Construções impossíveis com régua e compasso

José Carlos Santos
Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
e-mail: `jcsantos@fc.up.pt`

Resumo: Será visto como lidar com problemas de construções com régua e compasso que levem a equações algébricas de grau 4. Mais precisamente, é dado um critério que permite decidir se um tal problema tem ou não solução.

Abstract: It will be seen how to deal with constructions that can be carried out with compass and straightedge when they lead to quartic equations. More precisely, it will be given a criterion that allows to determine whether or not such a problem is solvable.

palavras-chave: Régua e compasso. Geometria euclidiana

keywords: Compass and straightedge. Euclidian Geometry.

1 Introdução

A maneira usual de demonstrar que certos problemas geométricos não têm solução usando somente régua e compasso baseia-se no facto, demonstrado por Pierre-Laurent Wantzel (veja-se [13]), de que o uso daqueles instrumentos leva sempre a números algébricos cujo grau é necessariamente uma potência de 2. Este facto é empregue em [5, § 4.2] e em [12, ch. 7] a fim de demonstrar que há problemas geométricos que não podem ser resolvidos usando somente a régua e compasso, pois dão origem ou a números algébricos cujo grau *não é* uma potência de 2 (duplicação do cubo e trissecção do ângulo; veja-se também [9] para este último problema) ou a um número não algébrico (quadratura do círculo).

Esta abordagem às soluções de problemas geométricos recorrendo somente a régua e compasso leva naturalmente à seguinte questão: há problemas geométricos que *não* possam ser resolvidos usando somente aqueles instrumentos mas que, no entanto, dêem origem a um número algébrico cujo grau *é* uma potência de 2? Posto de outro modo: haverá números algébricos não construtíveis cujo grau seja uma potência de 2? A resposta é afirmativa. Neste artigo será visto um critério que permite, dado um número algébrico de grau 4, determinar se é ou não construtível. Como ponto de partida, será visto um problema que não pode ser resolvido usando somente régua e compasso, embora leve a um número algébrico de grau 4.

Em [8] podem ser vistos resultados semelhantes àqueles que são expostos aqui, bem como alguns problemas adicionais.

2 O problema

Considere-se o seguinte problema: dados um rectângulo r e um comprimento c, é possível construir um rectângulo r' inscrito no rectângulo r tal que um dos seus lados tenha comprimento c (veja-se a figura 1)? Como será visto, este problema não pode, em geral, ser resolvido usando somente régua e compasso, embora leve a um número algébrico de grau 4. Será também visto como resolver este problema por meio de intersecção de cónicas. Naturalmente, qualquer número algébrico de grau menor ou igual a 4 pode ser obtido como a abcissa do ponto de instersecção de duas cónicas mas, como será visto, a solução do problema em questão via cónicas é particularmente simples.

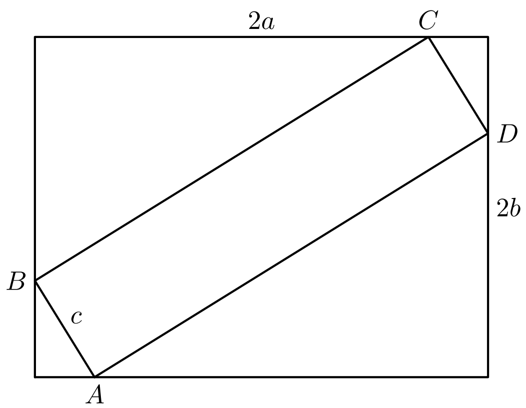

Figura 1: O problema

3 Solução via cónicas

Podemos, sem perda de generalidade, supor que as coordenadas dos vértices de r, relativamente a algum referencial ortonormado, são $(\pm a, \pm b)$, para dois números a e b tais que $a \geq b > 0$. Uma vez que c é um comprimento, $c > 0$ e, naturalmente, para que o problema tenha solução, c terá que ser menor do que a diagonal do rectângulo r, ou seja, $c < 2\sqrt{a^2+b^2}$. Vamos procurar uma solução com um vértice A no lado de baixo de r, um vértice B no lado esquerdo de r e tal que $\overline{AB} = c$. Então, para algum $x \in [-a,a]$ e para algum $y \in [-b,b]$, $A = (x,-b)$ e $B = (-a,y)$. Afirmar que $\overline{AB} = c$ equivale a afirmar que $(x+a)^2+(y+b)^2 = c^2$. Seja C (respectivamente D) a reflexão de A (respectivamente B) no centro de r. Então $[ABCD]$ é um paralelogramo e é então necessário determinar quando é que é um rectângulo. Não é difícil ver que isto ocorre quando e só quando A e B são equidistantes do centro de r. Por outras palavras, $[ABCD]$ é um rectângulo se e só se $x^2+b^2 = y^2+a^2$, o que é o mesmo que afirmar que $x^2-y^2 = a^2-b^2$. Assim sendo, afirmar que $[ABCD]$ é um rectângulo tal que $\overline{AB} = c$ equivale a afirmar que

$$\begin{cases} (x+a)^2+(y+b)^2 = c^2 \\ x^2-y^2 = a^2-b^2 \\ -a \leq x \leq a \\ -b \leq y \leq b. \end{cases} \tag{1}$$

