Matemática Recreativa

Editores:
Jorge Picado e Paula Mendes Martins

Surpresas cíclicas

José Paulo Viana
Associação de Professores de Matemática
e-mail: zepaulo46@gmail.com

Resumo: Usando uma calculadora, é fácil criar sequências definidas por recorrência e ir vendo os sucessivos termos. Por vezes, os resultados são surpreendentes e estimulam o espírito de investigação. Iremos ver o que se consegue descobrir quando inesperadamente nos aparece uma sucessão cíclica.

Abstract: Using a calculator, it is easy to create recursive sequences and observe the ensuing terms. Sometimes the results are surprising and stimulate our investigative spirit. We will see what we can discover when we unexpectedly come across a cyclic sequence.

palavras-chave: máquina de calcular; sucessões; ciclos.

keywords: calculator; sequences; cycles.

Há muitos anos, quando consegui finalmente ter uma máquina de calcular, alterou-se a minha relação com a Matemática: passou a ser possível fazer uma enorme série de experiências e investigações que antes eram aborrecidas e trabalhosas e agora se tornavam fáceis e motivadoras.

Uma das coisas de que gostava (sobretudo naquelas reuniões que se prolongavam indefinidamente) era introduzir um número ao acaso, aplicar sucessivamente a mesma transformação, criando uma sucessão definida por recorrência, e depois ver o que acontecia. Era muito simples, bastava escolher um número, carregar em ENTER, escrever uma expressão em que entrasse o resultado anterior (normalmente, o comando é ANS) e depois ir carregando sucessivamente na tecla ENTER (ou =). A maior parte das vezes a sucessão divergia para infinito ou convergia para um número.

Um dia testei esta:

$$u_{n+1} = 1 - \frac{1}{u_n}.$$

Comecemos com um número à nossa escolha. Por exemplo, 11.

$$\begin{aligned} &u_1 = 11 \\ &u_2 = 1 - \tfrac{1}{11} = \tfrac{10}{11} \\ &u_3 = 1 - \tfrac{11}{10} = -\tfrac{1}{10} \\ &u_4 = 1 - (-10) = 11 \end{aligned}$$

O quarto termo é igual ao primeiro. A sucessão repete-se indefinidamente, com um ciclo de amplitude 3:

$$11, \frac{10}{11}, -\frac{1}{10}, 11, \frac{10}{11}, -\frac{1}{10}, 11, ...$$

É fácil mostrar que isto acontece quando se começa por outro número qualquer (ou quase):

$$\begin{aligned} &u_1 = a \\ &u_2 = 1 - \tfrac{1}{a} = \tfrac{a-1}{a} \qquad (a \neq 0) \\ &u_3 = 1 - \tfrac{a}{a-1} = -\tfrac{1}{a-1} \qquad (a \notin \{0,1\}) \\ &u_4 = 1 - (-(a-1)) = a \end{aligned}$$

Realmente, a sucessão é cíclica de período 3, mas o número inicial tem de ser diferente de 0 e de 1.

Este resultado é interessante e inesperado. Por isso, apetece logo fazer novas experiências do mesmo tipo. Seja então:

$$u_{n+1} = 2 - \frac{2}{u_n}$$

$$\begin{aligned}
u_1 &= 11\\
u_2 &= 2 - 2 \times \tfrac{1}{11} = \tfrac{20}{11}\\
u_3 &= 2 - 2 \times \tfrac{11}{20} = \tfrac{9}{10}\\
u_4 &= 2 - 2 \times \tfrac{10}{9} = -\tfrac{2}{9}\\
u_5 &= 2 - 2 \times (-\tfrac{9}{2}) = 11.
\end{aligned}$$

Ah, agora a sucessão é cíclica de período 4:

$$11, \frac{20}{11}, \frac{9}{10}, -\frac{2}{9}, 11, \frac{20}{11}, \frac{9}{10}, -\frac{2}{9}, 11, \ldots$$

Se tivéssemos começado por outro número qualquer (mas diferente de 0, de 1 e de 2), o resultado seria semelhante. Posto isto, temos mesmo de continuar, agora com

$$u_{n+1} = 3 - \frac{3}{u_n}.$$

Antes de avançar, podemos interrogar-nos. Será cíclica? Qual será a amplitude do período? Leitor, vá lá, o que acha? Experimentemos então.

