Problemas

Editor:
Jorge Nuno Silva

Notas sobre o Problema anterior e Plano *psicadélico*

Jorge Nuno Silva

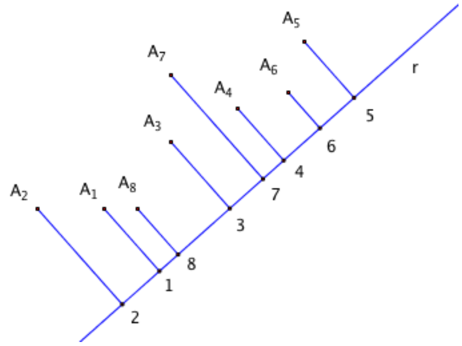
Os leitores são convidados a enviar, para eventual publicação, soluções, comentários, propostas de problemas, etc. Essa correspondência deve ser enviada para a SPM, ao cuidado do editor desta secção. Há livros para sortear entre as soluções recebidas em cada número.

Relembremos o problema do número anterior.

Problemas para meninas

1. Seja n um inteiro positivo e D_n o conjunto dos divisores positivos de n, incluindo 1 e n. Prove que no máximo metade dos elementos de D_n tem 3 como algarismo das unidades.

2. Sejam $A_1, \dots, A_8$ oito pontos quaisquer do plano. Seja $\overrightarrow{r}$ uma recta (orientada) qualquer. Consideremos os pés das perpendiculares tiradas pelos pontos $A_1, \dots, A_8$ sobre $\overrightarrow{r}$.



Atendendo à orientação da recta, estes novos pontos definem uma permutação dos índices $1, \ldots, 8$. Por exemplo, na figura a permutação é

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 8 & 3 & 7 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Imaginemos que este processo se repete para todas as rectas do plano que não geram projecções ortogonais coincidentes para pontos diferentes. No máximo, quantas permutações diferentes de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ se podem obter?

1. O resultado é evidente se n for uma potência de 2.

   Se $5|n$, sejam $d_1, \ldots, d_m$ os divisores de n que terminam em 3. Então $5d_1, \ldots, 5d_m$ estão em D_n e não terminam em 3.

   Se $5 \nmid n$ e os divisores primos de n terminam em 1 ou em 9, então todos os elementos de D_n terminam em 1 ou 9.

   Se $5 \nmid n$ e existe um divisor primo $p \in D_n$ a terminar em 3 ou 7, seja $n = p^r q$ com $(p, q) = 1$. Se $D_q = \{a_1, \ldots, a_k\}$, então os divisores de n são

$$a_1, a_1 p, \ldots, a_1 p^r, a_2, a_2 p, \ldots, a_2 p^r, \ldots, a_k, a_k p, \ldots, a_k p^r$$

   Para cada $d_i = a_s p^\ell \in D_n$, seja $e_i \in D_n$ o *parceiro* de d_i, definido por

$$e_i = \begin{cases} a_s p^{\ell+1} & \text{se} \quad \ell < r \\ a_s p^{\ell-1} & \text{se} \quad \ell = r \end{cases}$$

Se d_i termina em 3, então o último dígito de e_i não é 3 (p termina em 3 ou 7).

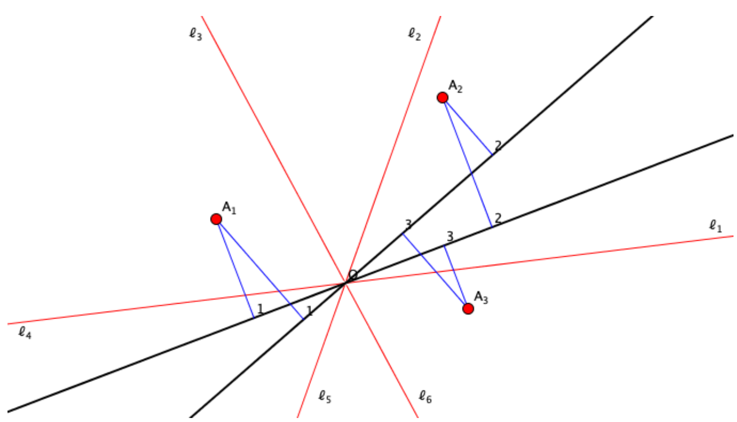
Se $d_i, d_j \in D_n$ $(i \neq j)$ terminam ambos em 3, os seus parceiros são diferentes, já que se $e_i = e_j = a_s p^\ell$ temos, sem perda de generalidade, $d_i = a_s p^{\ell-1}$, $d_i = a_s p^{\ell+1}$, donde $d_j = d_i p^2$, o que inviabiliza a partilha do último dígito.

