

ACERCA DO ÚLTIMO PROBLEMA DE TAKENS

*Alexandre A. P. Rodrigues*¹

Centro de Matemática da Universidade do Porto
e Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Rua do Campo Alegre 687, 4169-007 Porto, Portugal
e-mail: alexandre.rodrigues@fc.up.pt

Resumo: No contexto de equações diferenciais autónomas, uma solução limitada com comportamento histórico é aquela para a qual as médias de Birkhoff não convergem. O Último Problema de Takens descrito em (F. Takens (2008), *Nonlinearity* 21(3), T33–T36) questiona a existência de sistemas dinâmicos suaves onde o comportamento histórico ocorre persistentemente num conjunto de condições iniciais com medida de Lebesgue positiva. Tendo este desafio como mote, nesta nota pretende-se fazer uma pequena digressão sobre o problema, assim como referir alguns dos desenvolvimentos recentes do tema em fluxos com ciclos heteroclínicos associados a soluções periódicas com multiplicadores de Floquet reais.

Abstract: In the context of an autonomous differential equation, a limited solution with historic behaviour is one for which the Birkhoff averages do not converge as time goes to infinity. Takens' Last Problem described in (F. Takens (2008), *Nonlinearity*, 21(3), T33–T36) asks for smooth dynamical systems where historic behaviour occurs persistently for initial conditions in a set with positive Lebesgue measure. This note reports recent progresses on the field, stressing the role of heteroclinic networks involving periodic solutions with real Floquet multipliers.

palavras-chave: Comportamento histórico, Médias de Birkhoff, Ciclo heteroclínico, Tangências, Fenómenos de Newhouse.

keywords: Historic behaviour, Birkhoff averages, Heteroclinic cycle, Tangencies, Newhouse phenomena.

¹A investigação levada a cabo pelo autor, membro do Centro de Matemática da Universidade do Porto (UID/MAT/00144/2019), teve apoio financeiro da Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT), através do programa FEDER, com fundos nacionais (Ministério da Ciência e Ensino Superior) e da União Europeia (FEDER). A.A.P. Rodrigues é apoiado financeiramente através do Programa Investigador FCT (IF/00107/2015).



Figura 1: Retrato de Floris Takens na Academia da Universidade de Groningen, da autoria de Jacqueline Kasemier. (**Fonte:** Foto de *University of Groningen's Academy*)

1 Introdução

A descrição geométrica de um atrator caótico é, em geral, difícil e é nesse contexto que a análise qualitativa e probabilística de equações diferenciais se torna relevante. Num registo longo de séries temporais de um sistema caótico, espera-se que, para condições iniciais genéricas, as médias temporais convirjam [19]. No entanto, há casos em que estas médias temporais não se aproximam de nenhum número, independentemente do tempo que se espere. Este comportamento, dito *histórico*, está associado a dinâmica intermitente, que ocorre tipicamente perto de ciclos heteroclínicos (ou em sistemas cujos fluxos podem ser aproximados por ciclos).

Tendo [12] como ponto de partida, o objetivo deste texto é o de explorar a persistência de comportamento histórico para uma classe de sistemas envolvendo ciclos heteroclínicos robustos, induzindo uma resposta parcial ao *Último Problema de Takens* [24]. Mais precisamente, discutir-se-á a dinâmica perto de atratores heteroclínicos caóticos não hiperbólicos que exibem, na sua vizinhança, um conjunto “visível” de soluções cujas médias temporais não convergem, e dentro do qual o fenómeno da existência de comportamento histórico é persistente (*i.e.* mantém-se para pequenas perturbações do sistema). Esta análise é efetuada, numa primeira fase, estudando-se uma família uni-paramétrica de campos de vetores cujo fluxo exhibe soluções periódicas conectadas ciclicamente e cujas variedades invariantes coincidem – veja-se §3. Seguidamente, em §4, mostrar-se-á que, sob perturbações genéricas que envolvem a quebra de coincidência das variedades, existem valores

do parâmetro para os quais as variedades invariantes de soluções periódicas consecutivas (do ciclo) exibem tangências homoclínicas. Isto implica a *propriedade de Newhouse* [16] da existência de densidade de tangências (no parâmetro de bifurcação) e de infinitos poços. Os resultados de [5, 13] podem então ser usados para fornecer uma resposta afirmativa ao problema proposto por Takens em [24].

1.1 Médias temporais e comportamento histórico

Sejam M uma variedade tridimensional compacta e sem bordo, e $f : M \rightarrow TM$ um campo de vetores suficientemente suave (pelo menos C^2) associado à equação diferencial autónoma:

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{onde} \quad x(0) = x_0 \in M. \quad (1)$$

O grupo de difeomorfismos a um parâmetro $\varphi : I \times M \rightarrow M$, $I \subset \mathbb{R}$, que verifica

$$f(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x)|_{t=0}$$

designa-se por *fluxo* associado ao Problema de Valor Inicial (1). Como M é uma variedade compacta e sem bordo, então pode-se assumir que $I = \mathbb{R}$. A terminologia que se segue foi introduzida por Ruelle [19].

Definição 1 Diz-se que a solução $\varphi(t, x_0)$, $x_0 \in M$, tem comportamento histórico se existir uma função contínua $H : M \rightarrow \mathbb{R}$, por vezes designada por observável, tal que a média temporal de Birkhoff

$$\frac{1}{T} \int_0^T H(\varphi(t, x_0)) dt \quad (2)$$

diverge.

Segundo [19, 24], a expressão *comportamento histórico* deve-se ao facto de uma solução $\varphi(t, x_0)$, $t \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in M$, com comportamento histórico, reter informações sobre o seu passado. A não existência de limite em (2) pode ser assegurada através da existência de pelo menos duas sequências de tempos diferentes, digamos $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ e $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$, tais que:

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} H(\varphi(t, x_0)) dt \neq \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{1}{S_i} \int_0^{S_i} H(\varphi(t, x_0)) dt.$$

O comportamento limite das médias temporais em relação a uma dada medida é estudado desde Sinai [21], Ruelle [20] e Bowen [3]. A existência de um conjunto aberto (não vazio) de soluções exibindo comportamento histórico persistente é visto como um fenómeno raro.

Antes de se estudarem alguns exemplos com e sem comportamento histórico, convém lembrar ao leitor alguns conceitos sobre ciclos e redes heteroclínicos e que podem ser encontrados na referência [7].