$$\begin{aligned}
u_1 &= 11\\
u_2 &= 3 - 3 \times \tfrac{1}{11} = \tfrac{30}{11}\\
u_3 &= 3 - 3 \times \tfrac{11}{30} = \tfrac{19}{10}\\
u_4 &= 3 - 3 \times \tfrac{10}{19} = -\tfrac{27}{19}\\
u_5 &= 3 - 3 \times \tfrac{19}{27} = \tfrac{8}{9}\\
u_6 &= 3 - 3 \times \tfrac{9}{8} = -\tfrac{3}{9}\\
u_7 &= 3 - 3 \times (-\tfrac{8}{3}) = 11.
\end{aligned}$$

Surpresa! A sucessão é cíclica mas não tem período 5 como poderíamos ter pensado. O período agora é 6. Ficamos um pouco inseguros com isto. Já não nos sentimos tão à-vontade para conjeturar o comportamento da sucessão definida por

$$u_{n+1} = 4 - \frac{4}{u_n}.$$

Nova surpresa. A sucessão não é cíclica. É convergente, embora muito lentamente, para 2 (se duvidar, o leitor pode confirmar isso com a sua máquina). Então, neste momento, temos sucessões definidas por expressões do tipo $u_{n+1} = k - \frac{k}{u_n}$, que são cíclicas, e com:

– Período 3, para $k = 1$;

– Período 4, para $k = 2$;

– Período 6, para $k = 3$.

É de admitir que exista um k, compreendido entre 2 e 3, que dê origem a uma sucessão cíclica de período 5. Temos de o encontrar. Calculemos então os primeiros termos dessa sucessão.

$$
\begin{aligned}
u_1 &= a \\
u_2 &= k - \tfrac{k}{a} \\
u_3 &= k - \tfrac{k}{k-\frac{k}{a}} \\
u_4 &= k - \tfrac{k}{k-\frac{k}{k-\frac{k}{a}}} \\
u_5 &= k - \tfrac{k}{k-\frac{k}{k-\frac{k}{k-\frac{k}{a}}}} \\
u_6 &= k - \tfrac{k}{k-\frac{k}{k-\frac{k}{k-\frac{k}{k-\frac{k}{a}}}}}
\end{aligned}
$$

Efetuando os cálculos para obter uma expressão mais simples, chegamos a:

$$u_6 = \frac{(k^5 - 4k^4 + 3k^3)a - k^5 + 3k^4 - k^3}{(k^4 - 3k^3 + k^2)a - k^4 + 2k^3}.$$

Como queremos que a sucessão tenha período 5, é obrigatório que:

$$
\begin{aligned}
&u_1 = u_6 \Leftrightarrow \\
&a = \tfrac{(k^5-4k^4+3k^3)a-k^5+3k^4-k^3}{(k^4-3k^3+k^2)a-k^4+2k^3}.
\end{aligned}
$$

Desembaraçando de denominadores e simplificando, vem:

$$k^2(k^2 - 3k + 1)a^2 - k^2(k^2 - 3k + 1)a + k^3(k^2 - 3k + 1) = 0.$$

Esta equação tem de ser verdadeira qualquer que seja o valor do primeiro termo a. Para isso acontecer, terá de ser:

$$
\begin{aligned}
&k^2 - 3k + 1 = 0 \Leftrightarrow \\
&k_1 = \tfrac{3+\sqrt{5}}{2} \vee k_2 = \tfrac{3-\sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}
$$

A primeira solução, $k_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \phi\,(\approx 2{,}618034)$, é precisamente o número que estávamos à procura. Se o usarmos no termo geral

$$u_{n+1} = k_1 - \frac{k_1}{u_n}$$

a sucessão irá ser cíclica, de período 5.

Note-se que o segundo valor $\left(k_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ também dá origem a uma sucessão com período 5 mas, para a continuação do nosso estudo, apenas nos interessa o primeiro.

Neste momento, escolhendo valores adequados de k, já sabemos construir sucessões de período 3, 4, 5 e 6.

