Alunos de Doutoramento

Editor Convidado: Hugo Tavares

Estratificações no Espaço Moduli dos Fibrados de Higgs

Ronald A. Zúñiga-Rojas[1]
Centro de Matemática
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Rua do Campo Alegre, s/n
4197-007 Porto, Portugal
e-mail: ronalbzur@gmail.com

Resumo: O trabalho de Hausel prova que a estratificação de Bialynicki-Birula do espaço moduli dos fibrados de Higgs de posto dois coincide com a sua estratificação de Shatz. Estas estratificações não coincidem para posto geral. Aqui, damos uma abordagem para o caso de posto três da classificação da estratificação de Shatz em termos da estratificação de Bialynicki-Birula.

Abstract: The work of Hausel proves that the Bialynicki-Birula stratification of the moduli space of rank two Higgs bundles coincides with its Shatz stratification. These two stratifications do not coincide in general. Here, we give an approach for the rank three case of the classification of the Shatz stratification in terms of the Bialynicki-Birula stratification.

palavras-chave: Geometria Algébrica, Espaços Moduli, Teoria de Gauge, Fibrados de Higgs, Estratificações, Fibrados Vetoriais.

keywords: Algebraic Geometry, Moduli Spaces, Gauge Theory, Higgs Bundles, Stratifications, Vector Bundles.

1 Espaço Moduli de Fibrados de Higgs

Seja Σ uma superfície de Riemann compacta de género $g \geqslant 2$, e seja $K = K_\Sigma = (T\Sigma)^*$ o fibrado de linhas canónico de Σ.

Definição 1.1. Um *fibrado de Higgs* sobre Σ é um par (E, Φ) onde $E \to \Sigma$ é um fibrado vetorial holomorfo e $\Phi: E \to E \otimes K$ é um endomorfismo de E torcido por K, chamado *campo de Higgs*. Repare que $\Phi \in H^0(\Sigma; \mathrm{End}(E) \otimes K)$.

[1]Este trabalho é financiado por Fundos FEDER através do Programa Operacional Factores de Competitividade-COMPETE e por Fundos Nacionais através da FCT-Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito dos projetos PTDC/MAT-GEO/0675/2012 e PEst-C/MAT/UI0144/2013 e a bolsa de estudo com a referência SFRH/BD/51174/2010.

Para um fibrado $E \to \Sigma$ o *declive* define-se como: $\mu(E) := \frac{\deg(E)}{\mathrm{rk}(E)} = \frac{d}{r}$, onde $\deg(E)$ é o grau de E e $\mathrm{rk}(E)$ é seu posto. Para mais informação, veja-se por exemplo Kobayashi [5].

Definição 1.2. Um subfibrado $F \subset E$ é Φ*-invariante* se $\Phi(F) \subset F \otimes K$. Um fibrado de Higgs chama-se *semi-estável* se $\mu(F) \leqslant \mu(E)$ para qualquer subfibrado Φ-invariante não trivial $0 \neq F \subset E$. Chama-se *estável* se a desigualdade é estrita para qualquer subfibrado próprio Φ-invariante não trivial $0 \neq F \subsetneq E$. Finalmente, um fibrado de Higgs chama-se *poli-estável* se é a soma directa de subfibrados de Higgs estáveis, todos com o mesmo declive.

Fixando o posto $\mathrm{rk}(E) = r$ e o grau $\deg(E) = d$ de um fibrado de Higgs (E, Φ), as classes de isomorfismo dos fibrados poli-estáveis são parametrizadas por uma variedade quase-projetiva: o espaço moduli $\mathcal{M}(r, d)$. Construções deste espaço podem encontrar-se no trabalho de Hitchin [4], utilizando Teoria de Gauge, ou no trabalho de Nitsure [6], utilizando métodos de geometria algébrica.

2 Ação de $\mathbb{C}^*$ em $\mathcal{M}(r, d)$

Existe uma ação holomorfa do grupo multiplicativo $\mathbb{C}^*$ em $\mathcal{M}(r, d)$ definida pela multiplicação: $z \cdot (E, \Phi) \mapsto (E, z \cdot \Phi)$. Note que Hausel [3] prova que o limite $\lim_{z \to 0} z \cdot (E, \Phi) = \lim_{z \to 0} (E, z \cdot \Phi)$ está bem definido e existe para todo o $(E, \Phi) \in \mathcal{M}(r, d)$. Além disso, este limite é fixo pela ação de $\mathbb{C}^*$. Sejam $\{F_\lambda\}$ as componentes irredutíveis do lugar de pontos fixos de $\mathbb{C}^*$ em $\mathcal{M}(r, d)$.

