possível esta associação, é necessário tornar válidas para as grandezas em geral, as operações que se realizam para as grandezas que se podem exprimir por números, ou seja, identificar a que operação geométrica corresponde uma operação aritmética/algébrica.

Estabelecer uma teoria de proporções suscetível de ser aplicada a todo o tipo de grandezas, que englobasse todos os *objetos matemáticos*, e que contemplasse as operações algébricas definidas no âmbito da Geometria, esteve na origem do trabalho de muitos estudiosos nos anos seguintes aos que foram objeto deste estudo.

Referências

[1] Ferreira, Maria Elisabete Barbosa, "Teoria(s) de Proporções em Portugal, na Primeira Metade do Século XVIII", Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho (Escola de Ciências), 2013.

O FIM DA *GRUNDLAGENKRISE*

Reinhard Kahle
CENTRIA, CMA e DM, FCT, Universidade Nova de Lisboa
2829-516 Caparica, Portugal
e-mail: kahle@mat.uc.pt

Resumo: Apresentamos uma breve discussão da reacção do mundo matemático aos resultados de Gödel que marcaram o fim da *Grundlagenkrise*.

Abstract: We give a short discussion of the reaction of the mathematical world to Gödel's theorems which mark the end of the *Grundlagenkrise*.

palavras-chave: crise de fundamentos; programa de Hilbert; intuicionismo; teoremas de Gödel; Bourbaki.

keywords: foundational crisis; Hilbert's programme; intuitionism; Gödel's theorems; Bourbaki.

1 A *Grundlagenkrise*

Com a palavra *Grundlagenkrise*, em português "crise de fundamentos", referimo-nos normalmente à discussão sobre os fundamentos da Matemática nos anos 20 do século XX, com DAVID HILBERT e LUITZEN BROUWER como os principais actores em lados opostos. Quando BROUWER promoveu a sua "reconstrução" da matemática seguindo a sua posição filosófica chamada *Intuicionismo*, HILBERT defendeu a "matemática clássica" tentando dar uma justificação baseada no *Formalismo*.

A questão fundamental foi a *natureza* das afirmações matemáticas, e BROUWER pôs em causa certos princípios matemáticos como o *tertium-non-datur*. Ele viu a Matemática como uma actividade mental; e os seus resultados precisam de permitir a "construção" de todos os seus elementos. Ver, por exemplo, [2].

HILBERT tentou responder a este desafio com o seu *programa de Hilbert*: a Matemática só está condicionada pela consistência (coerência). E esta deve ser assegurada por uma reflexão sobre demonstrações formais.

Note-se que HILBERT não foi, de forma alguma, um formalista radical (no sentido: a Matemática é um jogo com símbolos). O seu formalismo foi *táctico* para assegurar a Matemática na sua forma tradicional.

2 Teoremas de Gödel

A discussão teve o seu fim, o mais tardar, com os teoremas de GÖDEL, publicadas em 1931. Estes teoremas mostram que o programa de Hilbert, na sua forma original, não é exequível. Ver, por exemplo, [5].

O primeiro teorema de incompletude de Gödel diz:

Teorema 1 *Um sistema formal (recursivo e consistente) que envolve, pelo menos, a aritmética, contém uma fórmula que, neste sistema, nem é demonstrável nem é refutável.*

O impacto deste teorema no programa de Hilbert não é tão imediato, mas o segundo teorema de incompletude de Gödel não deixa dúvidas:

Teorema 2 *Um sistema formal (recursivo e consistente) que envolve, pelo menos, a aritmética, não permite demonstrar a sua própria consistência.*

Note-se que o primeiro teorema refuta o *logicismo*, como foi concebido por FREGE (que abandonou esta posição depois da descoberta do paradoxo de RUSSELL) e por WHITEHEAD e RUSSELL nos *Principia Mathematica*. Assim, o logicismo de WHITEHEAD e RUSSELL já estava na defensiva nos anos 20, por causa do *axioma de reducibilidade* cuja natureza logicista é mais do que duvidosa.

Pondo um fim ao programa de Hilbert, o segundo teorema, *a fortiori* refuta também o *formalismo*. Mas, por razões intrínsecas, o intuicionismo não pôde usufruir deste resultado.

Claro, que o intuicionismo está também sujeito à incompletude do primeiro teorema de Gödel: a rejeição do *tertium-non-datur* já implica uma forma de tal incompletude. Mas, quando o intuicionismo está a pôr em causa a consistência da matemática clássica, a situação não é melhor para o próprio intuicionismo (pelo menos ao nível da Aritmética): KOLOMOGOROFF, GÖDEL e GENTZEN demonstraram por volta de 1930, de forma independente, que a Aritmética clássica pode ser interpretada na Aritmética intuicionista—pela chamada *interpretação dupla negação*—e, por isso, as duas abordagens são *equiconsistentes*, i.e., se a Aritmética clássica é inconsistente, a Aritmética intuicionista é também inconsistente.