Se quisermos períodos maiores, podemos seguir o método que usámos para a de período 5. Para ter um período n, calculamos u_{n+1}, igualamos a u_1, obtemos uma equação em k que torna a igualdade anterior sempre verdadeira, e depois resolvemos essa equação em k.

Não vamos transcrever aqui os cálculos todos mas apenas os resultados, incluindo as equações correspondentes aos períodos que vimos atrás.

Período	Equação	Soluções
3	$k-1=0$	$k=\mathbf{1}$
4	$k-2=0$	$k=\mathbf{2}$
5	$k^2-3k+1=0$	$k=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\approx\mathbf{2{,}618034}$ $k=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\approx 0,381966$
6	$k^2-4k+3=0$	$k=\mathbf{3}$ $k=1$
7	$k^3-5k^2+6k-1=0$	$k\approx\mathbf{3{,}2469796}$ $k\approx 1,5549581$ $k\approx 0,1980622$
8	$k^3-6k^2+10k-4=0$	$k\approx\mathbf{3{,}414213}$ $k\approx 0,5857864$ $k=2$
9	$k^4-7k^3+15k^2-10k+1=0$	$k\approx\mathbf{3{,}53208888}$ $k=1$ $k\approx 0,12061475$ $k\approx 2,34729635$
10	$k^4-8k^3+21k^2-20k+5=0$	$k\approx\mathbf{3{,}618034}$ $k\approx 1,381966$ $k\approx 2,618034$ $k\approx 0,381966$

Observando as equações, podemos conjeturar a sua lei de formação.

Grau: aumenta uma unidade de duas em duas equações.
Coeficiente dos termos de maior grau: sempre 1.
Coeficiente dos termos de grau $n-1$: $-1,-2,-3,-4,...$
Coeficiente dos termos de grau $n-2$: $1,3,6,10,15,...$
Coeficiente dos termos de grau $n-3$: $-1,-4,-10,-20,...$

Ou seja, os coeficientes, em valor absoluto, correspondem aos números do triângulo de Pascal.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & & \swarrow & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & \swarrow & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & \swarrow & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & \swarrow & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \swarrow & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \swarrow \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Se isto continuar a verificar-se, torna-se extremamente fácil construir as equações para obter qualquer período que se deseje.

Período 11: $k^5 - 9k^4 + 28k^3 - 35k^2k + 6k - 1 = 0$

Período 12: $k^5 - 10k^4 + 36^3 - 56^2 + 35k - 6 = 0$

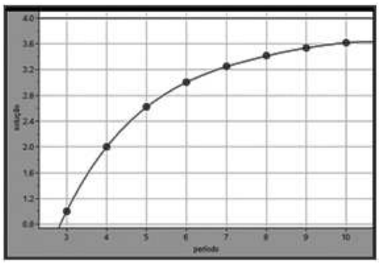
A seguir, precisamos de saber as soluções destas equações.

Antes de avançar, note-se que, o que nos interessa concretamente neste estudo, é a solução próxima e inferior a 4. O ideal seria descobrir uma fórmula simples que nos desse essa solução em função do período pretendido.

Tentemos então. Vamos usar os valores conhecidos até agora, alguns deles obtidos resolvendo as equações por métodos numéricos (com a ajuda de uma máquina gráfica).

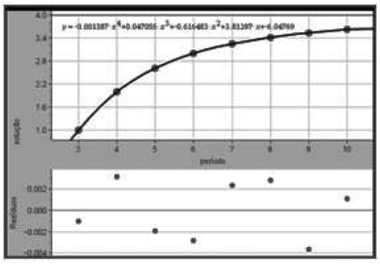
Período	3	4	5	6	7	8	9	10
Solução k	1	2	2,618034	3	3,246980	3,414213	3,532088	3,618034

Fazendo a nuvem de pontos e procurando uma regressão, até conseguimos uma visualmente muito boa.



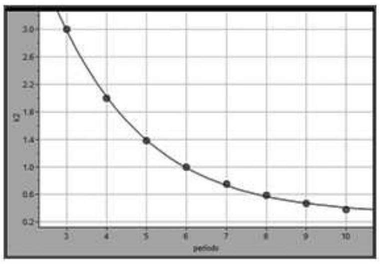
O coeficiente de determinação é altíssimo: $R^2 = 0,999991$.