Geometricamente, afirmar que (x_0,y_0) é solução de ambas as equações do sistema (1) significa que o ponto (x_0,y_0) está na intersecção da hipérbole $x^2-y^2 = a^2-b^2$ (que, de facto, só é uma hipérbole quando $a > b$; quando $a = b$ é a reunião de duas rectas concorrentes) com a circunferência $(x+a)^2+(y+b)^2 = c^2$. Trata-se da circunferência de raio c centrada no vértice do canto inferior esquerdo de r, enquanto que a hipérbole em questão é a única hipérbole que passa pelos vértices de r e cujas assímptotas são as rectas de declives ± 1 que passam pelo centro de r. Logo, se a hipérbole e a circunferência se intersectam num ponto P e se

- A é o ponto do lado de baixo de r mais próximo de P;
- B é o ponto do lado esquerdo de r mais próximo de P;
- C é a reflexão de A no centro de r;
- D é a reflexão de B no centro de r,

então $[ABCD]$ é uma solução do problema (veja-se a figura 2) e qualquer solução do problema pode ser obtida por este processo.

A segunda equação do sistema (1) também pode ser obtida por outro processo. O paralelogram $[ABCD]$ é um rectângulo se e só se os segmentos de recta $[AB]$ and $[AD]$ forem perpendiculares e, uma vez que $\overrightarrow{AB} = (-x-$

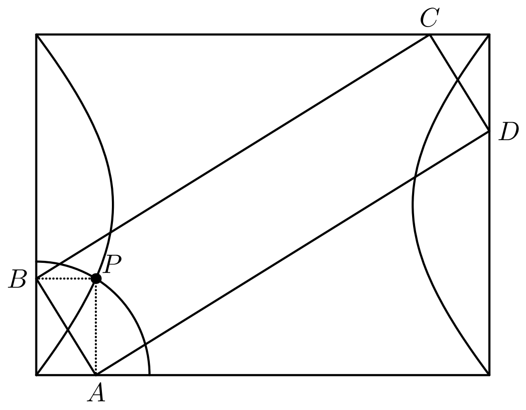

Figura 2: Solução por meio de intersecção de cónicas

$a, y+b)$ e que $\overrightarrow{AD} = (-x+a, -y+b)$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} &\iff (-x-a, y+b).(-x+a, -y+b) = 0\\ &\iff x^2 - y^2 = a^2 - b^2.\end{aligned}$$

A demonstração anterior emprega coordenadas, mas a descrição do método em si envolve somente Geometria sintética. Seria interessante encontrar uma demonstração que também recorresse somente a Geometria sintética.

Observe-se que tanto as equações como as desigualdades do sistema (1) são homogéneas (tanto relativamente às variáveis quanto aos parâmetros) e que, portanto, se (x_0, y_0) for uma solução do sistema e se $\lambda > 0$, então $(\lambda x_0, \lambda y_0)$ é uma solução do sistema obtido de (1) ao substituir-se a, b e c por λa, λb e λc respectivamente.

4 Régua e compasso

Vamos agora provar que o problema anterior não pode ser resolvido usando somente régua e compasso. De facto, vai ser demonstrado um critério para determinar quando é que um número algébrico de grau 4 é construtível e esse critério será então aplicado a este problema, bem como a outros.

Preliminares

Seja $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Q}[x]$ um polinómio mónico de grau n. Se $a_{n-1} = 0$, diremos que $p(x)$ é um *polinómio reduzido*. Há somente um polinómio reduzido da forma $p(x+\lambda)$, que é aquele para o qual $\lambda = -a_{n-1}/n$; o polinómio $p(x - a_{n-1}/n)$ designa-se por *forma reduzida* de $p(x)$.

