

APROXIMAÇÕES DE π PELOS MÉTODOS DE NEWTON E DE WEGSTEIN

Mário M. Graça

Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa
e-mail: mgraca@math.tecnico.ulisboa.pt

Resumo: A partir da função modelo $f(x) = \tan(x/4) - 1$, são construídos métodos iterativos de Newton e de Wegstein a fim de produzir novas fórmulas aproximantes do número π . Provamos que, para a função modelo, a iteradora de Wegstein possui ordem cúbica de convergência, no intervalo $[3, 4]$. Apresentam-se resultados numéricos mostrando que a auto composição de iteradoras de Newton/Wegstein pode ser usada recursivamente para obter aproximações de π com milhares de dígitos decimais correctos.

Abstract: Starting from the function model $f(x) = \tan(x/4) - 1$, are built iterative methods to produce approximating new formulae of the number π . We prove that, for the model function, the Wegstein iteration function has cubic convergence in the interval $[3, 4]$. Numerical results are presented showing that the auto composition of Newton/Wegstein iteration functions can be used recursively in order to obtain approximations of π having thousands of correct decimal digits.

palavras-chave: Método de Wegstein; método de Newton; ordem de convergência; iteradoras auto compostas.

keywords: Wegstein method; Newton method; convergence order; self composition.

1 Introdução

Um processo iterativo de ponto fixo do tipo $x_{k+1} = g(x_k)$ é frequentemente considerado não satisfatório caso (i) não convirja; (ii) seja de convergência lenta; ou (iii) quando a partir dele se pretenda construir um outro de convergência mais rápida. Um processo pensado para os casos (ii) ou (iii), ou seja, para acelerar a convergência de outro mais lento, é usado nesta nota a fim de aproximar o número π . Trata-se do método de Wegstein [11], o qual consiste essencialmente na aplicação de extrapolação linear de Aitken [2] sobre duas iteradas consecutivas da função g .

O método de Wegstein, além de não usar derivadas (tal como o método da secante com o qual tem semelhanças), oferece ainda a vantagem de permitir calcular aproximações de um determinado ponto fixo da função iteradora g , no caso em que tal ponto fixo é repulsor. Tal significa que o método de Wegstein pode ser útil em todos os casos (i) a (iii) anteriormente referidos. Além da sua simplicidade, este método é facilmente generalizável a funções iteradoras definidas em \mathbb{R}^n , com $n \geq 2$, o que explica a sua utilidade na aproximação de soluções de sistemas lineares e não lineares com várias variáveis [10], [1], [9].

Designando por W a função iteradora de Wegstein, esta depende do ponto x onde actua bem como da função iteradora de base adoptada, isto é, $W = W(g, x)$. Como função iteradora g , escolhemos a função de Newton, tendo em vista ilustrarmos a construção do respectivo método de Wegstein e responder à seguinte questão: no que respeita a aproximar o número π , o método de Wegstein é mais interessante do que o método de Newton, quando este é aplicado a uma certa função f que admita π como um seu zero?

A fim de respondermos a tal questão, calculámos algumas fórmulas aproximantes do número π , comparando as que resultam do método de Newton com fórmulas aproximantes obtidas pelo método de Wegstein. Em ambos os casos essas fórmulas serão depois modificadas, a fim de se obter aproximações de π com milhares de dígitos correctos, até ao limite de cálculo numérico permitido pelo sistema *Mathematica* quando usado num computador pessoal¹. A limitação mais importante refere-se à precisão utilizada nos cálculos. Uma precisão superior a 10^6 dígitos decimais implica tempos de execução não aceitáveis, pelo que essa precisão é aqui considerada como o máximo atingível no sistema computacional que usámos.

Na Secção 2 começamos por descrever o método de Wegstein. Depois mostramos que a função W possui ordem de convergência superior à do método de Newton, quando este método é aplicado a funções reais f satisfazendo certas propriedades.

Em particular, na Secção 3, adoptamos como modelo a função $f(x) = \tan(x/4) - 1$, para a qual $z = \pi$ é um seu zero (simples), e se nos afigura a função real mais simples e natural quando se trata de aproximar esse famoso número. Para esta função mostramos que o método de Wegstein possui convergência cúbica, por exemplo, no intervalo $[3, 4]$.