Note-se que a posição filosófica do próprio Gödel foi claramente *platonista* e, de certa forma, o *platonismo* pode ser declarado como “vencedor” do *Grundlagenstreit*.

3 A situação *pós-Gödel*

Numa avaliação do fim da *Grundlagenkrise* não podemos deixar de lado o contexto histórico/político. Os protagonistas da discussão estavam, principalmente, sediados na Europa. O regime nazi, que ganhou o poder na Alemanha em 1933, distruiu grande parte da cultura científica, entre outras a escola matemática em Göttingen, onde HILBERT e a sua escola estava baseada. Muitos matemáticos — incluindo GÖDEL — emigraram da Europa para a América. A segunda guerra mundial agravou bastante a situação em toda a Europa.

Em relação à reacção dos matemáticos, note-se que o "working mathematician" perdeu o interesse em questões filosóficas da matemática. É verdade que a lógica matemática foi "instalada" como sub-disciplina própria da matemática, mas pelo preço de menos interacção com as outras áreas da matemática. Em geral, a discussão filosófica perdeu o contacto com a matemática (e os matemáticos).

3.1 Brouwer

Já o *Annalenstreit*—a expulsão de BROUWER do comité editorial da revista *Mathematische Annalen* por HILBERT em 1928 [6], deixou BROUWER frustrado e desiludido com a comunidade matemática. Depois BROUWER tornou-se mais e mais isolado, ficando com um grupo pequeno na Holanda — do qual fazia parte o seu aluno HEYTING — o único defensor do intuicionismo. Nos anos 50 e 60, o intuicionismo foi praticamente ignorado pelos matemáticos, e BROUWER ganhou mesmo a imagem de "maluco". Só em 1967, com o trabalho de BISHOP sobre o *constructivismo*, a abordagem intuicionista de BROUWER foi novamente reconhecida na matemática. Mais tarde, surgiu a *informática* e foi capaz de usufruir dos trabalhos de BROUWER e da sua escola. Hoje em dia, o intuicionismo está reabilitado, não em competição com a matemática clássica, mas complementando-a.

3.2 Hilbert e a sua escola

HILBERT morreu em 1943 e nunca respondeu propriamente aos teoremas de Gödel. Temos só duas peças: no prefácio do *opus magnum* de HILBERT e BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik* [4], HILBERT diz, em relação aos resultados de GÖDEL, que é só necessário considerar uma "posição finitista mais focada"; e a Regra ω sugerida por HILBERT em 1931, [3, p. 194]. Esta regra é hoje em dia uma base da teoria de demonstração transfinita. A escola de HILBERT, nomeadamente BERNAYS, desenvolveu a nova disciplina de *teoria de demonstração*, paralelamente à escola americana de Alonzo Church. Mesmo sem demonstrações formais de consistência para áreas como a Análise Matemática, a comunidade matemática seguiu o "espírito de Hilbert" na forma como trata as questões filosóficas da matemática.

3.3 Bourbaki

O melhor exemplo para o "sucesso" de HILBERT, é o grupo francês BOURBAKI. BOURBAKI, que se tornou no grupo mais importante da matemática da segunda metade do século XX, propagou uma forma *estruturalista* da matemática [1], que pode ser vista como uma evolução das posições de HILBERT; não na direcção do formalismo, mas baseada no seu *método axiomático*. Não podemos encontrar uma filosofia específica de matemática nas obras de BOURBAKI — podemos mesmo falar de uma "não-filosofia" de BOURBAKI. Mas em termos práticos, BOURBAKI reivindicou a posição inicial de HILBERT contra o intuicionismo, em particular, que a matemática não deve ser limitada no seu desenvolvimento, senão por uma inconsistência.

Referências

[1] N. Bourbaki, "The Architecture of Mathematics", *The American Mathematical Monthly* Vol. 57 (1950), 221–232.

[2] F. Ferreira, "Grundlagenstreit e o intuicionismo Brouweriano", *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, Vol. 58 (2008), pp. 1–23.

[3] D. Hilbert, "Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre", *Mathematische Annalen*, Vol. 104 (1931), pp. 485–494.

[4] D. Hilbert e P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, Vol. 1, Springer, 1934. (Bilingual German–English edition, College Publications, 2011.)

[5] R. Kahle, "Os teoremas de incompletude de Kurt Gödel", *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, Vol. 55 (2006), pp. 63–76.

[6] D. van Dalen, "The War of the frogs and the mice, or the crisis of the *Mathematische Annalen*", *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 12 (1990), pp. 17–31.

Investigação apoiada pelos projectos *A Herança de Hilbert na Filosofia da Matemática* (PTDC/FIL-FCI/109991/2009) e *A noção da demonstração matemática* (PTDC/MHC-FIL/5363/2012), financiados pela FCT/MEC.