

# SOLUÇÕES INTERPOLATÓRIAS DE EQUAÇÕES ÀS DIFERENÇAS LINEARES

Mário M. Graça

Departamento de Matemática  
Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa  
e-mail: [mgraca@math.tecnico.ulisboa.pt](mailto:mgraca@math.tecnico.ulisboa.pt)

**Resumo:** Dada uma equação às diferenças linear e homogénea, de coeficientes constantes, começamos por construir uma função contínua interpolatória da respectiva solução. Tal função é posteriormente usada para definir uma função paramétrica, com valores em  $\mathbb{R}^2$ , que designamos por ‘retrato de fase’. Embora com algum abuso de linguagem, a definição que propomos para *retrato de fase de uma equação às diferenças* revela-se interessante para efeitos de estudo da dinâmica das soluções de equações às diferenças, tal como acontece com sistemas de equações diferenciais onde os denominados *retratos de fase* constituem uma técnica bem conhecida. Como ilustração, apresentam-se alguns exemplos de construção da referida função interpolatória bem como de retratos de fase associados a certas equações às diferenças de segunda ordem, em particular equações ligadas a sucessões do tipo Fibonacci.

**Abstract:** Given a linear and homogeneous difference equation, with constant coefficients, we begin by constructing a continuous function which is interpolatory of the difference equation solution. This function leads to a  $\mathbb{R}^2$  valued parametric function which we call, with some language abuse, ‘phase portrait’ of the difference equation. The ‘phase portrait’ proves to be an interesting tool in order to understand the dynamics of the solutions of a difference equation, similarly to the so called *phase portrait* in the context of systems of ordinary differential equations. As an illustration we present some examples where the referred interpolatory function is considered as well as *phase portraits* of certain second order difference equations connected to some Fibonacci type sequences.

**Palavras-chave:** Equação às diferenças, interpolação, retrato de fase, sucessões de Fibonacci.

## 1 Introdução

Dados  $k$  valores iniciais  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ , equações às diferenças (de ordem  $k \geq 1$ , lineares, homogéneas e de coeficientes constantes),

$$x_{n+k} = a_{k-1} x_{n+(k-1)} + a_{k-2} x_{n+(k-2)} + \dots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n, \quad (1)$$

onde  $a_0 \neq 0$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$ , ocorrem como modelos evolutivos em inúmeras aplicações, em particular como versão discreta de certas equações diferenciais ordinárias com designação análoga. Uma vez que as soluções destas últimas são geralmente funções contínuas num certo domínio real, é nosso objectivo inicial construir uma função (pelo menos) contínua  $g : \mathbb{R}_0^+ \mapsto \mathbb{R}$ , que interpole os dados, isto é, tal que  $g$  seja interpoladora do conjunto infinito de pontos do plano  $(0, x_0), (1, x_1), (2, x_2), \dots$ . A abordagem que propomos, embora elementar, constitui porventura uma ponte com o chamado ‘método das funções geradoras’ envolvendo funções e séries complexas ([3], Ch. 7.4).

O ponto de vista interpolatório (Secção 2) oferece vantagens, quer do ponto de vista teórico como computacional, sugerindo conexões entre temas tão diversos como sucessões recorrentes, sistemas lineares sobredeterminados, equações diferenciais, equações diofantinas, etc. Nomeadamente, ao associarmos a uma equação às diferenças uma função contínua  $g$  ‘contendo’ a solução do problema (1), somos naturalmente levados a considerar o respetivo ‘retrato de fase’, no sentido descrito adiante na Secção 3. O retrato de fase da sucessão  $(x_n)_{n \geq 0}$ , obtém-se simplesmente considerando a função paramétrica  $H(t) = (g(t), g(t+1) - g(t))$ , para  $t \geq 0$  (Definição 3.1).

Em particular, o retrato de fase de sucessões do tipo Fibonacci (ver em [1] uma perspectiva histórica a respeito deste famoso matemático) evidencia geometricamente uma propriedade fundamental destas sucessões ligada à ocorrência do célebre ‘número de ouro’ (ver Proposição 3.1).

Como é bem sabido, para se resolver a equação (1), isto é, para se determinar uma fórmula explícita da sucessão  $(x_n)_{n \geq 0}$ , os modelos possíveis dessa solução dependem de as  $k$  raízes do polinómio característico associado à equação serem, respectivamente, simples ou múltiplas. Embora aqui apenas consideremos equações de segunda ordem, isto é, para  $k = 2$  a abordagem que propomos é generalizável para equações às diferenças de ordem superior.

Tanto no caso de raízes simples como no caso de raízes múltiplas do referido polinómio característico, mostramos por indução matemática (Secção 2) que o sistema linear, traduzindo as condições interpolatórias, é um sistema de solução única (ver Proposições 2.1 e 2.2 e Exemplo 2.1, 2.2 e 2.3).

Na Secção 3 apresentamos um pequeno número de exemplos de construção do ‘retrato de fase’ de equações às diferenças de segunda ordem do tipo (1), em particular de um certo conjunto de sucessões de Fibonacci. O leitor poderá ensaiar outros exemplos à sua escolha modificando convenientemente o programa *Mathematica* [4] dado em Anexo.