1.2 Ciclos e redes heteroclínicos

Sejam $A \subset M$ um conjunto invariante pelo fluxo do sistema (1) e d a métrica riemanniana associada a M . Para cada conjunto invariante A definam-se os conjuntos

$$W^s(A) = \{x \in M : \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\varphi(t, x), A) = 0\}$$

e

$$W^u(A) = \{x \in M : \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, x), A) = 0\},$$

os quais possuem estrutura de variedade diferenciável e são designados de *variedades invariantes* de A , respectivamente *estável* e *instável*. Os casos mais interessantes dizem respeito a conjuntos invariantes A tais que $W^s(A) \neq A$ e $W^u(A) \neq A$, os quais irão ser designados, daqui em diante, por *selas invariantes* (veja-se Figura 2).

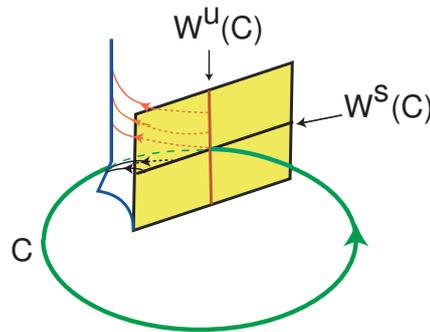


Figura 2: Exemplo de uma sela invariante com variedades estável e instável não triviais.

Dadas duas selas invariantes A e B , se $W^u(A) \cap W^s(B) \neq \emptyset$, dizemos que existe uma *ligação heteroclínica* de A para B . No caso de $\dim [W^u(A) \cap$

$W^s(B)] > 1$, essa ligação heteroclínica corresponde a uma união de curvas-solução do sistema (1) que se aproximam de A no passado e de B no futuro.

Ciclos heteroclínicos têm definições mais ou menos formais na literatura. Seguindo de perto Field [7], um *ciclo heteroclínico* é dado pela união de um conjunto finito ordenado de selas invariantes $\mathcal{A} = \{A_i, i = 1, \dots, k\}$ tais que existe um ciclo de ligações heteroclínicas entre elas, isto é, existe uma ligação heteroclínica de A_j para A_{j+1} , para todo $j = 1, \dots, k - 1$ e de A_k para A_1 . Quando o ciclo só possui uma sela, o ciclo é designado de *homoclínico*. Uma *rede heteroclínica* é a união conexa de ciclos heteroclínicos, de modo que, para qualquer par de selas A_i e A_j na rede, existe uma sequência de ligações heteroclínicas que as une ($i, j \in \{1, \dots, k\}$).

1.3 Bacia de atração

Sejam $A \subset M$ um conjunto invariante pelo fluxo do sistema (1). A bacia de atração associada a A , denotada daqui em diante por $\mathcal{B}(A)$, é definida por:

$$\mathcal{B}(A) = \{x \in M : \omega(x) \subset A\} \setminus A,$$

onde $\omega(x)$ é o conjunto de todos os pontos de acumulação da trajectória $\varphi(t, x)$, com $t \in \mathbb{R}^+$.

1.4 Exemplos sem comportamento histórico visível

Exemplo 1.

Seja f um campo de vetores C^2 em \mathbb{R}^n e $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Sejam $p \in \mathbb{R}^n$ um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de (1) e $C \subset \mathbb{R}^n$ uma solução ξ -periódica atratora de (1) parametrizada por s , $C(s)$ – vejam-se Figuras 3(a) e 3(b). Se $X \in \mathcal{B}(\{p\})$ e $Y \in \mathcal{B}(C)$, então:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T H(\varphi(t, X)) dt = H(p) \in \mathbb{R}$$

e

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T H(\varphi(t, Y)) dt = \int_0^\xi H(C(s)) ds \in \mathbb{R}.$$

Em particular, nenhuma solução da bacia de atração de p e C exhibe comportamento histórico.

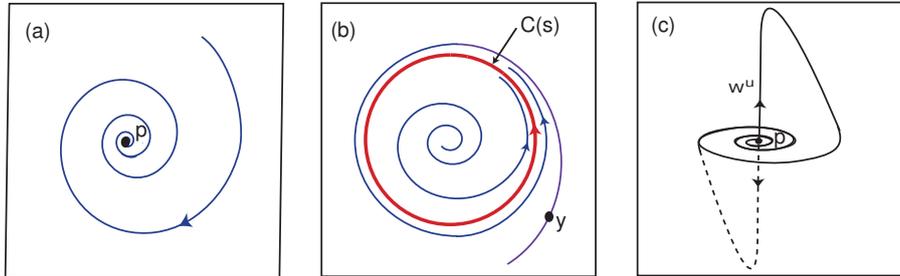


Figura 3: Esboço de: (a) um ponto de equilíbrio, (ii) uma solução periódica e (iii) uma rede homoclínica, todos atratores.

Exemplo 2.

Sejam f um campo de vetores C^2 em \mathbb{R}^n , $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, p um ponto de equilíbrio do tipo sela e Γ um ciclo homoclínico atrator associado a p (veja-se um exemplo desta configuração na Figura 3(c)). Se $X \in \mathcal{B}(\{p\})$, então:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T H(\varphi(t, X)) dt = H(p) \in \mathbb{R}.$$

Noutros termos, tal como no Exemplo 1, nenhum ponto da bacia de atração de Γ exhibe comportamento histórico; estatisticamente as soluções passam *Lebesgue – quase todo o tempo* perto do ponto de equilíbrio p e não ao longo da conexão.

Exemplo 3.

Sejam (M, \mathcal{B}, μ) um espaço de probabilidade e $\Phi(t, \star)$ um fluxo μ -invariante definido em M onde a medida de probabilidade μ é absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue. Do Teorema Ergódico de Birkhoff, decorre imediatamente que, se $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função μ -integrável, então, para *Lebesgue – quase todos os pontos* em M , a média

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T H(\varphi(t, x)) dt$$

converge. Noutros termos, no mundo conservativo (no sentido em que uma medida equivalente à medida de Lebesgue é preservada), se houver comportamento histórico, este será “invisível” relativamente a esta medida.

1.5 Exemplos não genéricos com comportamento histórico

Nesta seção, explicitam-se alguns exemplos não genéricos com comportamento histórico que ocorrem em famílias de sistemas dinâmicos. O primeiro trata-se de um sistema discreto explorado por Hofbauer e Keller [9], onde se mostrou que a família logística contém elementos para os quais *Lebesgue quase todas* as órbitas têm comportamento histórico.