Diz-se que um número complexo α é um número algébrico se for raiz de algum polinómio não nulo com coeficientes racionais. O menor grau de um tal polinómio designa-se por *grau* de α e existe um e um só polinómio mónico com coeficientes racionais cujo grau é o grau de α do qual α é raiz, que é o *polinómio minimal* de α, o qual divide qualquer outro polinómio com coeficientes racionais do qual α seja raiz (veja-se [5, § 2.11] ou [10, § 5.6.2]).

Dado um polinómio mónico de grau 4, $P(x) = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$, com raízes r_1, r_2, r_3 e r_4, não é complicado provar que o polinómio mónico de grau 3 cujas raízes são $(r_1+r_2)(r_3+r_4)$, $(r_1+r_3)(r_2+r_4)$ e $(r_1+r_4)(r_2+r_3)$ é o polinómio $x^3 - 2qx^2 + (q^2 + pr - 4s)x - pqr + r^2 + p^2s$, o qual se designa por *cúbica resolvente* de $P(x)$. Se $P(x)$ for reduzido (ou seja, se $p = 0$), um cálculo simples (veja-se [12, § 1.4]) mostra que, para qualquer número complexo u, u é raiz da cúbica resolvente de $P(x)$ se e só se

$$P(x) = \left(x^2 + \sqrt{-u}x + \frac{q}{2} - \frac{u}{2} - \sqrt{-u}\right)\left(x^2 - \sqrt{-u}x + \frac{q}{2} - \frac{u}{2} + \sqrt{-u}\right). \tag{2}$$

A fim de provar que certos polinómios $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ com coeficientes inteiros são irredutíveis em $\mathbb{Q}[x]$, iremos recorrer ao *critério de Eisenstein*: se existir um primo p tal que $p \mid a_i$ para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ mas tal que $p \nmid a_n$ e que $p^2 \nmid a_0$, então $P(x)$ é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$ (veja-se [12, § 3.4]). Este critério será aplicado somente a polinómios mónicos, caso em que a condição $p \nmid a_n$ se verifica automaticamente. Convém observar que o polinómio minimal de um número algébrico é sempre irredutível.

Um número complexo z é *construtível* caso possa ser construído a partir de 0 e de 1 usando somente régua e compasso. Por exemplo, os números $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ são construtíveis, pois são os pontos de intersecção das circunferências de raio 1 centradas em 0 e em 1. Naturalmente, todos os números racionais são construtíveis.

Caso $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sejam números complexos, seja $\mathbb{Q}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ o mais pequeno subcorpo de $\mathbb{C}$ ao qual pertencem.

Teorema 1 *Um número complexo z é construtível se e só se pertencer a algum subcorpo de $\mathbb{C}$ da forma $\mathbb{Q}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, onde ${u_1}^2 \in \mathbb{Q}$ e, para cada $j \in \{2, 3, \ldots, n\}$, ${u_j}^2 \in \mathbb{Q}(u_1, u_2, \ldots, u_{j-1})$.*

Uma generalização deste teorema pode ser vista em [5, § 4.2].

Os números construtíveis formam um corpo, como pode ser visto em [5, § 4.2] ou em [12, § 7.2]. De facto, só iremos precisar de saber que a soma e o produto de dois números construtíveis também são números construtíveis.

Critério de impossibilidade

Se (x_0, y_0) for solução do sistema (1), resulta da segunda equação que $x_0 = \pm\sqrt{{y_0}^2 + a^2 - b^2}$. Se isto for empregue para eliminar x da primeira equação, obtém-se que y_0 é raiz do polinómio

$$4y^4 + 8by^3 + 4(a^2 + b^2 - c^2)y^2 + 4b(2a^2 - c^2)y + 4a^2(b^2 - c^2) + c^4. \quad (3)$$

Suponha-se que $a = 4$, $b = 3$ e $c = 2$ (que são os valores empregues na criação das figuras 1 e 2). Após divisão por 4, o polinómio (3) fica

$$p(y) = y^4 + 6y^3 + 21y^2 + 84y + 84. \quad (4)$$

Resulta do critério de Eisenstein (com $p = 3$) que $p(y)$ é irredutível em $\mathbb{Q}[y]$ e que, portanto, as suas raízes são números algébricos de grau 4.