2. Se duas rectas orientadas são paralelas, as respectivas permutações coincidem, pelo que basta considerar rectas concorrentes num ponto O.

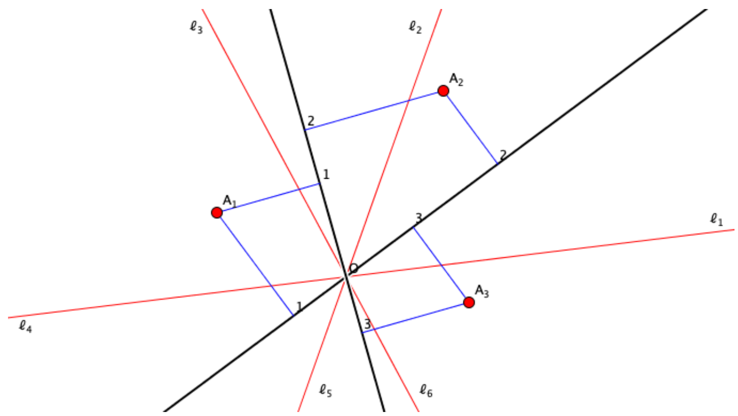
   Se uma recta for perpendicular à recta definida por dois pontos dados, A_i e A_j, então as projecções de A_i e de A_J coincidem.

   Consideremos todas as rectas por O perpendiculares a um par de pontos dados. Seja o seu número k. Claro que $k \leqslant \binom{8}{2} = 28$. Pelo que há, no máximo, $2k \leqslant 56$ rectas orientadas por O.

   Consideremos estas rectas orientadas $\ell_1, \ldots, \ell_{2k}$ numeradas em sentido anti-horário. Sejam ℓ e ℓ' rectas orientadas quaisquer tais que ℓ_j, ℓ, ℓ_{j+1} e $\ell_j, \ell', \ell_{j+1}$ estão em ordem anti-horária. Neste caso, as permutações definidas pelas duas rectas coincidem. Ilustremos com um caso de três pontos dados.



Se a situação anterior não se verifica, então existe j tal que ℓ', ℓ_j, ℓ estão em ordem anti-horária. Seja ℓ_j perpendicular à recta por A_{j_1} e A_{j_2}. As projecções de A_{j_1} e A_{j_2} em ℓ e ℓ' estão em ordens diferentes, pelo que as permutações são distintas. Vejamos de novo uma ilustração:



Concluímos então que o número de permutações é $2k$. Como $2k$ pode tomar o valor 56, no caso de os pontos dados estarem em posição genérica, a resposta é 56.

Plano psicadélico

Imaginemos que cada ponto do plano é pintado vermelho ou azul. Será que há dois pontos da mesma cor exactamente a um metro de distância um do outro? Esta é uma questão fácil: considere-se um triângulo equilátero de lado um. Que cores podem ter os seus vértices?...

Propomos uma questão mais interessante: Provar que há um rectângulo cujos vértices têm todos a mesma cor.

No mesmo contexto, será que pelo menos uma das cores (azul ou vermelho) realiza todas as distâncias possíveis?

Usemos agora três cores. Admitamos então que os pontos do plano são pintados de azul, vermelho ou verde. Prove que há dois pontos da mesma cor exactamente a um metro de distância um do outro.

Deixemos as cores de parte. Peço agora que o leitor me dê um exemplo de um conjunto de pontos no plano, S, de cardinalidade mínima, com a propriedade de não existir nenhum ponto do plano cuja distância a cada elemento de S ser racional.