## 2 Equações às diferenças de segunda ordem

A equação às diferenças de segunda ordem

$$x_{n+2} = a_1 x_{n+1} + a_0 x_n, \quad a_0 \neq 0, \quad n \geq 0, \quad (2)$$

com valores iniciais  $x_0 = \alpha$ ,  $x_1 = \beta$ , tem para equação característica

$$p(\lambda) = \lambda^2 - a_1 \lambda - a_0 = 0. \quad (3)$$

Mostramos a seguir, respectivamente nos parágrafos 2.1 e 2.2, que o facto do polinómio  $p$  possuir ou não raízes *distintas* é a informação crucial que interessa na consideração dos dois tipos de soluções possíveis para a equação às diferenças (2). No caso das raízes serem distintas e positivas, a solução interpolatória  $g$  que obtemos é uma combinação linear de exponenciais de variável real. No caso de alguma das raízes ser negativa ou complexa (sendo, portanto, neste segundo caso, a outra raiz conjugada da primeira) a função  $g$  é igualmente combinação linear de funções exponenciais. No entanto, tais exponenciais tomam valores em  $\mathbb{C}$  e iremos considerar apenas a parte real desses valores. Em ambos os casos, para efeitos computacionais, a solução real pretendida pode ser facilmente calculada recorrendo à função  $\text{Re}[ ]$ , disponível no sistema *Mathematica* [4].

Quanto às soluções da equação (2) temos o seguinte resultado ([2], Ch. 2.2):

**Teorema 2.1.** *Considere-se a equação às diferenças (2) e a equação característica associada (3). Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  as raízes do polinómio<sup>1</sup>  $p$  e  $x_n$  a solução geral de (2). Então:*

1. *Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são raízes reais e distintas,*

$$x_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. *Se  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ,*

$$x_n = c_1 \lambda^n + c_2 n \lambda^n, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. *Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são raízes complexas,  $\lambda_1 = r e^{i\theta}$  e  $\lambda_2 = r e^{-i\theta}$ ,*

$$\begin{aligned} x_n &= c_1 \left( r e^{i\theta} \right)^n + c_2 \left( r e^{-i\theta} \right)^n, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}, \\ &= r^n ((c_1 + c_2) \cos(n\theta) + i(c_1 - c_2) \sin(n\theta)) \\ &= r^n (C_1 \cos(n\theta) + C_2 \sin(n\theta)) \end{aligned}$$

onde  $C_1 = c_1 + c_2$  e  $C_2 = i(c_1 - c_2)$ .

---

<sup>1</sup> Note-se que, dado que  $a_0 \neq 0$ , o polinómio  $p$  não tem raízes nulas.

Do Teorema 2.1, concluímos que, sendo  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  duas raízes *distintas* do polinómio  $p$  em (3), a função interpolatória real  $g$  será uma combinação linear de funções reais do seguinte tipo:

- (i) caso  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ , funções  $e^{\ln(\lambda_1)t}$  e  $e^{\ln(\lambda_2)t}$ ;
- (ii) caso  $\lambda_1 < 0$  e  $\lambda_2 > 0$ , funções  $\cos(\pi t)e^{\ln(|\lambda_1|)t}$  e  $e^{\ln(\lambda_2)t}$ ;
- (iii) caso  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ , funções  $\cos(\pi t)e^{\ln(|\lambda_1|)t}$  e  $\cos(\pi t)e^{\ln(|\lambda_2|)t}$ ;
- (iv) caso  $\lambda_1 \in \mathbb{C}$  ( $\lambda_2$  raiz conjugada), funções  $\cos(n\theta)e^{\ln(r)t}$  e  $\sin(n\theta)e^{\ln(r)t}$ , onde  $r = |\lambda_1|$  e  $\theta = \text{Arg}(\lambda_1)$ .

Sendo  $\lambda$  uma *raiz dupla* do polinómio  $p$ , a função interpolatória real  $g$  é combinação linear das funções  $e^{\ln(\lambda)t}$  e  $t e^{\ln(\lambda)t}$ , no caso em que  $\lambda > 0$ , e das funções  $\cos(\pi t)e^{\ln(|\lambda|)t}$  e  $t \cos(\pi t)e^{\ln(|\lambda|)t}$ , no caso em que  $\lambda < 0$ .

Os Exemplos 2.1, 2.2 e 2.3 adiante ilustram o cálculo de funções interpolatórias  $g$  para algumas equações às diferenças de segunda ordem.

## 2.1 Raízes distintas

Para  $\Delta = a_1^2 + 4a_0 > 0$ , o polinómio  $p$  em (3) tem duas raízes distintas (reais ou complexas conjugadas),  $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ , tais que

$$\lambda_1 = \frac{a_1 + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{a_1 - \sqrt{\Delta}}{2}. \quad (4)$$

Atendendo a (3) as raízes  $\lambda_1, \lambda_2$  satisfazem as relações fundamentais

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &= a_1 \lambda_1 + a_0 \\ \lambda_2^2 &= a_1 \lambda_2 + a_0. \end{aligned} \quad (5)$$

No caso em que  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ , mostramos adiante (ver Proposição 2.1) que a seguinte função contínua<sup>2</sup>  $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ,

$$g(t) = c_1 \lambda_1^t + c_2 \lambda_2^t, \quad (6)$$

onde  $c_1, c_2$  são constantes, é solução da equação às diferenças (2), no sentido de que existem constantes  $c_1$  e  $c_2$  para as quais é satisfeita a infinitude de condições interpolatórias,  $g(0) = \alpha, g(1) = \beta$  e  $g(j) = x_j$ , para  $j = 2, 3, \dots$ , isto é, a função  $g$  considerada interpola a seguinte tabela com um número infinito de nós inteiros não negativos,

$t_i$	0	1	2	3	...
$x_i$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...