O critério atrás mencionado que permite determinar se um número algébrico de grau 4 é ou não construtível é o seguinte:

Teorema 2 *Seja α um número algébrico de grau 4 e seja $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ o polinómio minimal de α. Então α é construtível se e só se a cúbica resolvente de $p(x)$ tiver alguma raiz racional.*

Um cálculo simples revela que a cúbica resolvente do polinómio (4) é $q(x) = x^3 - 42x^2 + 609x - 504$. Resulta do critério de Eisenstein (com $p = 7$) que este polinómio é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$, pelo que não tem raízes racionais. Também se poderia chegar à mesma conclusão aplicando o teorema das raízes racionais (veja-se [7, § 4.3] ou [10, § 4.4.1]). Com efeito, resulta deste teorema que as raízes racionais de $q(x)$ são necessariamente números inteiros. Mas, uma vez que $q(0) < 0$, que $q(1) > 0$ e que $(\forall x \in \mathbb{R}) : q'(x) = 3(x - 14)^2 + 21 > 0$, a única raiz de $q(x)$ está em $]0, 1[$ e, portanto, não é inteira.

Vejamos como demonstrar o teorema 2. Seja α um número algébrico de grau 4, seja $p(x)$ o seu polinómio minimal e suponha-se que a cúbica resolvente $q(x)$ de $p(x)$ tem alguma raiz racional r; quer-se provar que α é construtível. Se β, γ e δ forem as restantes raízes de $p(x)$, está-se a supor que um dos números $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)$, $(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)$ e $(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)$ (ou seja, uma das raízes de $q(x)$) é racional. Pode-se, sem perda de generalidade, supor que é o primeiro destes. Seja $p^*(x)$ a forma reduzida de $p(x)$. Então $p^*(x)$ é da forma $p(x+\lambda)$, para algum número racional λ, pelo que as raízes de $p^*(x)$ são $\alpha-\lambda$, $\beta-\lambda$, $\gamma-\lambda$ e $\delta-\lambda$. Mas então

$$(\alpha-\lambda+\beta-\lambda)(\gamma-\lambda+\delta-\lambda)$$

é uma raiz da cúbica resolvente $q^*(x)$ de $p^*(x)$. Acontece que esta raiz é igual a

$$(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)+4\lambda^2-2\lambda(\alpha+\beta+\gamma+\delta),$$

que é um número racional ($\alpha+\beta+\gamma+\delta$ é racional por ser o simétrico do coeficiente de x^3 em $p(x)$). Sendo assim, resulta da relação (2) que $\alpha-\lambda$ é raiz de um polinómio quadrático em que cada coeficiente é racional ou raiz quadrada de um número racional, pelo que $\alpha-\lambda$ é construtível e, portanto, α é construtível.

Suponha-se agora que α é construtível e suponha-se também que β, γ e δ são construtíveis. Uma vez que a soma e o produto de números construtíveis são novamente números construtíveis, as raízes de $q(x)$ são construtíveis. Mas então $q(x)$ é redutível, pois se assim não fosse as suas raízes seriam números algébricos de grau 3, que não é uma potência de 2. Sendo redutível e de grau 3, $q(x)$ tem necessariamente uma raiz racional.

Assim sendo, a fim de terminar a demonstração do teorema 2, basta provar que se α for construtível, então as restantes raízes de $p(x)$ também o são. Provemos então que β é construtível. Para tal, vamos começar por provar que existe um isomorfismo ι de $\mathbb{Q}(\alpha)$ sobre $\mathbb{Q}(\beta)$ tal que $\iota(\alpha)=\beta$. Cada elemento de $\mathbb{Q}(\alpha)$ é da forma $q(\alpha)$, para algum polinómio $q(x)\in\mathbb{Q}[x]$. Além disso, se $r(x)\in\mathbb{Q}[x]$ for tal que $q(\alpha)=r(\alpha)$, então α é raiz de $q(x)-r(x)$ e, portanto, $p(x)\mid q(x)-r(x)$; em particular, β também é raiz de $q(x)-r(x)$, pelo que $q(\beta)=r(\beta)$. Logo, faz sentido definir

$$\begin{array}{rccc}\iota\colon & \mathbb{Q}(\alpha) & \mapsto & \mathbb{Q}(\beta)\\ & q(\alpha) & \mapsto & q(\beta),\end{array}$$

que é um isomorfismo tal que $\iota(\alpha)=\beta$.

Como α é construtível, sabe-se, pelo teorema 1, que $\alpha\in\mathbb{Q}(u_1,u_2,\ldots,u_n)$, onde ${u_1}^2\in\mathbb{Q}$ e onde, para cada $j\in\{2,3,\ldots,n\}$, ${u_j}^2\in\mathbb{Q}(u_1,u_2,\ldots,u_{j-1})$. Observe-se que $\mathbb{Q}(u_1,u_2,\ldots,u_n)\supset\mathbb{Q}(\alpha)$, uma vez que $\mathbb{Q}(u_1,u_2,\ldots,u_n)\supset\mathbb{Q}$ e que $\alpha\in\mathbb{Q}(u_1,u_2,\ldots,u_n)$. Assim sendo, se se provar que é possível prolongar ι a um homomorfismo de corpos (que também será representado por ι) de domínio $\mathbb{Q}(u_1,u_2,\ldots,u_n)$, poder-se-á deduzir do teorema 1 que β é construtível pois, se se definir $v_k=\iota(u_k)$ para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, é claro que $\beta \in \mathbb{Q}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, que ${v_1}^2 \in \mathbb{Q}$ e que, para cada $j \in \{2, 3, \ldots, n\}$, ${v_j}^2 \in \mathbb{Q}(v_1, v_2, \ldots, v_{j-1})$.