No entanto, estamos à procura de uma fórmula matemática que nos dê valores exatos e portanto R^2 teria de ser igual a 1. Podemos confirmar que esta correlação não serve pedindo o gráfico dos resíduos, ou seja, o gráfico que nos mostra os desvios entre o modelo escolhido e os valores reais.



Vemos que a curva não passa exatamente nos pontos. Os desvios são todos relativamente pequenos, da ordem das duas milésimas, mas o modelo não serve porque os desvios deveriam resultar apenas de erros de arredondamento. Aliás, foi de propósito que escolhemos este modelo, que é um polinómio de 4º grau. Visualmente parece excelente mas falha completamente: não dá valores exatos e basta pensar que, sendo um polinómio, se afastaria muitíssimo para valores maiores do período. A fórmula que procuramos terá de tender para 4 quando o período tender para infinito.

Como é mais fácil procurar funções a tender para 0 do que para 4, podemos fazer a mudança de variável: $k_2 = 4 - k$.



Mas o problema mantém-se. Nenhuma das regressões habituais coincide exatamente, mesmo descontando os erros de arredondamento (embora algumas andem lá perto).

Outra abordagem será trabalhar com os valores exatos de k e ver se se descobre algum padrão. Já conhecemos alguns valores exatos. Procuremos mais. Usemos a equação para o período 12 como exemplo de uma maneira de os conseguir mais facilmente.

Período 12: $k^5 - 10k^4 + 36k^3 - 56k^2 + 35k - 6 = 0$

Como 12 é múltiplo de 3, 4 e 6, as soluções desta equação terão de incluir as dos períodos 3, 4 e 6 (que já sabemos ser 1, 2 e 3). Então:

$k^5 - 10k^4 + 36k^3 - 56k^2 + 35k - 6 = (k-1)(k-2)(k-3)(k^2 - 4k + 1)$.

As soluções de $k^2 - 4k + 1 = 0$ são

$$k = 2 + \sqrt{3} \vee k = 2 - \sqrt{3}.$$

Para o nosso estudo, a que nos interessa é $k = 2 - \sqrt{3}(\approx 3,732051)$.

Realmente, se usarmos $k = 2 + \sqrt{3}$ para criar uma sucessão do tipo que estamos a estudar, confirmamos que ela é cíclica de período 12.

Continuemos com as equações de outros períodos, indicando apenas a solução procurada.

Período 8: $k^3 - 6k^2 + 10k - 4 = 0$

Uma das soluções é 2 (do período 4). Então:

$k^3 - 6k^2 + 10k - 4 = 0 \Leftrightarrow (k-2)(k^2 - 4k + 2) = 0$

$k = 2 + \sqrt{2}$

Período 10: $k^4 - 8k^3 + 21k^2 - 20k + 5 = 0$

São conhecidas duas soluções (de período 5). Então:

$k^4 - 8k^3 + 21k^2 - 20k + 5 = 0 \Leftrightarrow (k^2 - 3k + 1)(k^2 - 5k + 5) = 0$

$k = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$

Coloquemos estes valores numa tabela.

Período	3	4	5	6	8	10	12
Solução k	1	2	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	3	$2+\sqrt{2}$	$\frac{5-\sqrt{5}}{2}$	$2+\sqrt{3}$

Nenhum padrão é óbvio. Avancemos.

Período 7: $k^3 - 5k^2 + 6k - 1 = 0$

A maior parte das páginas da internet onde se podem resolver equações do 3º grau apresenta apenas as soluções na forma decimal aproximada.