<sup>2</sup> Neste caso a função  $g \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+)$ . No entanto, para o efeito interpolatório basta-nos que a função seja contínua e, posteriormente, quando se tratar de ‘retratos de fase’, basta que a função  $g$  seja pelo menos de classe  $C^1$ .

A solução explícita da equação às diferenças (2) é dada por

$$x_n = g(n) = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes (únicas), solução das equações  $g(0) = x_0$  e  $g(1) = x_1$ .

Os casos em que  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2$  é um número negativo, ou quando  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são complexos são também contemplados.

Observação : No caso particular de  $a_1, a_0$  e  $x_0, x_1$  serem inteiros, a sucessão  $(x_k)_{k \geq 0}$  é constituída por números inteiros e, por conseguinte, o gráfico da função contínua  $g$  dada por (6), possui uma infinidade de pontos  $P_k = (k, g(k))$ , de coordenadas inteiras ('láttice'), isto é,  $P_k \in \mathbb{Z}^2$ .

### 2.1.1 Solução na forma exponencial

Quando  $\lambda_1, \lambda_2$  são números reais positivos, a função real  $g$  dada em (6) pode ser escrita na forma de combinação linear de funções exponenciais

$$g(t) = c_1 e^{\ln(\lambda_1)t} + c_2 e^{\ln(\lambda_2)t}, \quad t \in \mathbb{R}_0^+, \quad (8)$$

Para contemplar os casos em que  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2$  são números negativos, a função  $g$  deverá ser definida como

$$g(t) = \operatorname{Re}[c_1 e^{\ln(\tilde{\lambda}_1)t} + c_2 e^{\ln(\tilde{\lambda}_2)t}], \quad t \in \mathbb{R}_0^+, \quad (9)$$

onde  $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i$ , se  $\lambda_i > 0$ ,  $\tilde{\lambda}_i = |\lambda_i| e^{i\pi}$ , se  $\lambda_i < 0$ .

( $\operatorname{Re}$  designa a parte real de um número complexo). Repare-se que

$$e^{\ln(|\lambda_i|e^{i\pi})t} = e^{(\ln(|\lambda_i|)+i\pi)t} = e^{\ln(|\lambda_i|)t} e^{i\pi t} = e^{\ln(|\lambda_i|)t} (\cos(\pi t) + i \sin(\pi t))$$

e assim,  $\operatorname{Re}[e^{\ln(|\lambda_i|e^{i\pi})t}] = \cos(\pi t) e^{\ln(|\lambda_i|)t}$ .

Um caso em que  $\lambda_1 = 1 > 0$  e  $\lambda_2 = -1 < 0$  é ilustrado no Exemplo 2.1. Para os dados iniciais considerados neste exemplo, a função

$$h(t) = -2 \lambda_2^t = -2(-1)^t,$$

interpola os dados para  $t = j$ , com  $j = 0, 1, 2, \dots$ , mas a função  $h$  não está definida quando  $t$  não é inteiro. A correspondente função contínua é obtida considerando a expressão (9). Assim, sem quebra de generalidade, nas Proposições 2.1 e 2.2 a seguir, assume-se que os números reais  $\lambda_1, \lambda_2$  são distintos, não nulos, e positivos. Caso algum desses números seja negativo a função  $g$  a considerar deverá ter a forma da expressão (9).

**Proposição 2.1.** *Dada a equação às diferenças (2), cujo polinómio característico possui duas raízes reais distintas e não nulas,  $\lambda_1, \lambda_2$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , a função contínua  $g$  dada em (6) (ou a sua versão (9)) satisfaz as condições interpolatórias*

$$g(j) = x_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots . \quad (10)$$

*Demonstração.* As constantes  $c_1$  e  $c_2$  podem calcular-se univocamente, por quanto as condições  $g(0) = x_0$  e  $g(1) = x_1$  equivalem à existência de solução do sistema linear

$$\begin{cases} c_1 + c_2 &= x_0 \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 &= x_1 . \end{cases}$$

A solução do sistema existe e é única já que  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,

$$c_1 = \frac{x_0 \lambda_2 - x_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad c_2 = \frac{x_1 - x_0 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} . \quad (11)$$

Vamos mostrar por indução que  $g$  satisfaz um número infinito de condições interpolatórias nos inteiros não negativos, isto é, que  $g(x_j) = x_j$ , qualquer que seja  $j \geq 1$ . Fixado  $j$ , tome-se para hipóteses de indução as igualdades

$$\begin{aligned} g(j-1) &= c_1 \lambda_1^{j-1} + c_2 \lambda_2^{j-1} = x_{j-1} \\ g(j) &= c_1 \lambda_1^j + c_2 \lambda_2^j = x_j . \end{aligned} \quad (12)$$