Comecemos por provar que ι se pode prolongar a $\mathbb{Q}(u_1)$. Caso $u_1 \in \mathbb{Q}(\alpha)$, então $\iota(u_1)$ já se encontra definido e, portanto, o domíno de ι já contém $\mathbb{Q}(u_1)$. Caso contrário, uma vez que ${u_1}^2 \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha)$, $\iota({u_1}^2)$ já se encontra definido e basta então definir $\iota(u_1)$ como sendo uma das raízes quadradas de $\iota({u_1}^2)$. Visto que ι já está definido em $\mathbb{Q}$, isto permite prolongar ι a $\mathbb{Q}(u_1)$. Pode-se agora prolongar ι a $\mathbb{Q}(u_1, u_2)$ pelo mesmo processo: caso $u_2 \in \mathbb{Q}(\alpha)$, não há nada a fazer. Caso contrário, ${u_2}^2 \in \mathbb{Q}(u_1)$, onde ι já se encontra definido. Então define-se $\iota(u_2)$ como sendo uma das raízes quadradas de $\iota({u_1}^2)$. Prosseguindo deste modo, prolonga-se ι a $\mathbb{Q}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, como se pretendia. Isto conclui a demonstração do teorema 2.

Em particular está agora provado que o problema que consiste em inscrever um rectângulo de comprimento dado num rectângulo dado não tem, em geral, solução com régua e compasso. Naturalmente, para certos valores concretos de a, b e c uma tal solução existe. Por exemplo, quando $a = b$ (ou seja, quando o rectângulo dado é um quadrado), o problema *pode* ser resolvido usando apenas régua e compasso, seja qual for o comprimento c (desde que seja menor do que a diagonal do quadrado, naturalmente), pois neste caso, como já foi referido, não temos uma hipérbole, mas sim uma cónica degenerada, a qual consiste nas duas rectas definidas pelos dois pares de vértices opostos do quadrado, ou seja, são as rectas suporte das diagonais do quadrado. É claro geometricamente que o problema tem uma e uma só solução (com, como atrás, uma extremidade de um dos lados com comprimento c no lado de baixo do quadrado e a outra extremidade do lado esquerdo) quando $0 < c < \sqrt{2}a$ e que há exactamente três soluções (nas mesmas condições) quando $\sqrt{2}a \leq c < 2\sqrt{2}a$. A figura 3 mostra duas destras três soluções quando $c = \frac{5}{3}a$; a terceira pode ser obtida a partir da da direita por reflexão em qualquer das diagonais do quadrado. Qualquer duas duas últimas soluções forma uma imagem que surge numa das mais conhecidas demonstrações do teorema de Pitágoras.

Que o problema tem sempre solução quando $a = b$ também resulta do facto de, neste caso, a expressão polinomial (3) ser

$$4y^4 + 8ay^3 + 4(2a^2 - c^2)y^2 + 4a(2a^2 - c^2)y + 4a^2(a^2 - c^2) + c^4.$$

Acontece que este polinómio é redutível em $\mathbb{Q}[x]$, sejam quais for os valores de a e de c (desde que sejam racionais), pois é igual a

$$\left(2y^2 + 4ay + 2a^2 - c^2\right)\left(2y^2 + 2a^2 - c^2\right).$$

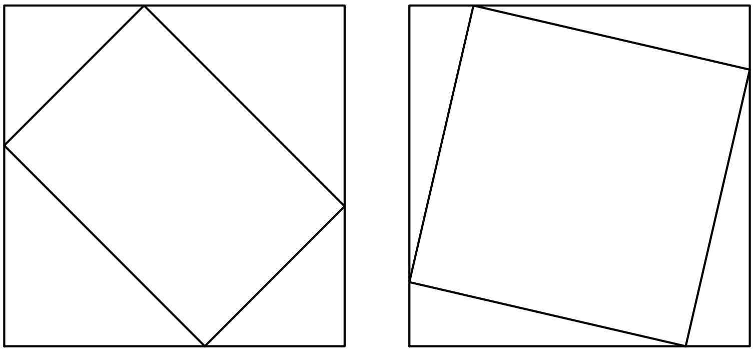

Figura 3: Soluções quando o rectângulo dado é um quadrado

Outra situação na qual o problema pode ser resolvido usando somente régua e compasso é no caso em que $c = 2a$ ou que $c = 2b$ pois, em qualquer dos casos, o rectângulo que se pretende construir coincide com o rectângulo dado.