Felizmente, há uma página da WolframAlpha que dá as soluções na forma exata:

`http://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=3f4366aeb9c157cf9a30c90693eafc55`

O que lá aparece, para a solução que nos interessa desta equação, é:

$$k = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{7^{2/3}}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(1+3i\sqrt{3})}} + \sqrt[3]{\frac{7}{2}(1+3i\sqrt{3})}\right)$$

Período 9: $k^4 - 7k^3 + 15k^2 - 10k + 1 = 0$

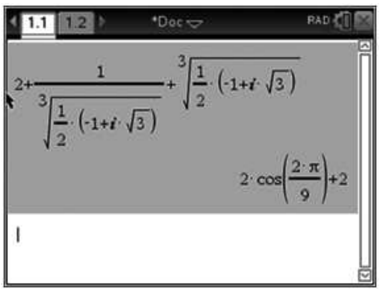
Uma das soluções é 1 (de período 3). Logo, a equação fica

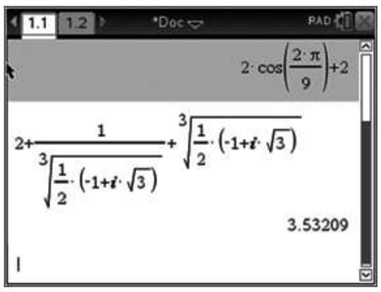
$$(k-1)(k^3 - 6k^2 + 9k - 1) = 0$$

A solução que nos interessa, obtida na página da WolframAlpha, é:

$$k = 2 + \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})}$$

Estes valores, que aparecem para os períodos 7 e 9, tão complicados e envolvendo números complexos, podem fazer-nos desanimar. Mas eles têm de ser simplificáveis porque sabemos que o resultado é um número real. Experimentemos colocar isto numa máquina TI-Nspire CX CAS, que trabalha com cálculo algébrico simbólico. Por exemplo, para o valor que dá o período 9, vejamos o que ela nos dá como resultados, na forma exata e na forma decimal aproximada:





Não há dúvida, o resultado aproximado (3,53209) coincide com a solução obtida por métodos numéricos e a expressão exata tem um aspeto muito simpático que nos faz suspeitar de qualquer coisa.

A conjetura que nos vem imediatamente à ideia é: Para termos um período n, o valor de k será dado por:

$$k = 2\cos\frac{2\pi}{n} + 2$$

Confirmemos numa folha de cálculo do computador ou da calculadora.

Período n	$k = 2\cos\frac{2\pi}{n} + 2$
3	1
4	2
5	2,618034
6	3
7	3,2469796
8	3,4142136
9	3,5320889
10	3,618034
11	3,6825071
12	3,7320508

Os valores coincidem todos com os que tínhamos obtido anteriormente.

Está o problema resolvido, Quer dizer, em rigor seria preciso provar tudo isto matematicamente, mas não o faremos aqui, sairíamos do âmbito das Matemáticas Recreativas. Contentar-nos-emos em verificar que tudo funciona bem para mais um exemplo. Os leitores poderão experimentar outros casos e verão que não falha.

Assim, para obter, por recorrência, uma sequência cíclica de período n, determinamos

$$k = 2\cos\frac{2\pi}{n} + 2$$

e usamos para termo geral

$$u_{n+1} = k - \frac{k}{u_n}.$$

Confirmemos, por exemplo, com período 15 e, tal como anteriormente, fazendo o primeiro termo igual a 11.

Ordem n	Termo u_n
1	11
2	3,479174
3	2,727091
4	2,423731
5	2,248083
6	2,124711
7	2,025862
8	1,937974
9	1,852301
10	1,760963
11	1,653796
12	1,512966
13	1,297562
14	0,877645
15	-0,53355
16	11

Finalmente, algumas considerações mais.

Todas estas descobertas, curiosas e inesperadas, foram possíveis porque dispomos atualmente de meios de cálculo muitíssimo poderosos. Há uns anos atrás, tudo isto era impraticável (pelo menos, para mim). Não só os cálculos demorariam uma eternidade (pouca gente estaria disposta a perder esse tempo) mas, sobretudo, seria muito provável que as conjeturas não nos ocorressem tão facilmente. Elas surgem porque temos à nossa frente uma enorme quantidade de resultados e podemos imediatamente procurar relações, ligações e padrões. Depois, colocada uma conjetura, é fácil testar mais exemplos e ver se ela se mantém.

As alegrias das descobertas matemáticas ficam assim ao alcance de muito mais gente.

Depois disto tudo, não consigo perceber porque há tantas pessoas, incluindo autoridades académicas e ministros da educação, que são contra o uso da tecnologia no ensino da Matemática.