Prove-se que  $g(j+1) = x_{j+1}$ . Dado que

$$\begin{aligned} g(j+1) &= c_1 \lambda_1^{j+1} + c_2 \lambda_2^{j+1} \\ &= c_1 \lambda_1^2 \lambda_1^{j-1} + c_2 \lambda_2^2 \lambda_2^{j-1} , \end{aligned}$$

atendendo às relações fundamentais (5), obtém-se

$$\begin{aligned} g(j+1) &= c_1 (a_1 \lambda_1 + a_0) \lambda_1^{j-1} + c_2 (a_1 \lambda_2 + a_0) \lambda_2^{j-1} \\ &= a_0 (c_1 \lambda_1^{j-1} + c_2 \lambda_2^{j-1}) + a_1 (c_1 \lambda_1^j + c_2 \lambda_2^j) . \end{aligned}$$

Levando em conta as hipóteses de indução e a definição recursiva da equação às diferenças considerada, resulta

$$g(j+1) = a_1 x_j + a_0 x_{j-1} = x_{j+1} . \quad \square$$

**Corolário 2.1.** *A solução explícita da equação às diferenças (6) é a sucessão*

$$x_n = g(n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (13)$$

O Corolário 2.1 resulta trivialmente de se substituir na função  $g$  a variável real  $t$  pela variável inteira  $n \geq 0$ .

Para o caso em que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são raízes complexas conjugadas, a função  $g$  deverá ser definida na forma

$$g(t) = \operatorname{Re} [c_1 e^{\ln(\lambda_1)t} + c_2 e^{\ln(\lambda_2)t}], \quad t \in \mathbb{R}_0^+.$$

As constantes  $c_1$  e  $c_2$  são sempre complexas conjugadas e quando  $t = n$ , para  $n = 0, 1, \dots$ , temos que  $c_1 e^{\ln(\lambda_1)t} + c_2 e^{\ln(\lambda_2)t}$  assume um valor real (ver Teorema 2.1) e, portanto,

$$g(n) = c_1 e^{\ln(\lambda_1)n} + c_2 e^{\ln(\lambda_2)n} = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n = x_n.$$

## 2.2 Raízes múltiplas

Dada a equação às diferenças (2), se  $z$  é uma raiz dupla do seu polinómio característico,  $p(x) = x_2 - a_1 x - a_0$ , tem-se

$$x^2 - a_1 x - a_0 = (x - z)^2 = x^2 - 2zx + z^2.$$

Comparando os coeficientes, resulta

$$z^2 = -a_0, \quad \text{e} \quad z = \frac{a_1}{2}. \quad (14)$$

Note-se que terá de ser  $a_1 \neq 0$ .

**Proposição 2.2.** *Dada uma equação às diferenças (2), cujo polinómio característico possui uma raiz não nula  $z$ , de multiplicidade dois, a função contínua*

$$g(t) = c_1 z^t + c_2 t z^t = (c_1 + c_2 t) z^t, \quad t \in \mathbb{R}_0^+ \quad (15)$$

satisfaz as condições interpolatórias

$$g(j) = x_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots. \quad (16)$$

*Demonstração.* As constantes  $c_1$  e  $c_2$  determinam-se univocamente considerando as condições interpolatórias  $g(0) = x_0$  e  $g(1) = x_1$ . Obtém-se,

$$\begin{aligned} c_1 &= x_0 \\ c_2 &= \frac{x_1 - z x_0}{z} = \frac{x_1 - a_1/2 x_0}{a_1/2} = \frac{2x_1 - a_1 x_0}{a_1}. \end{aligned} \quad (17)$$

De modo semelhante ao que se fez na prova da Proposição 2.1, para mostrar que tal função  $g$  satisfaz as condições interpolatórias para qualquer inteiro não negativo, considere-se agora para base de indução as igualdades

$$\begin{aligned} g(j-1) &= (c_1 + c_2 (j-1)) z^{j-1} = x_{j-1} \\ g(j) &= (c_1 + c_2 j) z^j = x_j. \end{aligned} \quad (18)$$

Prove-se que  $g(j+1) = x_{j+1}$ , isto é,

$$g(j+1) = (c_1 + c_2(j+1)) z^{j+1} = a_1 x_j + a_0 x_{j-1} .$$

Atendendo a que  $a_1 = 2z$  e  $a_0 = -z^2$  (ver (14)), resulta da segunda expressão em (18) que

$$a_1 x_j = 2z(c_1 + c_2 j) z^j ,$$

e da primeira expressão em (18)

$$a_0 x_{j-1} = -z^2(c_1 + c_2(j-1)) z^{j-1} .$$

Então,

$$\begin{aligned} x_{j+1} &= a_1 x_j + a_0 x_{j-1} \\ &= 2(c_1 + c_2 j) z^{j+1} - (c_1 + c_2(j-1)) z^{j+1} \\ &= (c_1 + 2c_2 j - c_2 j + c_2) z^{j+1} \\ &= (c_1 + c_2(j+1)) z^{j+1} = g(x_{j+1}) . \end{aligned}$$

□

**Corolário 2.2.** A solução explícita da equação às diferenças (6) é a sucessão

$$x_n = g(n), \quad n = 0, 1, \dots \tag{19}$$

O Corolário 2.2 resulta de substituir a variável real  $t$  pelo inteiro  $n \geq 0$ .