5 Número de soluções

Resulta imediatamente da figura 2 que o problema tem sempre solução quando $0 < c \leq 2b$, pois nesse caso a circunferência de raio r centrada no canto inferior esquerdo do rectângulo dado intersecta o ramo da esquerda da hipérbole. E também tem alguma solução quando c for maior ou igual à distância $d(a, b)$ do canto inferior esquerdo do rectângulo ao ramo da direita da hipérbole (supondo, é claro que $c < 2\sqrt{a^2 + b^2}$). Mas caso aconteça que

$$2b < d(a, b), \tag{5}$$

então o problema não tem solução quando $2b < c < d(a, b)$. A fim de calcular o valor de $d(a, b)$, o método dos multiplicadores de Lagrange pode ser empregue para determinar o ponto (x, y) do ramo da direita da hipérbole que fica mais próximo do vértice inferior esquerdo de r. Mas é mais simples (embora leve essencialmente aos mesmos cálculos) ver que o vector que vai de $(-a, -b)$ a (x, y) tem necessariamente que ser paralelo ao gradiente da função $h\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = x^2 - y^2$; veja-se a figura 4.

Está-se então interessado em encontrar o ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que pertence ao ramo da direita da hipérbole $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$ tal que $(x + a, y + b)$ seja múltiplo de $(2x, -2y)(= \nabla h(x, y))$. Por outras palavras, quer-se resolver o

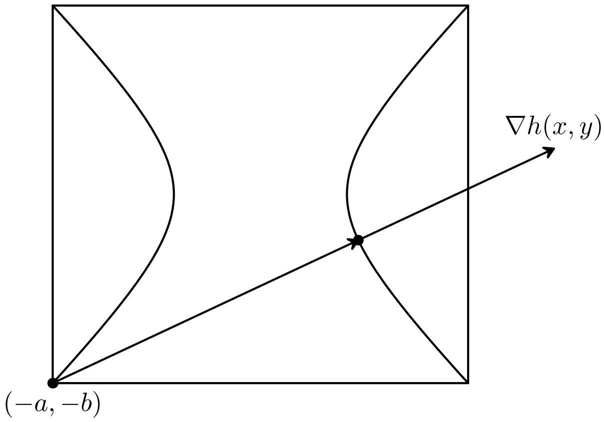

Figura 4: Ponto mais próximo do canto inferior esquerdo

sistema

$$\begin{cases} x+a=2\lambda x \\ y+b=-2\lambda y \\ x^2-y^2=a^2-b^2 \\ x>0. \end{cases}$$

Uma vez que é claro que não existe nenhuma solução do sistema para a qual se tenha $2\lambda = \pm 1$, as duas primeiras equações podem ser substituídas por $x = -\frac{a}{1-2\lambda}$ e por $y = -\frac{b}{1+2\lambda}$ respectivamente. Então a terceira equação passa a ser

$$-4\frac{4(a^2-b^2)\lambda^4-3(a^2-b^2)\lambda^2-(a^2+b^2)\lambda}{(1-2\lambda)^2(1+2\lambda)^2}=0.$$

Uma solução desta equação é $\lambda = 0$, mas esta solução é irrelevante neste contexto, pois significa tomar-se $(x,y)=(-a,-b)$, o qual pertence ao ramo da esquerda da hipérbole. A outra solução pode ser obtida resolvendo a equação

$$\lambda^3-\frac{3}{4}\lambda-\frac{a^2+b^2}{4(a^2-b^2)}=0,$$

a qual pode ser resolvido recorrendo à fórmula de Cardano. (É claro que isto não faz sentido quando $a=b$, mas já se lidou com este caso.) A solução é

$$\lambda=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{a-b}{a+b}}+\sqrt[3]{\frac{a+b}{a-b}}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{\frac{a}{b}-1}{\frac{a}{b}+1}}+\sqrt[3]{\frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}-1}}\right) \tag{6}$$

e, portanto, o ponto do ramo da direita da hipérbole mais próximo de $(-a,-b)$ é $(-\frac{a}{1-2\lambda},-\frac{b}{1+2\lambda})$, com o valor de λ dado por (6). Assim sendo,

$$\begin{aligned} d(a,b) &= \text{distância de } \left(-\frac{a}{1-2\lambda},\frac{b}{1+2\lambda}\right) \text{ a } (-a,-b) \\ &= 2\lambda\sqrt{\left(\frac{a}{1-2\lambda}\right)^2+\left(\frac{b}{1+2\lambda}\right)^2} \end{aligned}$$

e a desigualdade (5) equivale a

$$1 \leq \lambda\sqrt{\left(\frac{a/b}{1-2\lambda}\right)^2+\frac{1}{(1+2\lambda)^2}}.$$