Olho de Bowen

O segundo exemplo, no caso contínuo, é devido a Bowen², que descreveu um sistema de equações diferenciais (com dois parâmetros) em \mathbb{R}^2 da forma $\dot{x} = f(x)$, onde f é C^2 , e cujo fluxo satisfaz as seguintes propriedades (veja-se Figura 4(a)):

- (B1) P^+ e P^- são pontos de equilíbrio;
- (B2) existem duas ligações heteroclínicas unidimensionais, uma de P^+ para P^- e a outra P^- para P^+ ;
- (B3) os valores próprios $Df(P^+)$ e $Df(P^-)$ são tais que o ciclo Γ definido pela união dos pontos de equilíbrio (tipo sela) e pelas as trajetórias que os conectam, contém um aberto não vazio de condições iniciais que se aproximam, em tempo positivo, de Γ .

A união dos pontos de equilíbrio e das trajetórias que os conectam originam o ciclo heteroclínico Γ , também conhecido por “*Olho de Bowen*”. O seguinte resultado evidencia que qualquer solução na bacia de atração de Γ tem comportamento histórico.

Teorema 1 (Takens [23]) *Seja $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $G(P^+) \neq G(P^-)$ e seja $x_0 \in \mathcal{B}(\Gamma)$. Então:*

$$\liminf \frac{1}{T} \int_0^T G(\varphi(t, x_0)) dt < \limsup \frac{1}{T} \int_0^T G(\varphi(t, x_0)) dt.$$

No entanto, perturbando de forma genérica o campo de vetores, o ciclo Γ quebra-se e o sistema perde a propriedade de existência de comportamento histórico (Figura 4(b)).

²Conforme referido por Takens [24], Bowen nunca terá publicado este resultado.

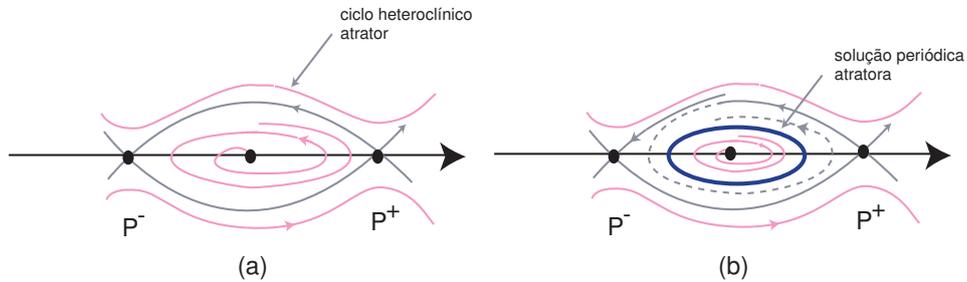


Figura 4: (a) “*Olho de Bowen*” descrito por Takens cuja bacia de atração contém um aberto não vazio de condições iniciais cujas trajectórias se aproximam do ciclo. (b) A quebra do “*Olho de Bowen*” origina genericamente uma solução periódica atratora (sem comportamento histórico).

O comportamento histórico pode-se tornar persistente para sistemas dinâmicos que *preservam o bordo de uma variedade* ou na *presença de simetria*. Outros exemplos de alta codimensão com atratores heteroclinicos, onde para *Lebesgue – quase todas as trajectórias*, as médias de Birkhoff não convergem, foram dados por Gaunersdorfer [8] e Sigmund [22]. No entanto, a resolução parcial ou total do problema que motiva a redação deste texto exige uma abordagem mais geral que não contempla este tipo de restrição.

Uma justificação para a crença de que a existência de comportamento histórico é um fenómeno raro prende-se com o conteúdo do “*Último Problema de Takens*” [12, 13, 24]: *existem classes de sistemas dinâmicos suaves onde o comportamento histórico ocorre persistentemente num conjunto de condições iniciais com medida de Lebesgue positiva?* Em termos ergódicos, esse problema é equivalente a encontrar uma classe persistente de sistemas que não admite medidas físicas³ [22]. A designação “*Último Problema de Takens*” deve-se ao facto de ter sido o último trabalho publicado por Floris Takens (cujo retrato se encontra na Figura 1) com problemas em aberto.

O exemplo paradigmático com comportamento histórico persistente foi sugerido no trabalho de Colli e Vargas em [5], no qual os autores apresentaram um modelo simples caracterizado pela existência de um difeomorfismo bidimensional com uma *Ferradura de Smale* cujas variedades invariantes exibem tangências persistentes sob perturbações arbitrariamente pequenas (na

³Uma medida física para um C^1 -difeomorfismo f definido numa variedade M é uma medida f -invariante μ definida em M na qual, para toda a função contínua φ , a igualdade $\lim_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\mu$ ocorre num conjunto de condições iniciais x com medida de Lebesgue positiva.

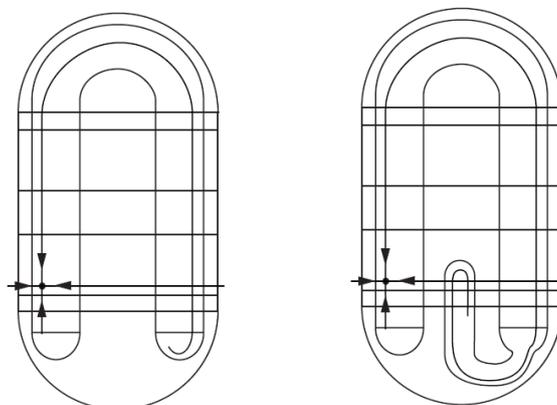


Figura 5: Exemplo de Colli e Vargas [5]: Ferradura de Smale clássica e variante em que se ilustra o desdobramento de uma tangência homoclínica de um ponto periódico hiperbólico.

topologia C^2). Os autores de [5] sugerem que essa configuração, ilustrada na Figura 5(b), implicaria a existência robusta de conjuntos abertos não vazios com comportamento histórico.