### 2.3 Exemplos

**Exemplo 2.1.** (Duas raízes reais de sinal contrário)

A equação às diferenças

$$x_{n+2} = x_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad \text{onde } x_0 = -2, \quad x_1 = 2,$$

define recursivamente a sucessão periódica, de período dois,

$$-2, 2, -2, 2, \dots .$$

A equação característica associada é da forma

$$\lambda^2 - 1 = 0, \quad \text{donde } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1 .$$

Assim, a função modelo correspondente, para  $j = 0, 1, 2, \dots$ , é da forma

$$g(t) = c_1 + c_2(-1)^j ,$$

sendo que  $(c_1, c_2)$  satisfaz as condições interpolatórias  $g(0) = -2$ ,  $g(1) = 2$ , isto é,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = -2 \\ c_1 - c_2 = 2, \end{cases}$$

onde  $c_1 = 0$  e  $c_2 = -2$ . Por conseguinte, a função contínua,

$$g(t) = -2 \operatorname{Re} [e^{(\ln(|-1|)+i\pi)t}] = -2 \operatorname{Re} [e^{i\pi t}] = -2 \cos(\pi t), \quad t \in \mathbb{R}_0^+$$

é interpolatória dos dados já que  $g(j) = x_j$ , para  $j \geq 0$ . Na Figura 1 observa-se o gráfico da função  $g$  e os pontos,  $(j, x_j)$  que satisfazem a equação às diferenças dada, no intervalo  $0 \leq t \leq 20$ .

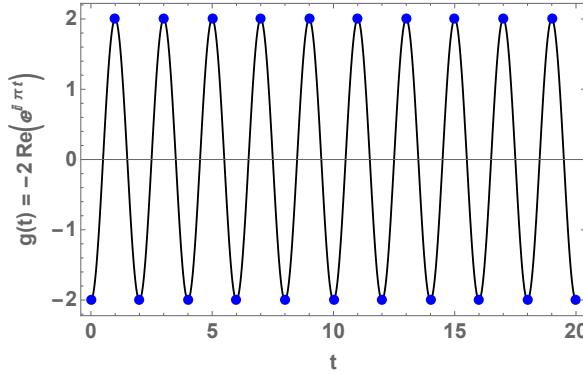


Fig. 1:  $x_{n+2} = x_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$   $x_0 = -2, x_1 = 2$ .

### Exemplo 2.2. (Duas raízes reais negativas)

Seja  $x_{n+2} = -7x_{n+1} - 10x_n$ ,  $n \geq 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ . Interessa-nos saber se existe

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k}. \quad (20)$$

O polinómio característico associado à equação às diferenças dada tem raízes negativas  $\lambda_1 = -2$  e  $\lambda_2 = -5$ . Por conseguinte, a função interpoladora (com valores complexos), seja  $h$ , é da forma

$$\begin{aligned} h(t) &= c_1 e^{(\ln(2)+i\pi)t} + c_2 e^{(\ln(5)+i\pi)t} = c_1 e^{\ln(-2)t} + c_2 e^{\ln(-5)t} \\ &= c_1 e^{\ln(2)t} (\cos(\pi t) + i \sin(\pi t)) + c_2 e^{\ln(5)t} (\cos(\pi t) + i \sin(\pi t)). \end{aligned}$$

Assim, a função interpoladora real escreve-se como

$$g(t) = c_1 \cos(\pi t) e^{\ln(2)t} + c_2 \cos(\pi t) e^{\ln(5)t}, \quad t \geq 0.$$

Levando em consideração as condições iniciais,  $g(0) = 0$  e  $g(1) = 1$ , obtém-se  $c_1 = 1/3$ ,  $c_2 = -1/3$ . Logo, a função interpoladora dos dados é definida como

$$g(t) = \frac{1}{3} \cos(\pi t) (2^t - 5^t), \quad t \geq 0.$$

Atendendo a que

$$g(t+1) - g(t) = \cos(\pi t) \frac{1}{3} \left( -3 \cdot 2^t + 6 \cdot 5^t \right),$$

resulta

$$Q(t) = \frac{g(t+1) - g(t)}{g(t)} = \frac{3(-2^t + 2 \cdot 5^t)}{2^t - 5^t}.$$

Assim,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = 3 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(-2/5)^t + 2}{(2/5)^t - 1} = -6.$$

Por conseguinte, o limite em (20) existe e tem o valor de  $-6$ .

**Exemplo 2.3.** (Duas raízes complexas conjugadas)

Para a equação

$$x_{n+2} = \frac{1}{2} x_{n+1} - \frac{1}{2} x_n, \quad \text{onde } n \geq 0, \quad \text{e } x_0 = -2, \quad x_1 = -1, \quad (21)$$

o polinómio característico possui duas raízes complexas conjugadas (logo distintas)

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} (1 + i\sqrt{7}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{4} (1 - i\sqrt{7}).$$

Denotando por  $h$  a função de variável real com valores complexos  $h(t) = c_1 \lambda_1^t + c_2 \lambda_2^t$ , as constantes  $c_1$  e  $c_2$  calculam-se como solução das equações  $h(0) = x_0$  e  $h(1) = x_1$ . Obtém-se,

$$c_1 = \frac{1}{7} (-7 + i\sqrt{7}), \quad c_2 = \frac{1}{7} (-7 - i\sqrt{7}).$$

Por conseguinte, a função  $g(t) = \operatorname{Re}(c_1 e^{\ln(\lambda_1)t} + c_2 e^{\ln(\lambda_2)t})$ , onde  $t \in \mathbb{R}$ , interpola os pontos  $(j, x_j)$ , para  $j \geq 0$ , conforme é mostrado na Figura 2, na qual se considerou o intervalo  $t \in [-3, 20]$ .