O membro da direita desta desigualdade depende somente do quociente a/b e um cálculo numérico revela que a desigualdade tem lugar quando a/b for menor que um número μ cujo valor é aproximadamente 1,18. Consequentemente, o problema pode ter até três soluções quando $a < \mu b$. De facto, se isto se verificar, o problema tem exactamente três soluções quando $d(a,b) < c < 2b$; para um exemplo desta situação (obtido com $a = 1{,}1 \times b$ e $c = 1{,}9 \times b$), veja-se a figura 5.

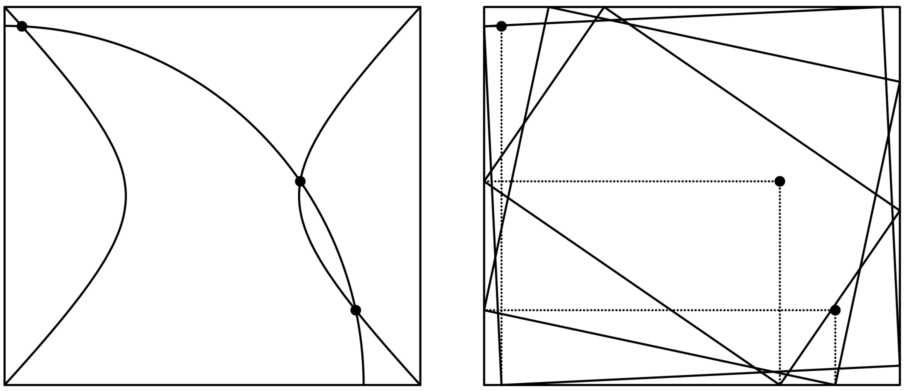

Figura 5: Existência de três soluções

Por outro lado, se $a > \mu b$, então, embora o problema tenha solução quando c está próximo de 0 ou de $2\sqrt{a^2+b^2}$, não tem solução quando $2b < c < d(a,b)$. Se, por exemplo, $a = 4$ e $b = 3$ (que, como já foi afirmado, são os valores usados para o rectângulo dado no caso das figuras 1 e 2), então $d(a,b) \simeq 7\frac{1}{9}$ e, portanto, o problema não tem solução quando $c = 7$, ou seja, quando o comprimento c for a média aritmética dos comprimentos de dois lados adjacentes do rectângulo dado.

É interessante observar que o problema aqui estudado de determinar a distância de um ponto a uma hipérbole também não pode, em geral, ser resolvido usando somente régua e compasso; veja-se [1].

6 Outros problemas

Vejamos o resultado de aplicar o teorema 2 a dois problemas clássicos.

Construção do pentágono regular

O primeiro destes é o de construir um pentágono regular. Mais precisamente, quer-se construir o pentágono de centro 0 do qual 1 é um dos vértices (aqui, estão a encarar-se os números 0 e 1 como sendo números complexos). Então os restantes vértices do pentágono são as raízes do polinómio x^5-1 distintas de 1. Visto que $x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$, as raízes em questão são as raízes do polinómio $q(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$, o qual é irredutível (basta aplicar o critério de Eisenstein a $q(x+1)$ com $p=5$). Logo, as raízes de $q(x)$ são números algébricos de grau 4 e $q(x)$ é o polinómio minimal de cada uma delas. A cúbica resolvente de $q(x)$ é x^3-2x^2-2x+1, da qual -1 é uma raiz. Logo, o pentágono regular em questão pode ser construído com régua e compasso. Naturalmente, que é possível construir um pentágono regular dados o centro e um dos vértices é algo que já se sabe desde o tempo de Euclides; veja-se [4, Livro IV, proposição 11].