A função de Newton correspondente, bem como a respectiva função iteradora de Wegstein, são depois utilizadas para a obtenção de fórmulas aproxi-

¹No presente caso um portátil MacBook Pro, 2 GHz Intel Core i7.

mantes de π , fórmulas essas que aparentemente não se encontram arroladas na imensa literatura existente dedicada ao número π . Em particular, em [3], [4], [6], [7] encontram-se descritas várias abordagens e fórmulas usadas ao longo dos tempos para aproximar esse número extraordinário. Métodos de segunda, terceira e quarta ordens de convergência são descritos detalhadamente, por exemplo, em [5] e [8]. Tais métodos, todavia, não são métodos de ponto fixo pelo que não pertencem à classe de métodos que aqui propomos. A comparação de alguns desses métodos com os processos de Newton/Wegstein ilustrados neste trabalho será efectuada noutra ocasião.

O sistema *Mathematica* permite-nos simplificar convenientemente as expressões simbólicas das iteradoras de Newton e Wegstein associadas à função $f(x) = \tan(x/4) - 1$. Consequentemente, surge naturalmente a ideia de obter métodos de Newton/Wegstein de ordem de convergência superior, mediante auto composição dessas duas iteradoras de base, tal como descrito na Secção 3.1. Uma vez que tais fórmulas obedecem a um padrão recursivo, que descrevemos, isso leva-nos naturalmente à construção de novas fórmulas, numericamente estáveis, a partir das quais se podem calcular aproximações de π de alta precisão, com milhares de casas decimais correctas. Algumas dessas fórmulas são apresentadas nos Parágrafos 3.1.1 (para a iteradora auto composta de Newton) e 3.1.2 (para a iteradora auto composta de Wegstein).

A estabilidade numérica das fórmulas que considerámos é inferida por meio de experimentação, iniciando os processos em causa respectivamente no ponto $x = 3$ e no ponto ‘perturbado’ $x = 3.14$, pontos esses tomados como aproximações iniciais do número π . Os resultados são automaticamente controlados mediante estimativas de erro inerentes a métodos de convergência supralinear, como é o presente caso. Tais estimativas são depois confirmadas mediante recurso aos valores de π que o sistema *Mathematica* fornece com precisão arbitrária (até ao limite de memória disponível). A demonstração formal da estabilidade numérica das fórmulas que utilizámos está fora do âmbito deste trabalho, pelo não será aqui considerada.

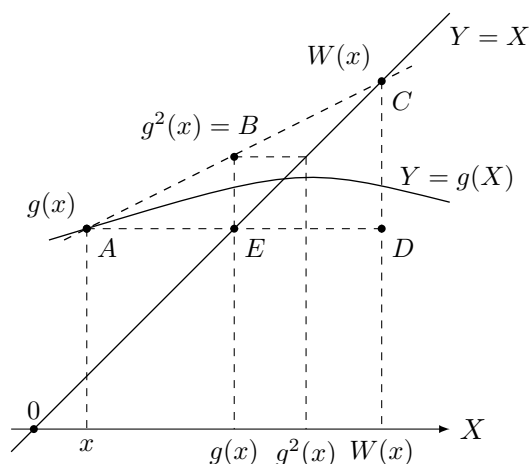
A fim de que o leitor possa fazer as suas próprias experiências, em Anexo é apresentado código para as iteradoras de Newton/Wegstein e respectivas auto composições.

2 O método de Wegstein

Dada uma função iteradora g , definida num domínio $D \subset \mathbb{R}$, e continuamente diferenciável até uma ordem conveniente, comecemos por deduzir expressões para a função iteradora de Wegstein correspondente.

Na figura a seguir é mostrada a geometria envolvida. A notação $g^2(x)$ refere-se à 2-auto composição de g , isto é, à função composta $g^2(x) = g(g(x))$. Em geral a j -auto composição de uma função g , será denotada por $g^j(x) = g \circ g \circ \dots \circ g$ ($j \geq 2$ vezes).