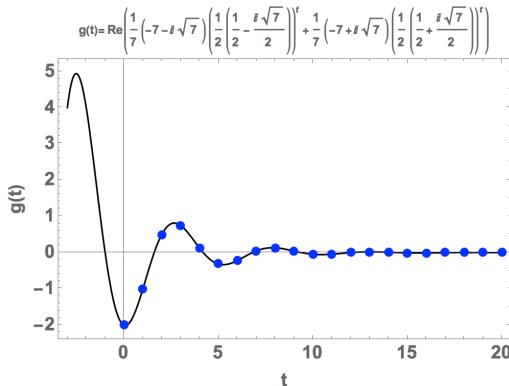


Fig. 2:  $x_{n+2} = \frac{1}{2} x_{n+1} - \frac{1}{2} x_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad x_0 = -2, x_1 = -1.$

Uma vez que  $|\lambda_1| < 1$  e  $|\lambda_2| < 1$ , conclui-se imediatamente da expressão calculada para a função  $g$  que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0.$$

Dado que  $g(j) = x_j$  para  $j \geq 0$ , podemos concluir igualmente que a sucessão considerada é tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0,$$

conforme sugere a observação do gráfico apresentado na Figura 2.

### 3 Retratos de fase de equações às diferenças

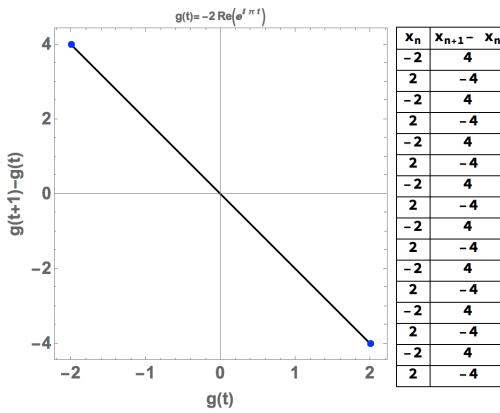


Fig. 3:  $x_{n+2} = x_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$   $x_0 = -2, x_1 = 2$ .

As funções  $g$  anteriormente consideradas são particularmente úteis para desenhar o ‘retrato de fase’ associado à solução de uma dada equação às diferenças. Tais retratos permitem-nos observar a evolução da sucessão ao longo do ‘tempo’  $t$ , o seu comportamento assimptótico (isto é para  $n$  suficientemente grande) – em particular quando desejamos estudar a dinâmica de sucessões recursivas em função dos valores iniciais  $x_0 = \alpha$ ,  $x_1 = \beta$  considerados, ou quando estamos interessados em observar o comportamento de classes de sucessões distintas em função dos parâmetros  $a_1$  e  $a_0$ .

Dado que para quaisquer valores iniciais  $x_0$  e  $x_1$ , a função interpolatória  $g$  é única, podemos definir a seguinte função  $H$ , a qual será designada por ‘retrato de fase’ associado à equação às diferenças (2):

**Definição 3.1.** Designamos por ‘retrato de fase’ associado à equação às diferenças (2), a função  $H : \mathbb{R}_0^+ \mapsto \mathbb{R}^2$ , definida por

$$H(t) = (g(t), g(t + 1) - g(t)), \quad t \in \mathbb{R}_0^+. \quad (22)$$

Da mesma forma que a cada termo  $x_n$  da sucessão  $(x_n)_{n \geq 0}$  podemos associar um ponto  $P_n = (x_n, x_{n+1} - x_n)$  do plano, atendendo a que  $g$  é interpolatória de  $(x_n)_{n \geq 0}$ , a função  $H$  satisfaaz as igualdades

$$H(j) = (x_j, x_{j+1} - x_j) = P_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

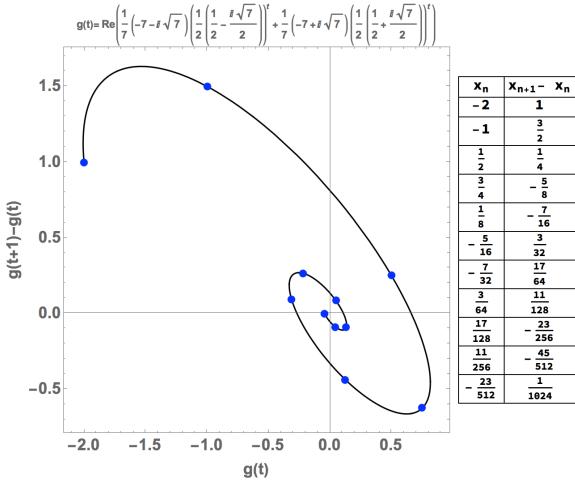


Fig. 4:  $x_{n+2} = \frac{1}{2}x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad x_0 = -2, x_1 = -1.$

Assim, do ponto de vista cinemático, os pontos  $P_j$  do plano coordenado representam a ‘posição’ do termo  $x_j$  da solução da equação às diferenças, sendo a sua ‘velocidade’ representada pela segunda coordenada de  $P_j$ . Estas considerações de carácter geométrico justificam a designação aqui adoptada para *retrato de fase* da solução de uma equação às diferenças, representado pela função paramétrica (22).