Recentemente, os autores de [13] provaram que qualquer *conjunto aberto de Newhouse* (munido da topologia C^r , $r \geq 2$)⁴ está contido no fecho do conjunto de difeomorfismos que possuem domínios errantes não triviais cujas órbitas têm comportamento histórico. Usufruindo desta configuração, uma resposta ao *Último Problema de Takens* é dada em [13] (caso discreto), onde os autores usaram as ideias sugeridas em [5] para encontrar um domínio errante não-trivial onde o difeomorfismo contrai área. De forma persistente, os autores de [13] obtêm um conjunto aberto não vazio de condições iniciais para o qual as médias temporais (das trajetórias associadas) não convergem. Até onde sabemos, o problema original, enunciado para fluxos, permanece aberto até agora.

Sem introduzir demasiado formalismo, no presente texto exhibe-se uma classe de sistemas dinâmicos suaves onde o comportamento histórico ocorre persistentemente num conjunto de condições iniciais com medida de Lebes-

⁴Dado um C^2 -difeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, um ponto n_0 -periódico de f diz-se *dissipativo* se $|\det Df^{n_0}(p)| < 1$. Um *conjunto de Newhouse* é um conjunto de C^2 -difeomorfismos bidimensionais dissipativos que apresentam um ponto periódico hiperbólico com uma tangência homoclínica; mais detalhe em [13, 16].

gue positiva. As demonstrações dos resultados deste texto foram omitidas mas podem ser encontrados no artigo [12].

2 Hipóteses

O objeto de estudo do presente texto é a dinâmica em torno de um ciclo heteroclínico associado a k soluções periódicas, $1 < k \in \mathbb{N}$, para as quais se dá, em seguida, uma descrição rigorosa. Especificamente, estudar-se-á uma família uni-paramétrica de equações diferenciais da forma

$$\dot{x} = f_\lambda(x), \quad (3)$$

onde, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, f_λ é um campo de vetores C^2 , definido em \mathbb{R}^3 , cujo fluxo tem as seguintes propriedades (vejam-se as Figuras 6 e 7):

- (P1) Para $\lambda = 0$ e $a \in \mathbf{Z}_k = \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$, existem k soluções periódicas hiperbólicas P_a de (3) de período mínimo $\xi_a > 0$. Os multiplicadores da Floquet⁵ de P_a são dados por $\exp(e_a) > 1$ e $\exp(-c_a) < 1$ onde $c_a > e_a > 0$.
- (P2) Para $\lambda = 0$ e $a \in \mathbf{Z}_k$, as variedades invariantes locais $W^s(P_a)$ e $W^u(P_a)$ são superfícies suaves homeomorfas a um cilindro – veja-se a Figura 6.
- (P3) Para $\lambda = 0$ e $a \in \mathbf{Z}_k$, cada um dos ramos de $W^u(P_a)$ coincide com um dos ramos de $W^s(P_{a+1})$, formando uma rede heteroclínica, a que chamaremos Γ_0 .
- (P4) (Transversalidade) Para $\lambda \neq 0$ e para cada $a \in \mathbf{Z}_k$, cada ramo da variedade bidimensional $W^u(P_a)$ intersecta transversalmente um ramo de $W^s(P_{a+1})$ em (pelo menos) duas trajetórias, formando uma rede heteroclínica Γ_λ .

Para $\lambda \neq 0$, qualquer uma das duas trajetórias de (P4) em $W^u(P_a) \cap W^s(P_{a+1})$ será indicada por $[P_a \rightarrow P_{a+1}]$. Uma suposição mais técnica,

⁵Os *multiplicadores de Floquet* de uma órbita periódica \mathcal{C} podem ser vistos como os valores próprios da linearização da aplicação de primeiro retorno induzida por \mathcal{C} .

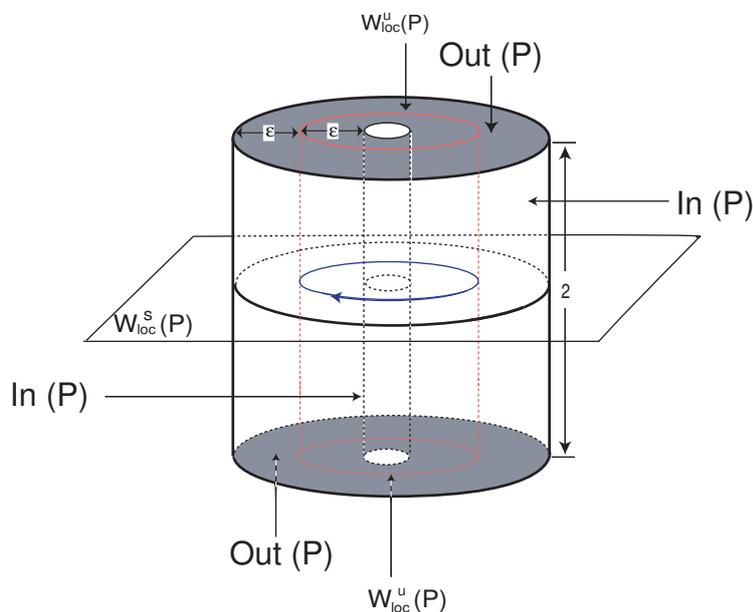


Figura 6: Dinâmica local numa vizinhança de uma solução periódica hiperbólica P . Uma solução que comece em $\text{In}(P)$ (parede lateral do cilindro), entra dentro da vizinhança V em tempo positivo e, se não estiver em $W^s(P)$, sai de V . Uma solução que comece em $\text{Out}(P)$ (“tampas” do cilindro), sai de V .

designada adiante por (P5), será assumida depois de se ter estabelecido alguma notação. Para cada $a \in \mathbf{Z}_k$, definam-se as seguintes constantes:

$$\delta_a = \frac{c_a}{e_a} > 1, \quad \mu_{a+1} = \frac{c_a}{e_{a+1}} > 0, \quad \delta = \prod_{a=1}^k \delta_a > 1$$

e ainda

$$\bar{x}_a = \frac{1}{\xi_a} \int_0^{\xi_a} P_a(s) ds \in \mathbb{R}^3.$$

Sem perda de generalidade, assumam-se que $\xi_a = 1$, para todos $a \in \mathbf{Z}_k$. Geometricamente, $\bar{x}_a \in \mathbb{R}^3$ pode ser visto como o *centro de gravidade* da solução periódica P_a . Usando técnicas de simetria e o método de levantamento por rotação desenvolvido em [1, 17], um exemplo de um campo de vetores satisfazendo as propriedades (P1)–(P5) é apresentado em [12, §7].