A função iteradora de Wegstein aplica o ponto x no ponto $W(x)$. Dado que o declive do segmento de recta que une os pontos $A = (x, g(x))$ e $B = (g(x), g^2(x))$ figurados é



$$m(x) = \frac{g^2(x) - g(x)}{g(x) - x}, \quad \text{onde } g(x) \neq x, \quad (1)$$

o ponto C , localizado sobre a recta $Y = X$, de coordenadas $(W(x), W(x))$, obtém-se por extrapolação linear a partir dos pontos A e B . Atendendo à semelhança dos triângulos $\triangle ACD$ e $\triangle ABE$, resulta

$$m(x) = \frac{W(x) - g(x)}{W(x) - x}, \quad \text{onde } W(x) \neq x. \quad (2)$$

Assim,

$$(m(x) - 1)W(x) = m(x)x - g(x). \quad (3)$$

Admitindo que $m(x) \neq 1$, obtém-se

$$W(x) = \frac{1}{1 - m(x)}g(x) + \frac{m(x)}{m(x) - 1}x. \quad (4)$$

Fazendo

$$r(x) = \frac{m(x)}{1 - m(x)} \implies 1 - r(x) = \frac{1}{1 - m(x)}, \quad (5)$$

a expressão (4) pode escrever-se na forma

$$W(x) = (1 - r(x))g(x) + r(x)x . \quad (6)$$

No caso de $r(x)$ ser função constante, a expressão (6) mostra-nos que $W(x)$ resulta de uma combinação linear convexa dos pontos x e $g(x)$.

Proposição 2.1. *Seja z um ponto fixo hiperbólico de g , isto é, $g(z) = z$ e $g'(z) \neq 1$.*

(i) *A função ‘declive’ m definida em (1) pode prolongar-se por continuidade ao ponto fixo, isto é, a função*

$$m(x) = \begin{cases} \frac{g^2(x) - g(x)}{g(x) - x}, & \text{se } x \neq z \\ g'(z), & \text{se } x = z \end{cases}$$

é contínua em z .

(ii) *Um ponto fixo z de g é ponto fixo superatractor da função iteradora de Wegstein, ou seja,*

$$\begin{aligned} W(z) &= z \\ W'(z) &= 0 \\ W''(z) &= \frac{2m'(z) - g''(z)}{g'(z) - 1} . \end{aligned} \quad (7)$$

Note-se que em (7), o símbolo $m'(z)$ deve ser entendido como $m'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} (m(z+h) - m(z)) / h$.

Corolário 2.1. *Se*

$$m'(z) = \frac{1}{2} g''(z) \quad (8)$$

o método de Wegstein tem ordem de convergência 3 (pelo menos).

Demonstração. (i) A regra de l'Hôpital pode ser aplicada à expressão (1), obtendo-se

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow z} m(x) &= \lim_{x \rightarrow z} \frac{g'(g(x))g'(x) - g'(x)}{g'(x) - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow z} \frac{(g'(g(x)) - 1)g'(x)}{g'(x) - 1} = g'(z) . \end{aligned}$$

(ii) De (3), e atendendo a que $g(z) = z$, $m(z) = g'(z)$, vem

$$(g'(z) - 1)W(z) = g'(z)z - z = (g'(z) - 1)z .$$

Como $g'(z) \neq 1$, resulta que $W(z) = z$, isto é, z é ponto fixo da função W . A partir da igualdade (3), mediante derivação sucessiva resulta

$$m'(x) W(x) + (m(x) - 1) W'(x) = m'(x) x + m(x) - g'(x) \quad (9)$$

e

$$\begin{aligned} m''(x) W(x) + 2 m'(x) W'(x) + (m(x) - 1) m''(x) \\ = m''(x) + 2 m'(x) - g''(x) . \end{aligned} \quad (10)$$

Dado que $g(z) = z$ e $m(z) = g'(z)$, de (9) obtém-se

$$m'(z) z + (g'(z) - 1) W'(z) = m'(z) z .$$

Como por hipótese, $g'(z) \neq 1$, é válida a segunda igualdade em (7). De (10), para $x = z$, vem

$$m''(z) z + (g'(z) - 1) w''(z) = m''(z) z + 2 m'(z) - g''(z),$$

isto é,

$$(g'(z) - 1) w''(z) = 2 m'(z) - g''(z),$$

sendo portanto válida a terceira igualdade em (7).