Com base no trabalho de Bialynicki-Birula sobre ações de grupos algébricos [1], Hausel [3] define a estratificação de Bialynicki-Birula da seguinte maneira:

Definição 2.1. Considere o conjunto $U_\lambda^{BB} := \{(E, \Phi) \in \mathcal{M}(r, d) | \lim_{z \to 0} z \cdot (E, \Phi) \in F_\lambda\}$. Este conjunto é o *estrato ascendente* da *estratificação Bialynicki-Birula*:

$$\mathcal{M} = \bigcup_\lambda U_\lambda^{BB}.$$

Simpson [8] prova que os pontos fixos da ação $\mathbb{C}^* \circlearrowleft \mathcal{M}(r, d)$ são as chamadas *Variações de Estructura de Hodge*, VHS:

$$(E, \Phi) \text{ tal que } E = \bigoplus_{j=1}^{n} E_j \text{ e } \Phi : E_j \to E_{j+1} \otimes K.$$

Dizemos que (E, Φ) é uma $(\mathrm{rk}(E_1),\ ...,\ \mathrm{rk}(E_n))$-VHS.

3 Estratificação de Shatz

Definição 3.1. Uma *filtração Harder-Narasimhan* de $E \to \Sigma$, é uma filtração da forma:

$$HNF(E): \; E = E_s \supset E_{s-1} \supset \dots \supset E_1 \supset E_0 = 0 \tag{1}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

i. $\mu(E_{j+1}/E_j) < \mu(E_j/E_{j-1})$ para $1 \leqslant j \leqslant s-1$.

ii. $V_j := E_j/E_{j-1}$ é semi-estável para $1 \leqslant j \leqslant s$.

Teorema 3.2 (Shatz [7, Theorem 1])**.** *Todo fibrado vetorial $E \to \Sigma$ tem uma única filtração de Harder-Narasimhan.*

Isto foi provado no caso em que Σ é uma curva algébrica projetiva não-singular, por Harder e Narasimhan [2]. A prova de Shatz [7] é válida para variedades projetivas lisas de qualquer dimensão.

Definição 3.3. Seja $E \to \Sigma$ um fibrado vetorial de posto $\mathrm{rk}(E) = r$, com uma filtração Harder-Narasimhan como a mencionada acima em (1). Definimos o *tipo Harder-Narasimhan*, abreviado HNT, como o vetor

$$\mathrm{HNT}(E): \vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_2, \dots \; \dots, \mu_s, \dots, \mu_s) \in \mathbb{Q}^r \tag{2}$$

onde $\mu_j = \mu(V_j) = \mu(E_j/E_{j-1})$ aparece r_j vezes e $r_j = \mathrm{rk}(V_j)$.

Definição 3.4. Em consequência das Proposições 10 e 11 de Shatz [7], existe uma estratificação finita de $\mathcal{M}(r,d)$ pelo tipo Harder-Narasimhan do fibrado vetorial subjacente a um fibrado de Higgs:

$$\mathcal{M}(r,d) = \bigcup_t U'_t$$

onde $U'_t \subset \mathcal{M}(r,d)$ é o subespaço de fibrados de Higgs (E, Φ) cujo fibrado subjacente E tem $\mathrm{HNT}(E) = t$, e a união é sobre os tipos que existem em $\mathcal{M}(r,d)$.

Proposição 3.5 (Hausel [3, Proposition 4.3.2])**.** *Se $\mathrm{rk}(E) = 2$ temos que a Estratificação de Shatz coincide com a Estratificação de Bialynicki-Birula.*

4 Resultado Principal

Seja $[(E,\Phi)] \in \mathcal{M}(3,d)$ e denote $(E^0,\Phi^0) := \lim_{z\to 0}(E, z\cdot\Phi)$. O estrato da estratificação Bialynicki-Birula a que (E,Φ) pertence é determinado por (E^0,Φ^0), e depende do tipo de Harder-Narasimhan de E, e de certas propriedades de Φ. O nosso Teorema Principal descreve em detalhe esta dependência.

Para enunciar o Teorema é conveniente usar a seguinte notação: para um morfismo entre fibrados vetoriais $\phi : E \to F$ vamos escrever $\ker(\phi) \subset E$ e $\mathrm{im}(\phi) \subset F$ para os subfibrados que se obtêm saturando os respetivos subfeixes.

Teorema 4.1. *(1.) Suponha que $E \to \Sigma$ é um fibrado holomorfo que tem* $\mathrm{HNT}(E) = (\mu_1, \mu_2, \mu_2)$ *onde $\mu_j = \mu(V_j)$ e $V_j = E_j/E_{j-1}$ são semi-estáveis. Considere $\phi_{21} : V_1 \to V_2 \otimes K$ induzido por*

$$E_1 \xrightarrow{\imath} E \xrightarrow{\Phi} E\otimes K \xrightarrow{\jmath\otimes id_K} (E/E_1)\otimes K.$$

Defina $\mathcal{I} := \phi_{21}(E_1)\otimes K^{-1} \subset V_2$ onde $\mathrm{rk}(\mathcal{I}) = 1$, e defina também $F := V_1 \oplus \mathcal{I} \subset V_1 \oplus V_2 = E$ onde $\mathrm{rk}(F) = 2$. Então temos duas possibilidades:

(1.1.) Suponha que $\mu(F) < \mu(E)$. Então (E^0,Φ^0) é uma $(1,2)$-VHS da forma:

$$(E^0,\Phi^0) = \left(V_1 \oplus V_2, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \phi_{21} & 0 \end{pmatrix}\right).$$

(1.2.) Por outro lado, se $\mu(F) \geqslant \mu(E)$ então (E^0,Φ^0) é uma $(1,1,1)$-VHS da forma:

$$(E^0,\Phi^0) = \left(L_1 \oplus L_2 \oplus L_3, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \varphi_{21} & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{32} & 0 \end{pmatrix}\right)$$

onde $L_1, L_2,$ and L_3 são fibrados de linhas.

(2.) Analogamente, suponha que $E \to \Sigma$ é um fibrado holomorfo tal que $\mathrm{HNT}(E) = (\mu_1, \mu_1, \mu_2)$ *onde $\mu_j = \mu(V_j)$ e $V_j = E_j/E_{j-1}$ são semi-estáveis. Considere $\phi_{21} : V_1 \to V_2 \otimes K$ induzido por*

$$E_1 \xrightarrow{\imath} E \xrightarrow{\Phi} E\otimes K \xrightarrow{\jmath\otimes id_K} (E/E_1)\otimes K.$$

Defina $N := \ker(\phi_{21}) \subset V_1$ onde $\mathrm{rk}(N) = 1$. Então, temos duas possibilidades:

(2.1.) Suponha que $\mu(N) < \mu(E)$. Então (E^0,Φ^0) é uma $(2,1)$-VHS da forma:

$$(E^0,\Phi^0) = \left(V_1 \oplus V_2, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \phi_{21} & 0 \end{pmatrix}\right).$$

(2.2.) Por outro lado, se $\mu(N) \geqslant \mu(E)$ *então* (E^0, Φ^0) *é uma* $(1,1,1)$-*VHS da forma:*

$$(E^0, \Phi^0) = \left(L_1 \oplus L_2 \oplus L_3, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \varphi_{21} & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{32} & 0 \end{pmatrix} \right)$$

onde $L_1, L_2,$ *and* L_3 *são fibrados de linhas.*

(3.) Finalmente, suponha que $E \to \Sigma$ *é um fibrado holomorfo tal que* $\mathrm{HNT}(E) = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ *onde* $\mu_j = \mu(V_j)$ *e* $V_j = E_j/E_{j-1}$ *são semi-estáveis.*

(3.1.) Suponha que $\mu(E_2/E_1) < \mu(E)$. *Então podemos definir* F *como no caso (1.), e então, temos duas possibilidades:*
(3.1.1.) Suponha que $\mu(F) < \mu(E)$. *Então:* (E^0, Φ^0) *é uma* $(1,2)$-*VHS.*
(3.1.2.) Se $\mu(F) \geqslant \mu(E)$, *então:* (E^0, Φ^0) *é uma* $(1,1,1)$-*VHS.*

(3.2.) Por outro lado, se $\mu(E_2/E_1) > \mu(E)$, *então podemos definir* N *como no caso (2.), e então, temos duas possibilidades:*
(3.2.1.) Se $\mu(N) < \mu(E)$, *então:* (E^0, Φ^0) *é uma* $(2,1)$-*VHS.*
(3.2.2.) Se $\mu(N) \geqslant \mu(E)$, *então:* (E^0, Φ^0) *é uma* $(1,1,1)$-*VHS.*

Referências

[1] A. Bialynicki-Birula, "Some theorems on actions of algebraic groups", *Ann. of Math.*, Vol. 98 (1973), pp. 480-497.

[2] G. Harder and M.S. Narasimhan, "On the Cohomology Groups of Moduli Spaces of Vector Bundles on Curves", *Springer-Verlag Math. Ann.*, Vol. 212 (1975), pp. 215-248.

[3] T. Hausel, "Geometry of Higgs Bundles", Tese de Doutoramento, Cambridge, United Kingdom, 1998.

[4] N.J. Hitchin, "The Self-Duality Equations on a Riemann Surface", *Proc. London Math. Soc.*, Vol. 55, No. 3 (1987), pp. 59-126.

[5] S. Kobayashi, *Differential geometry of complex vector bundles*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, U.S.A., 1987.

[6] N. Nitsure, "Moduli Space of Semistable Pairs on a Curve", *Proc. London Math. Soc.*, (3) Vol. 62 (1991), pp. 275-300.

[7] S.S. Shatz, "The Decomposition and Specialization of Algebraic Families of Vector Bundles", *Compositio Mathematica* Vol. 35, Fasc. 2. Netherlands, (1977), pp. 163-187.

[8] C.T. Simpson, "Higgs Bundles and Local Systems", *Inst. Hautes Études Sci. Math. Publ.*, (1992), pp. 5-95.