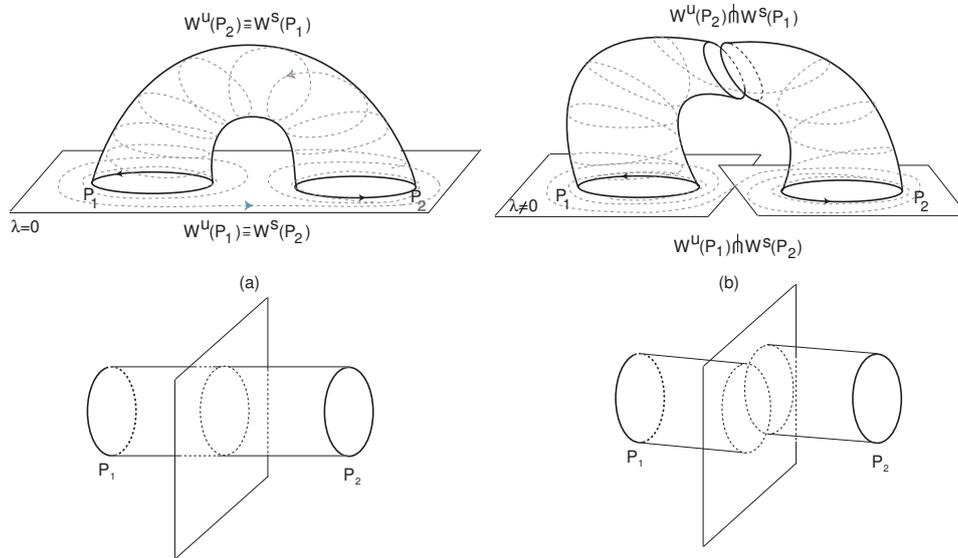


Figura 7: Configuração (P1)–(P4) para $k = 2$. (a) $\lambda = 0$. (b) $\lambda > 0$.

3 $\lambda = 0$: dinâmica regular

A dinâmica de estruturas heteroclínicas envolvendo soluções periódicas satisfazendo (P1)–(P4) foi estudada em [2, 10, 17] em diferentes contextos. Uma vez que o campo de vetores f_0 satisfaz (P1)–(P3) então, adaptando o critério de Krupa e Melbourne [14, 15], qualquer solução com condição inicial suficientemente próxima de Γ_0 irá aproximar-se do ciclo em tempo positivo; noutros termos, o ciclo Γ_0 é *Lyapunov assintoticamente estável*. Em particular, na topologia usual de \mathbb{R}^3 , tem-se:

Corolário 2 ([12]) *A bacia de atração de Γ_0 contém um conjunto aberto não vazio.*

Tal como está sugerido no esquema da Figura 6, denotando por V_j , $j = 1, \dots, k$, uma vizinhança de P_j perto da qual o campo de vetores (3) se pode linearizar⁶, é possível dividir a sua fronteira em dois tipos de conjuntos, a saber:

⁶Esta vizinhança existe e está bem definida para um conjunto aberto e denso dos multiplicadores de Floquet – Lema A1 de [12].

- $\text{In}(P_j)$: uma solução que comece neste conjunto, entra dentro da vizinhança V_j em tempo positivo e, se não estiver na $W^s(P_j)$, sai de V_j ao fim de tempo $\tau_j \geq 0$.
- $\text{Out}(P_j)$: uma solução que comece neste conjunto sai da vizinhança V_j em tempo positivo.

Deste modo, assumindo que as transições entre P_j e P_{j+1} são instantâneas, se $X_1 \in \text{In}(P_1)$, podem-se definir as seguintes sequências de tempo (ver Figura 8):

- τ_j : sequência de períodos de tempo no qual a solução está na vizinhança de P_j e
- $T_1 = 0$ e $T_{j+1} = \sum_{i=1}^j \tau_i$.

Com base no Corolário 2, à medida que uma trajetória se aproxima de Γ_0 , ela visita as soluções periódicas do ciclo de forma recorrente e ordenada. Admitindo que $X_1 \in \text{In}(P_1)$, a trajetória associada dispense um tempo τ_1 na vizinhança P_1 , posteriormente passa um tempo τ_2 na vizinhança P_2, \dots e, ao fim de T_{k+1} unidades de tempo, volta a visitar a solução periódica inicial P_1 , por um período de tempo τ_{k+1} o qual se pode relacionar com o tempo original τ_1 do seguinte modo: $\tau_{k+1} = \delta \tau_1$. Mais genericamente, tem-se:

Lema 3 (Corol. 3, [12]) $\tau_{j+1} = \frac{c_j}{e_{j+1}} \tau_j$ e $\tau_{j+k} = \delta \tau_j$.

A sucessão dos regimes oscilatórios do tempo em que as soluções permanecem perto de selas consecutivas é uma progressão geométrica. A este tipo de regimes oscilatório chama-se vulgarmente de *intermitência*. Qualquer solução passa a maior parte do tempo perto das selas e não ao longo das conexões, razão pela qual se diz que o *atrator estatístico* de Γ_0 é a união das selas que a ele pertencem (Proposição 1 de [12]). Esta propriedade torna legítima a assunção de que as transições entre as vizinhanças de P_j ocorrem instantaneamente.

Para caracterizar o conjunto de pontos de acumulação de $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t, X) dt$ com $X \in \mathcal{B}(\Gamma_0)$, definam-se os pontos:

$$A_a = \frac{\bar{x}_a + \mu_{a+1}\bar{x}_{a+1} + \mu_{a+1}\mu_{a+2}\bar{x}_{a+2} + \dots + \prod_{l=1}^{k-1} \mu_{a+l}\bar{x}_{a+k-1}}{1 + \mu_{a+1} + \mu_{a+1}\mu_{a+2} + \dots + \prod_{l=1}^{k-1} \mu_{a+l}} = \frac{\text{num}(A_a)}{\text{den}(A_a)}, \quad (4)$$

em que $a \in \mathbf{Z}_a$, $\text{num}(A_a) \in \mathbb{R}^3$ e $\text{den}(A_a) \in \mathbb{R}^+$.