O Corolário deve-se ao facto de na última igualdade em (7) se ter $W''(z) = 0$, pelo que o método é (pelo menos) de terceira ordem de convergência. \square

3 Iteradoras de Newton e de Wegstein como aproximantes de π

Adoptamos para equação modelo

$$f(x) = \tan\left(\frac{x}{4}\right) - 1 = 0 . \quad (11)$$

A função f possui obviamente um só zero (simples), $z = \pi$, no intervalo $I = [3, 4]$. A iteradora de Newton correspondente tem a forma

$$g(x) = x + 2 \left(1 + \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right) \quad (12)$$

donde,

$$g(\pi) = \pi \quad \text{e} \quad g'(\pi) = 0 .$$

Assumindo continuidade para as funções g e g' , é fácil concluir a partir das duas últimas igualdades que o método de Newton, se convergente, converge supralinearmente para π , ou seja, $\lim_{k \rightarrow \infty} |\pi - g(x_k)|/|\pi - x| = 0$, quando x suficientemente próximo de π . Levando em conta que a segunda derivada $g^{(2)}(\pi) = 1/2 \neq 0$, a convergência é de segunda ordem.

Pode mostrar-se que são válidas as condições do teorema do ponto fixo para a função g , no intervalo $I = [3, 4]$. Assim, o método de Newton converge quadraticamente para π , qualquer que seja o ponto inicial x_0 que se escolha no intervalo I para iniciar o processo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, \dots$. Uma vez que

$$m(x) = \frac{1 + \cos(u) - \sin(u)}{u(x) - x/2},$$

onde

$$u(x) = 1 + x/2 + \cos(x/2) - \sin(x/2),$$

resulta

$$\lim_{x \rightarrow \pi} m(x) = 0 = g'(\pi) \quad e \quad \lim_{x \rightarrow \pi} m'(x) = 1/4.$$

Assim, $m'(\pi) = 1/2 g''(\pi)$, isto é, é válida a igualdade (8). Por conseguinte, atendendo ao Corolário 2.1, o método de Wegstein é pelo menos de terceira ordem de convergência. Directamente, ou recorrendo a computação simbólica, como por exemplo a proporcionada pelo sistema *Mathematica* [12], pode concluir-se que $W'''(\pi) = -3/8 \neq 0$, pelo que o método de Wegstein associado à função (11) é de ordem cúbica de convergência. Tal significa que, neste caso, tanto a iteradora de Newton como a iteradora de Wegstein nos permitem construir processos iterativos que aproximam supralinearmente o número π , circunstância que nos habilita a estimar convenientemente o erro das respectivas iteradas, conforme se refere no Parágrafo 3.1.1 adiante.

3.1 Fórmulas aproximantes de π de ordem de convergência arbitrária

Tendo em conta a expressão (12) da função iteradora de Newton para a função f considerada, as fórmulas para a j -auto composição da função de Newton, $g^j(x) = g \circ g \circ \dots \circ g$ ($j \geq 2$ vezes), podem ser obtidas recursivamente por aplicação sucessiva de uma função muito simples, abaixo denotada por h . A função iteradora correspondente possui ordem de convergência $p = 2^j$, pelo que o conjunto de iteradoras g^j , para $j \geq 1$ representa funções aproximantes de π , com ordem tão elevada quanto se queira.

Denotando por u a função

$$u(x) = 1 + x/2 + \cos(x/2) - \sin(x/2), \quad (13)$$

a função iteradora de Newton escreve-se como

$$g(x) = 2u(x), \quad (14)$$

exprimindo o facto de que quando $g(x)$ é aproximante de π , então $u(x)$ é aproximante de $\pi/2$, e reciprocamente.

Atendendo a que

$$\begin{aligned} g^2(x) &= g(g(x)) = 2u(2u(x)) \\ g^3(x) &= g(g^2(x)) = 2u(2u(2u(x))), \end{aligned}$$

definindo uma função auxiliar h ,

$$h(x) = 2u(x), \quad (15)$$

resulta que a função iteradora composta g^j , pode ser obtida recursivamente uma vez definida a função h dada em (15).