Na Figura 3 mostra-se o retrato de fase da sucessão considerada no Exemplo 2.1 e na Figura 4 é representado o retrato de fase correspondente ao Exemplo 2.3. Note-se que as abcissas e ordenadas figuradas neste caso são pontos de  $\mathbb{Q}$ , como se evidencia na tabela que acompanha a Figura 4.

O carácter periódico da solução  $(x_n)_{n \geq 0}$  da equação às diferenças do primeiro exemplo é imediatamente aparente na Figura 3, enquanto a evolução ‘espiral’ da sucessão  $(x_n)_{n \geq 0}$  do segundo exemplo é observável na Figura 4. O retrato de fase permite-nos prever a ocorrência do ponto  $(0,0)$  como estado limite do processo evolutivo modelado pela equação às diferenças (21) do Exemplo (2.3), confirmando o que se disse na parte final deste exemplo.

### 3.1 Sucessões tipo Fibonacci

A classe de sucessões de segunda ordem

$$x_{n+2} = x_n + x_{n-1}, \quad x_0 = \alpha \in \mathbb{Z}, \quad x_1 = \beta \in \mathbb{Z}, \quad (24)$$

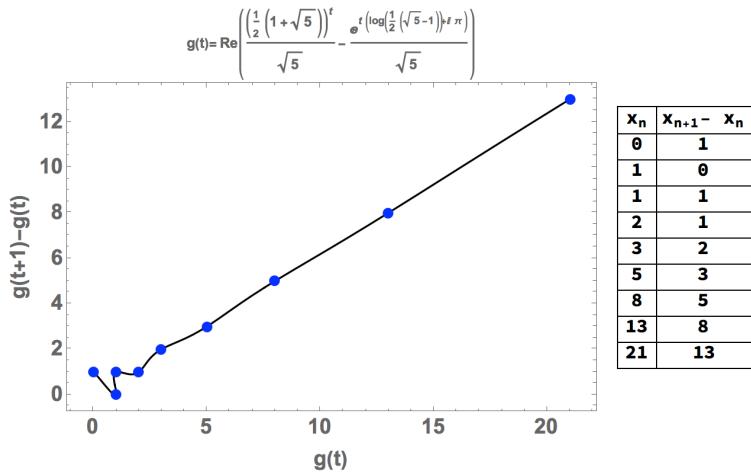


Fig. 5: Retrato de fase da sucessão de Fibonacci.

goza de reputação universal, uma vez que para  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$  a sucessão  $(x_n)_{n \geq 0}$  é a famosa sucessão de Fibonacci [1]. Para qualquer elemento da classe o polinómio característico tem duas raízes reais distintas,

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1.618 > 0, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \simeq -0.618 < 0 .$$

A maior raiz é o famoso ‘número de ouro’  $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$ . Na Figura 5 é mostrado o retrato de fase da sucessão de Fibonacci. A observação do respectivo gráfico, leva-nos a conjecturar que, assimptoticamente, o gráfico da função  $g(t+1) - g(t)$  deverá conter pontos numa certa direcção invariante, ou seja, que existe  $\lim_{t \rightarrow \infty} (g(t+1) - g(t))/g(t)$ . Atendendo aos valores da tabela da Figura 5, tal limite deverá ser aproximadamente  $13/21 \simeq 0.62$ . De facto, para uma infinidade de equações às diferenças do tipo (24) o referido limite existe e toma o valor  $1/\Phi$ , conforme previsto na seguinte proposição:

**Proposição 3.1.** *Sejam  $\alpha \in \mathbb{Z}$ ,  $\beta \in \mathbb{Z}$  valores iniciais da classe de equações às diferenças (24). Se existir*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t+1) - g(t)}{g(t)}, \quad (25)$$

*tal limite é o número  $1/\Phi$ .*

*Demonstração.* Sabemos que  $g(t) = c_1 \lambda_1^t + c_2 \lambda_2^t$ . Admitamos que  $c_1 \neq 0$  e  $c_1 + c_2 (\lambda_2/\lambda_1)^t \neq 0$ . Então,

$$\begin{aligned} \frac{g(t+1) - g(t)}{g(t)} &= \frac{c_1 \lambda_1^{t+1} + c_2 \lambda_2^{t+1} - c_1 \lambda_1^t - c_2 \lambda_2^t}{c_1 \lambda_1^t + c_2 \lambda_2^t} \\ &= \frac{c_1 \lambda_1^t (\lambda_1 - 1) + c_2 \lambda_2^t (\lambda_2 - 1)}{\lambda_1^t (c_1 + c_2 (\lambda_2 / \lambda_1)^t)} = \frac{c_1 (\lambda_1 - 1) + c_2 (\lambda_2 / \lambda_1)^t (\lambda_2 - 1)}{c_1 + c_2 (\lambda_2 / \lambda_1)^t}. \end{aligned}$$