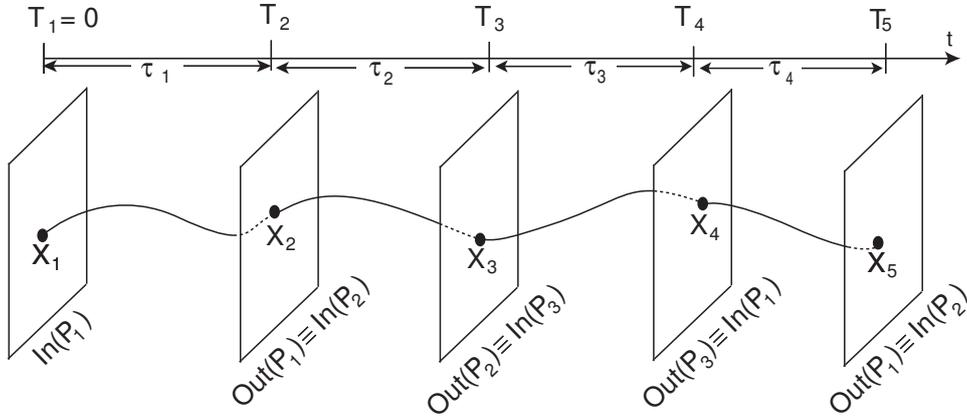


Figura 8: Terminologia dos tempos.

Teorema 4 (Teorema 8, [12]) *Seja f_0 um campo de vetores em \mathbb{R}^3 satisfazendo (P1)–(P3). Então para qualquer $X \in \mathcal{B}(\Gamma_0)$, o conjunto de pontos de acumulação da média temporal*

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t, X) dt$$

é a fronteira do k -polígono definido por A_1, A_2, \dots, A_k . Quando $\delta \rightarrow 1$, o k -polígono colapsa num ponto.

As posições dos vértices do k -polígono e dos centros de gravidade das soluções periódicas P_a não são aleatórias, obedecendo a k condições algébricas (ver Proposição 7 de [12]). Em particular, os pontos A_{a+1} , A_a e \bar{x}_a são colineares (veja-se Figura 9):

$$\begin{aligned} A_{a+1} &= \frac{\text{num}(A_{a+1})}{\text{den}(A_{a+1})} \\ &= \left(\frac{\text{den}(A_a)}{\mu_{a+1} \text{den}(A_{a+1})} \right) \frac{\text{num}(A_a)}{\text{den}(A_a)} + \left(\frac{\delta - 1}{\mu_{a+1} \text{den}(A_{a+1})} \right) \bar{x}_a \\ &= \alpha A_a + \beta \bar{x}_a. \end{aligned}$$

onde

$$\alpha = \frac{\text{den}(A_a)}{\mu_{a+1} \text{den}(A_{a+1})} = 1 - \frac{\delta - 1}{\mu_{a+1} \text{den}(A_{a+1})} = 1 - \beta.$$

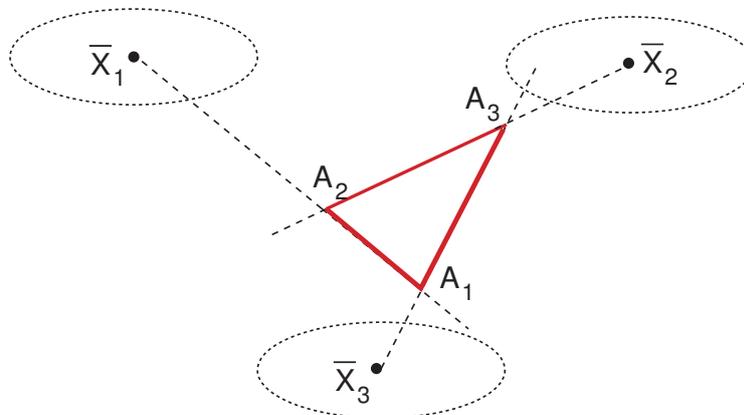


Figura 9: Ilustração do Teorema 4 para $k = 3$.

A última proposição do Teorema 4 é consistente com a teoria desenvolvida por [6] em que os autores descrevem resultados sobre a existência de médias temporais no caso conservativo. Neste contexto, não há atratores na dinâmica (consequência do Teorema de Liouville); em particular, $\delta = 1$. Daí que o Teorema 4 vai ao encontro dos resultados de [6] que referem a existência de um *ponto de equilíbrio interior* como média temporal.

O Teorema 4 tem como consequência o seguinte corolário (bastando que o observável exigido pela Definição 1 seja a projeção em cada uma das componentes canónicas).

Corolário 5 *Seja f_0 um campo de vetores em \mathbb{R}^3 satisfazendo (P1)–(P3). Então, para qualquer $X \in \mathcal{B}(\Gamma_0)$, a sua trajectória exhibe comportamento histórico.*

Relativamente ao Corolário 5, o facto marcante é que as médias de Birkhoff divergem de um modo uniforme: elas aproximam-se de um polígono. Esta propriedade contrasta com os atratores estranhos ergódicos e hiperbólicos os quais, genericamente, admitem uma medida física (Teorema de Sinai-Ruelle-Bowen), onde quase todas as condições iniciais induzem médias de Birkhoff convergentes, apesar da dinâmica complexa que se pode observar.

4 $\lambda > 0$: dinâmica caótica

Dado $a \in \mathbf{Z}_k$, da coincidência das ligações heteroclínicas cilíndricas de dimensão 2, $W^u(P_a)$ e $W^s(P_{a+1})$, desdobram genericamente duas configurações (veja-se [4]):

- $W^u(P_a)$ e $W^s(P_{a+1})$ não se intersectam;
- $W^u(P_a)$ e $W^s(P_{a+1})$ intersectam-se num número par de trajetórias.

Para $\lambda \neq 0$, por (P4), assume-se que as variedades invariantes das soluções periódicas do ciclo intersectam-se transversalmente. Vai-se ainda admitir a seguinte hipótese adicional ilustrada na Figura 10:

- (P5) Para cada $a \in \mathbf{Z}_k$ e $\lambda \neq 0$ próximo de zero, as variedades $W^u(P_a)$ e $W^s(P_{a+1})$ intersectam-se numa curva fechada em $\text{In}(P_{a+1})$.

A partir de agora, discutir-se-á a equação diferencial (3) satisfazendo (P1)–(P5), com $\lambda \neq 0$. Convém, em primeiro lugar, notar que, para $\lambda \neq 0$, a rede não é estável devido à presença de ferraduras suspensas na sua vizinhança [17]; existe um número infinito de conexões homo e heteroclínicas entre quaisquer duas soluções periódicas e a dinâmica próxima da rede é bastante complexa (cf [11, 18]). Para facilitar a interpretação e análise do sistema, vai-se admitir $k = 2$.