O problema de Alhazan

Hasan Ibn al-Haytham (c. 965–c. 1040), mais conhecido no Ocidente por Alhazen, propôs o seguinte problema no seu tratado de Óptica (veja-se [11] para mais detalhes): dados dois pontos A e B de um círculo de centro C, determinar um ponto P da circunferência do círculo tal que a bissectriz do ângulo $A\hat{P}B$ passe por C. Isto também pode ser visto como um problema de Óptica (o que é natural, dada a sua origem). Basta encarar a circunferência como um espelho circular e o problema passa então a ser o de determinar um ponto P desse espelho tal que um sinal luminoso emitido de A, ao ser reflectido em P passe por B. Este problema não pode, em geral, ser resolvido usando somente régua e compasso, como é demonstrado em [3], embora possa ser resolvido através da intersecção da circunferência com uma cónica, como foi descoberto por Christiaan Huygens (veja-se [11]).

Suponha-se que a circunferência em questão é a circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1 e que os pontos A e B são $(1/6, 1/6)$ e $(-1/2, 1/2)$, respectivamente. Pode-se provar que, neste caso, a abcissa das soluções P do problema são as raízes reais do polinómio $p(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x - 1$, o qual é irredutível (veja-se [6, § 2]; a irredutibilidade de $p(x)$ também pode ser demonstrada recorrendo ao algoritmo descrito em [2]). Portanto, a abcissa de P é um número algébrico de grau 4. A cúbica resolvente de $p(x)$ é $x^3 - 8x^2 + 16x + 16$. Pelo teorema das raízes racionais, as suas raízes racionais só podem ser os divisores de 16, mas verifica-se facilmente que nenhum daqueles números é raiz deste polinómio. Isto mostra que o problema de Alhazen não pode ser resolvido usando somente régua e compasso. No caso concreto anterior, $p(x)$ tem duas raízes reais e, consquentemente, o problema tem duas soluções P e P^*, que podem ser vistas na figura 6, onde C é o centro da circunferência (note-se que, ao contrário do que possa parecer, os pontos P, B e P^* não são colineares).

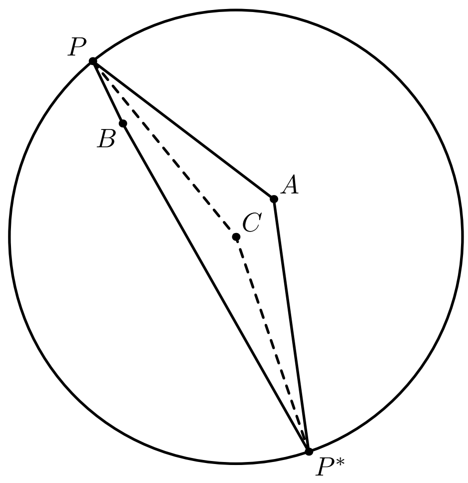

Figura 6: Soluções do problema de Alhazen

Referências

[1] H. Azad e A. Laradji, Some impossible constructions in elementary geometry, *Math. Gaz.*, **88** (2004), pp. 548–551.

[2] Gary Brookfield, Factoring quartic polynomials: A lost art, *Math. Mag.*, **80**(1) (2007), pp. 67–70. URL: `http://www.jstor.org/stable/27642994`

[3] Jack M. Elkin, A deceptively easy problem, *Math. Teacher*, **58** (1965), pp. 193–198. URL: `http://www.jstor.org/stable/27968003`

[4] Euclides, *Os Elementos*, Editora Unesp, São Paulo, 2009.

[5] Nathan Jacobson, *Basic Algebra I*, 2ª edição, W. H. Freeman and Company, New York, 1985.

[6] Peter M. Neumann, Reflections on reflection in a spherical mirror, *Amer. Math. Monthly*, **105**(6) (1998), pp. 523–528. URL: `http://www.jstor.org/stable/2589403`

[7] Ivan Niven, *Numbers: Rational and irrational*, The L. W. Singer Company, 1961.

[8] Russell A. Gordon e José Carlos Santos, An interesting construction problem, *Amer. Math. Monthly*, **125**(3) (2018), pp. 207–221

[9] José Carlos Santos, Another approach to the trisection problem, *Math. Gaz.*, **90** (2006), pp. 280–284.

[10] José Carlos Santos, *Números*, U. Porto Edições, Porto, 2014.

[11] John D. Smith, The Remarkable Ibn al-Haytham, *Math. Gaz.*, **76** (1992), pp. 189–198.

[12] Ian Stewart, *Galois Theory*, 4ª edição, Chapman & Hall, Boca Raton, 2015.

[13] Pierre-Laurent Wantzel, Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas, *J. Math. Pures Appl.*, **1**(2) (1837), pp. 366–372. URL: `http://visualiseur.bnf.fr/ConsulterElementNum?O=NUMM-16381&Deb=374&Fin=380&E=PDF`