Problemas

Editor:
Jorge Nuno Silva

Notas sobre o Problema anterior e Estética e crítica

Jorge Nuno Silva

Os leitores são convidados a enviar, para eventual publicação, soluções, comentários, propostas de problemas, etc. Essa correspondência deve ser enviada para a SPM, ao cuidado do editor desta secção. Há livros da Gradiva para sortear entre as soluções recebidas em cada número.

Relembremos o problema do número anterior.

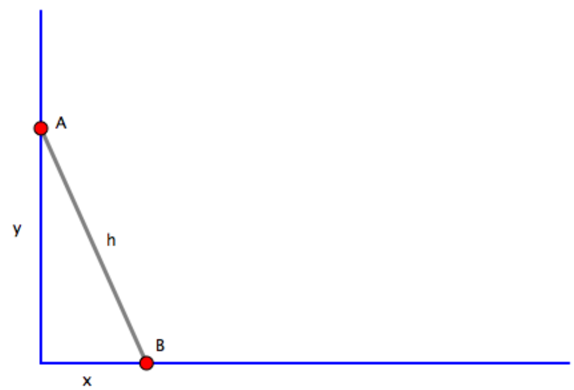
Paradoxos e sofismas

A *Mathematical Association of America* publicou em 2013 um livrinho com o título *ParadoXes and Sophisms in Calculus*. Nele os autores, S. Klymchuck e S. Staples, colocam várias perguntas de algibeira sobre funções, séries, derivadas, integrais e outros conceitos típicos do cálculo infinitesimal. Quem lida com a matemática profissionalmente não se deixará enganar por nenhuma das artimanhas propostas. Muitas delas são bem conhecidas dos leitores deste *Boletim*, estou certo, mas escolhemos três que podem ser novidade e convidar alguns a reflectir um pouco.

Boletim da SPM 74, Novembro 2016, pp. 185–188

1. Uma vara AB está encostada a uma parede vertical. A base da vara, representada pela letra B, é arrastada para a direita a uma velocidade constante, até que a vara assente completamente no solo.

   Seja x a distância, crescente, da base à parede e y a distância, decrescente, do topo ao chão.

   Pelo Teorema de Pitágoras, temos $y = \sqrt{h^2 - x^2}$. Derivando em ordem ao tempo, obtemos

   $$y' = -\frac{xx'}{\sqrt{h^2 - x^2}}\,.$$

   Como a velocidade do ponto B é constante, x' é constante. Calculemos a que velocidade o ponto A se aproxima do solo no momento do impacto:

   $$\lim_{x \to h} y' = \lim_{x \to h} \left(-\frac{xx'}{\sqrt{h^2 - x^2}} \right) = -\infty\,.$$

   Velocidade infinita! Como pode ser?

2. Um caracol move-se ao longo de uma corda de 1 metro de comprimento, partindo de uma das extremidades, à velocidade constante de 1 cm por minuto. Acontece que a corda é elástica, sendo esticada uniformemente

ao fim de cada minuto, acrescentando de cada vez 1 metro ao seu comprimento. Quando a corda é esticada o caracol acompanha o ponto em que se encontra.

Será que o caracol chega ao fim da corda?

3. Seja x um número real não nulo. A igualdade seguinte é evidente

$$x^2 = \underbrace{x + \cdots + x}_{x\ vezes}.$$

Derivando ambos os membros, obtemos

$$2x = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{x\ vezes} = x.$$

Logo $2 = 1$.

1. Acontece que o topo da vara se afasta da parede quando a distância ao chão se torna pequena, invalidando a relação pitagórica (ver também "The Falling Ladder Paradox", *The College Mathematics Journal*, Vol. 27, No. 1 (Jan., 1996), pp. 49–54).

2. Os autores mostram que, ao fim de n minutos, a proporção de corda percorrida é

$$\frac{1}{100}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

Como a série harmónica diverge, o caracol chega ao fim dela em tempo finito.

3. A derivada da soma é a soma das derivadas quando o número de parcelas permanece fixo...

Estética e crítica

No último encontro anual *MathsJam*, que se realiza habitualmente perto de Manchester, no Reino Unido, tomámos conhecimento de um *blog* focado em *puzzles* matemáticos. O seu nome, *Puzzle Critic*, diz que que se propõe: a promoção de elegantes desafios matemáticos. Percorrer os seus arquivos é um prazer, damos com questões muito bem concebidas, de enunciado claro e conteúdo substancial.

Deste *site* vem nossa selecção para hoje, que se resume a três questões sobre números.

1. Seja n um número inteiro positivo qualquer. De cada um dos números $n+1, \ldots, 2n$ seleccione o maior divisor ímpar. Prove que a soma desses divisores é n^2.

2. Seja n um número inteiro positivo qualquer. Mostre que n tem um múltiplo cuja soma dos dígitos é ímpar.

3. As dízimas infinitas $0.abab\ldots$ e $0.abcabc\ldots$ verificam

$$0.abab\ldots + 0.abcabc\ldots = \frac{33}{37}\cdot$$

   Determine os dígitos a, b, e c.