Do estudo da dinâmica local junto de P_1 ([12, §4.2]), a linha que representa a interseção da variedade instável de P_2 com $\text{In}(P_1)$ vai ser enviada em $\text{Out}(P_1)$ numa dupla hélice com uma *dobra* ou *ponto de viragem* ([12, §6.3]). A posição relativa dessa dobra vai ser governada pelo parâmetro $\lambda > 0$, a qual vai rodando em torno de $\text{Out}(P_1)$. À medida que $\lambda > 0$ varia, esse ponto de viragem vai “tocando” na linha que representa a interseção da variedade estável de P_2 com $\text{Out}(P_1)$, sendo a ideia da prova da alínea (i) do seguinte resultado (ver Figura 12):

Lema 6 (Teorema 11, [12]) *Se $(f_\lambda)_\lambda$ é uma família de campos de vetores satisfazendo (P1)–(P5), então:*

1. *existe uma sequência $(\lambda_i)_i$ de números reais positivos com $\lim_i \lambda_i \rightarrow +\infty = 0$ tal que para $\lambda = \lambda_i$ as variedades $W^u(P_2)$ e $W^s(P_2)$ intersectam-se tangencialmente de forma quadrática (genérica).*

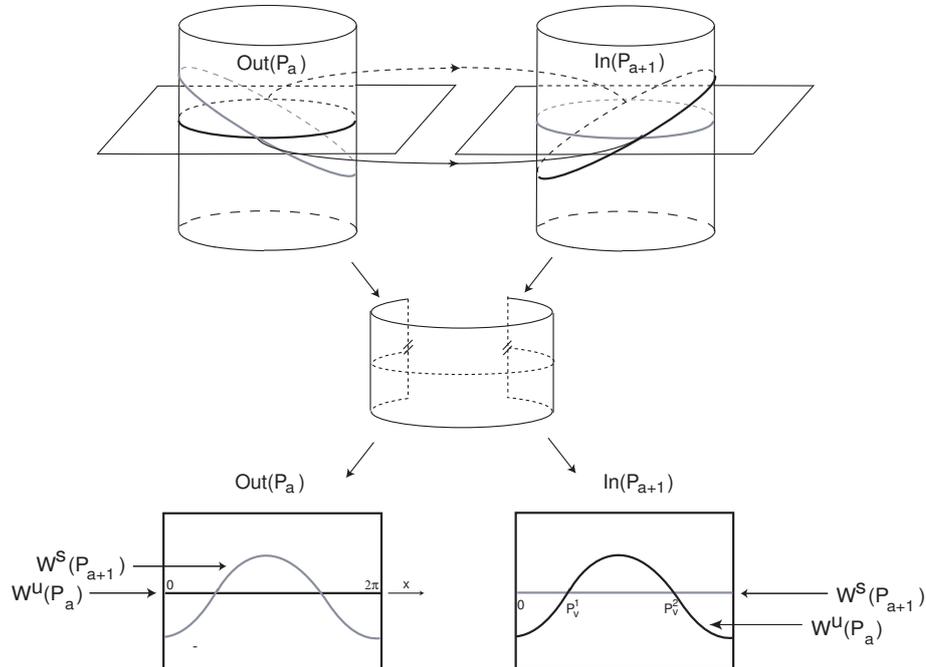


Figura 10: Ilustração da Propriedade (P5): transições entre as selas. Para $\lambda \neq 0$, as variedades $W^u(P_a)$ e $W^s(P_{a+1})$ interseccionam-se numa curva fechada em $\text{In}(P_{a+1})$.

2. *arbitrariamente próximo da conexão homoclínica associada a P_2 (garantida na alínea anterior), existem pontos fixos hiperbólicos p_i e uma infinidade de valores $\lambda_{n,i}$ para os quais a aplicação de primeiro retorno a $\text{In}(P_1)$ exibe uma tangência homoclínica associada a p_i .*

A prova do item (2) decorre do facto das variedades invariantes das soluções periódicas, quando restritas a $\text{In}(P_1)$, terem a mesma forma das linhas resultantes das interseções das variedades invariantes com a secção transversal $\text{In}(P_1)$. Consequentemente, arbitrariamente perto do valor de $\lambda = \lambda_i > 0$ para o qual ocorre uma tangência homoclínica de P_2 , existe um outro valor de λ para o qual se observa uma tangência homoclínica associada ao ponto fixo p_i da ferradura cuja existência foi provada em [17], e esquematizada na Figura 11. Uma vez que este ponto fixo é dissipativo, podem-se aplicar os resultados de Newhouse [16].

O próximo teorema é a chave desta secção (e deste texto) uma vez que localiza regiões onde o comportamento histórico é detetado para a aplica-

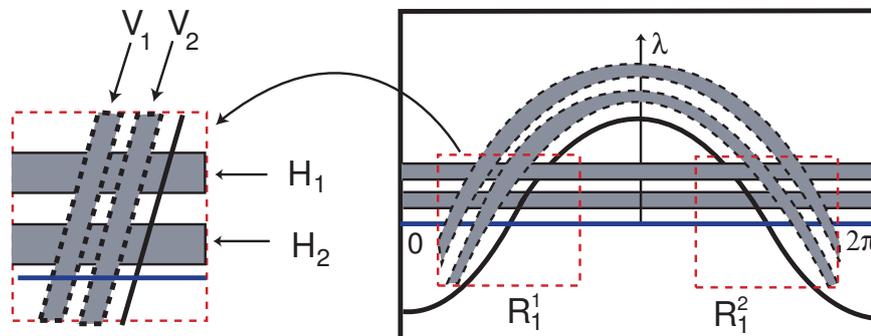


Figura 11: Representação da ferradura existente perto de Γ_λ (mais detalhe em [11, 17]). Os conjuntos H_1 e H_2 representam retângulos horizontais em $\text{In}(P_1)$ e V_1 e V_2 as suas imagens pela aplicação de primeiro retorno.

ção de primeiro retorno. Localiza trajetórias com comportamento histórico em campos C^2 -próximo de elementos da família (3), como consequência das tangências encontradas no Lema 6, combinadas com o Teorema A de [13]. Tendo em conta que as perturbações construídas em [13] são locais e arbitrariamente pequenas (na topologia C^2), pode-se “levantar” a perturbação da aplicação de primeiro retorno que exhibe comportamento histórico, e transferir esta propriedade para fluxos. O fluxo resultante está C^2 -perto do fluxo original.