Atendendo a que  $|\lambda_2 / \lambda_1| < 1$ , resulta

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t+1) - g(t)}{g(t)} = \frac{c_1 (\lambda_1 - 1)}{c_1} = \lambda_1 - 1 = \frac{1}{\Phi}. \quad \square$$

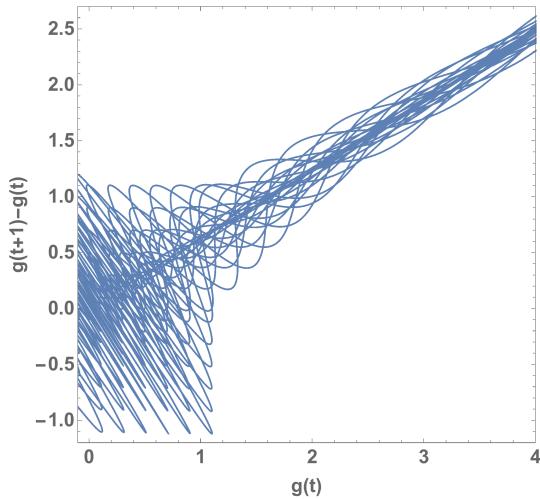


Fig. 6: Retrato de fase de sucessões de Fibonacci com  $x_0, x_1$  assumindo valores com passo 0.1 .

Considerando o conjunto de valores iniciais (de passo 0.1),  $x_0 = \alpha \in \{-1.1, -1.0, \dots, 0.9, 1.0, 1.1\}$ , e  $x_1 = \beta \in \{-1.1, -1.0, \dots, 0.9, 1.0, 1.1\}$ , mostra-se na Figura 6 o retrato de fase das correspondentes sucessões  $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ . A figura sugere a existência do limite do quociente  $((g(t+1) - g(t))/g(t))$ , de valor  $1/\Phi \simeq 0.618$ , correspondente ao declive de aproximadamente  $35.4^\circ$ , que poderemos atribuir a um segmento de recta facilmente identificável na figura, cujo declive está de acordo com o enunciado na Proposição 3.1.

#### 4 Anexo

A fim de que o leitor possa desenhar o retrato de fase para equações às

diferenças do tipo  $x_{n+2} = a_1 x_{n+1} + a_0 x_n$ , com valores iniciais  $x_0 = \alpha$ ,  $x_1 = \beta$ , é incluído abaixo código *Mathematica*, cujos dados deverão ser modificados em função do problema a tratar. A nomenclatura do código é análoga à utilizada ao longo do texto e, por isso, não foram incluídos comentários adicionais.

```

ClearAll["Global`*"];
SetOptions[ParametricPlot, BaseStyle -> {Bold, 18},
  Frame -> True, ImageSize -> 500];
tmin = 0;
tmax = 10;
cab = {"xn", "xn+1 - xn"; (* legenda para tabela *)}
Manipulate[
  a1 = 1/2; a0 = -1/2;
  Δ = a1^2 + 4 a0;
  λ1 = (a1 + Sqrt[Δ])/2;
  λ2 = (a1 - Sqrt[Δ])/2;
  x[0] := α; x[1] := β;
  x[n_] := a1 x[n - 1] + a0 x[n - 2];
  h[t_] := c1 λ1^t + c2 λ2^t;
  {c11, c22} = {c1, c2} /. Solve[{h[0] == α, h[1] == β}, {c1, c2}][[1]];
  g[t_] := Re[c11 Exp[Log[λ1] t] + c22 Exp[Log[λ2] t]];
  tab = Table[{x[n], x[n + 1] - x[n]}, {n, 0, tmax}];
  {ParametricPlot[{(g[t], g[t + 1] - g[t])}, {t, tmin, tmax},
    PlotStyle -> {Black},
    Frame -> True,
    AspectRatio -> 1,
    PlotRange -> Automatic,
    FrameLabel -> {"g(t)", "g(t+1)-g(t)" },
    PlotLabel -> Style["g(t)= " <> ToString[g[t] // TraditionalForm], 12],
    Epilog -> {PointSize[0.02], Blue, Point[tab]}], " ",
    Style[Grid[Prepend[tab, cab], Frame -> All], Bold, 16],
    Grid[{{"c1=", c11, "c2=", c22},
      {"λ1=", λ1, N[λ1]] // Column,
      {"λ2=", λ2, N[λ2]] // Column,
      {"x[n]= " <> ToString[a1 // TraditionalForm] <> " x[n-1]
      " <> ToString[a0 // TraditionalForm] <> " x[n-2]" } // Row
      }]] // Row,
  {α, {-2, -1, 0, 2}}, {β, {-1, 0, 1, 2}}]

```

Fig. 7: Código para representação do retrato de fase  $H(t) = (g(t), g(t + 1) - g(t))$ .

## Referências

- [1] K. Devlin, *Finding Fibonacci: The Quest to Rediscover The Forgotten Mathematical Genius Who Changed the World*, Princeton University Press, 2017.
- [2] S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*, Springer, third ed., 2005.
- [3] P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis*, Vol. 1, John Wiley and Sons, New York, 1974.
- [4] S. Wolfram, *The Mathematica Book*, Wolfram Media, fifth ed., 2003.