Teorema 7 (Teorema 12, [12]) *Se $(f_\lambda)_\lambda$ é uma família de campos de vetores satisfazendo (P1)–(P5), então existe uma sucessão $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ com $\lim_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j = 0$ tal que, para cada λ_j , existe um campo vetorial, C^2 -próximo de f_{λ_j} , cujo fluxo associado exhibe um conjunto aberto e não-vazio de condições iniciais cujas trajetórias associadas exibem comportamento histórico.*

5 Nota final

Tendo [12] como ponto de partida, o objetivo deste texto foi o de explorar a persistência de comportamento histórico para uma classe de sistemas envolvendo ciclos heteroclínicos associados a soluções periódicas, levando a uma resposta parcial do *Último Problema de Takens* [24]. Todas as provas podem ser encontradas em [12] ou nas referências nele citadas. Para além de

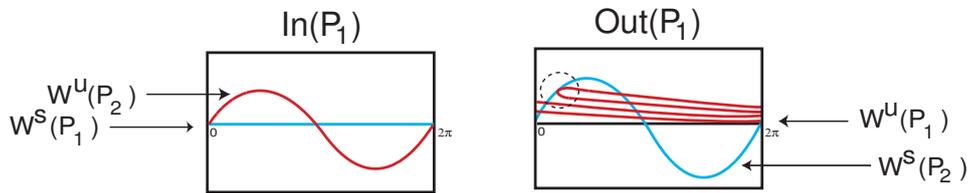


Figura 12: Tangências heteroclínicas: à medida que $\lambda > 0$ varia, o ponto de viragem vai “tocando” a linha que representa a interseção da variedade estável de P_2 com $\text{Out}(P_1)$.

uma prova geral mais precisa da questão da passagem do comportamento histórico da aplicação de primeiro retorno para um campo de vetores, há ainda *problemas em aberto* relacionados com a persistência do comportamento histórico. Por exemplo,

- (1) será que existe um campo de vetores polinomial em \mathbb{R}^m com domínios errantes e, conseqüentemente, com comportamento histórico?
- (2) que tipo de bifurcações podem ocorrer no caso em que, para todo o $a \in \mathbf{Z}_a$, $W^u(P_a)$ e $W^s(P_{a+1})$ não se intersectam?

Referências

- [1] M. A. D. Aguiar, S. B. S. D. Castro, I. S. Labouriau. *Simple Vector Fields with Complex Behavior*, Int. Jour. of Bif. and Chaos, Vol. **16** No. **2**, 2006.
- [2] M.A.D. Aguiar, I.S. Labouriau, A.A.P. Rodrigues, *Switching near a heteroclinic network of rotating nodes*, Dyn. Syst., Vol. 25(1), 75–95, 2010.
- [3] R. Bowen, *Equilibrium states and Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, Lectures Notes in Mathematics, 470, Springer-Berlin, 1975.
- [4] D.R. Chilingworth. *Generic multiparameter bifurcation from a manifold*. Dyn. Syst. 15(2), 101–137, 2000.
- [5] E. Colli, E. Vargas, *Non-trivial wandering domains and homoclinic bifurcations*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., 21, 1657–1681, 2001.

- [6] P. Duarte, R. Fernandes, W. Oliva, *Dynamics of the attractor in the Lotka-Volterra equations*, J. Diff. Equations, 149, 143–189, 1998.
- [7] M. Field, *Lectures on bifurcations, dynamics and symmetry*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, Vol. **356**, Longman, 1996.
- [8] A. Gaunersdorfer, *Time averages for heteroclinic attractors*, SIAM J. Math. Anal. 52 1476–89, 1992.
- [9] F. Hofbauer, G. Keller, *Quadratic maps without asymptotic measure*, Commun. Math. Phys. 127 319–337, 1990.
- [10] I.S. Labouriau, A.A.P. Rodrigues, *Global generic dynamics close to symmetry*, J. Diff. Eqs., Vol. 253 (8), 2527–2557, 2012.
- [11] I.S. Labouriau, A.A.P. Rodrigues, *Global bifurcations close to symmetry*, J. Math. Analysis and Applications, 444 (1), 648–671, 2016.
- [12] I.S. Labouriau, A.A.P. Rodrigues, *On Takens’ Last Problem: tangencies and time averages near heteroclinic networks*, Nonlinearity 30, 1876–1910, 2017.
- [13] S. Kiriki, T. Soma, *Takens’ last problem and existence of non-trivial wandering domains*, Tokai University, Pre-print, 2015.
- [14] M. Krupa, I. Melbourne, *Asymptotic stability of heteroclinic cycles in systems with symmetry*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., 15, 121–147, 1995.
- [15] M. Krupa, I. Melbourne, *Asymptotic Stability of Heteroclinic Cycles in Systems with Symmetry II*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, No. 134A, 219–232, 2004.
- [16] S.E. Newhouse, *The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms*, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. 50, 101–151, 1979.
- [17] A. A. P. Rodrigues, I. S. Labouriau, M. A. D. Aguiar, *Chaotic Double Cycling*, Dynamical Systems: an International Journal, Vol. 26 (2), 199–233, 2011.
- [18] A.A.P. Rodrigues, I.S. Labouriau, *Spiralling dynamics near heteroclinic networks*, Physica D 268, 34–49, 2014.

-
- [19] D. Ruelle, *Historic behaviour in smooth dynamical systems*, Global Analysis of Dynamical Systems ed H W Broer *et al* (Bristol: Institute of Physics Publishing), 2001.
- [20] D. Ruelle, *A measure associated with Axiom A attractors*, Amer. J. Math., 98, 619–654, 1976.
- [21] Ya. Sinai, *Gibbs measures in ergodic theory*, Russ. Math. Surveys, 27, 21–60, 1972.
- [22] K. Sigmund, *Time Averages for unpredictable orbits of determinist systems*, Annals of Operations Research, 37, 217–228, 1992.
- [23] F. Takens, *Heteroclinic attractors: Time averages and moduli of topological conjugacy*, Bol. Soc. Brasil. Mat., 25, 107–120, 1994.
- [24] F. Takens, *Orbits with historic behaviour, or non-existence of averages*, Nonlinearity, 21 , no. 3, T33–T36, 2008.