Assumindo já em memória a função f , dada em (11), segue-se pseudocódigo para as funções u , em (13), e para a função auto composta associada g^j , com $j \geq 1$. No pseudocódigo a seguir, o símbolo $\tilde{x} \leftarrow x$ significa que o valor em memória x é atribuído à variável \tilde{x} .

Função u

Input:

x ;
 $prec$; (* precisão a adoptar na aritmética de computador *)

$\tilde{x} \leftarrow x$ (* x representado com precisão $prec$ *);
 $x_1 \leftarrow \tilde{x}/2$;

Output:

$$1 + x_1 + \cos(x_1) - \sin(x_1) .$$

Função g^j

Input:

x ;
 $prec$ (* precisão a adoptar na aritmética de computador *);
 j (* $j \geq 1$, ordem da auto composição de g *);

$\tilde{x} \leftarrow x$ (* \tilde{x} representa x com precisão $prec$ *);
 $x_0 \leftarrow \tilde{x}$ (* x_0 é valor inicial *);

Repetir j vezes:

$y \leftarrow 2u(x_0)$;
 $x_0 \leftarrow y$;

Output:

y .

A introdução da função h , dada em (15), representada pela variável y no pseudocódigo anterior, bem como o recurso a comandos recursivos como `Nest` do sistema *Mathematica*, em conjugação com programação dinâmica, permitem-nos calcular rapidamente expressões simbólicas de g^j , para j elevado, dentro das possibilidades de memória disponível. De outra forma, as expressões de g^j , calculadas directamente por auto composição a partir de (12), tornar-se-iam de tal modo complexas que o seu tempo de cálculo e ocupação de memória seriam proibitivos.

No Anexo 5.1 encontra-se código *Mathematica* para as funções g , g^j e W , W^j , traduzindo a recursividade que anteriormente descrevemos.

3.1.1 Fórmulas aproximantes de π pelo método de Newton

Passemos a ilustrar o processo recursivo descrito no Parágrafo 3.1, no caso particular da função g ser a função iteradora de Newton. Após $g(x) = 2u(x)$, a primeira função aproximante de Newton do número π , expressa em termos da função u dada em (13), é a seguinte:

$$\begin{aligned} g^2(x) &= 4 + x + 2 \cos(x/2) + 2 \cos(u(x)) - 2 \sin(x/2) - 2 \sin(u(x)) \\ &= 2 [1 + u(x) + \cos(u(x)) - \sin(u(x))] . \end{aligned} \quad (16)$$

Denotando por v a função

$$v(x) = 1 + u(x) + \cos(u(x)) - \sin(u(x)), \quad (17)$$

a composta de Newton g^3 pode escrever-se como

$$g^3(x) = 2 [1 + v(x) + \cos(v(x)) - \sin(v(x))] . \quad (18)$$

A função anterior é a mesma que se obtém auto compondo três vezes a função dada em (12), do que resulta explicitamente a seguinte fórmula aproximante de π :

$$\begin{aligned} g^3(x) &= 6 + x - 2 \sin(x/2) + 2 \cos(x/2) \\ &\quad + 2 \cos(x/2 - \sin(x/2) + \cos(x/2) + 1) \\ &\quad + 2 \cos(x/2 - \sin(x/2) + \cos(x/2) \\ &\quad + \cos(x/2 - \sin(x/2) + \cos(x/2) + 1) \\ &\quad - \sin(x/2 - \sin(x/2) + \cos(x/2) + 1) + 2) \\ &\quad - 2 \sin(x/2 - \sin(x/2) + \cos(x/2) + 1) \\ &\quad - 2 \sin(x/2 - \sin(x/2) + \cos(x/2) \\ &\quad + \cos(x/2 - \sin(x/2) + \cos(x/2) + 1) \\ &\quad - \sin(x/2 - \sin(x/2) + \cos(x/2) + 1) + 2) . \end{aligned}$$

Dada a complexidade da fórmula anterior e a sua potencial instabilidade numérica, ela não será usada directamente. Para obtenção de uma fórmula equivalente, será adoptado o esquema recursivo anteriormente descrito o qual, como se disse, será útil para calcular as funções auto compostas, g^j , para $j \geq 2$, algumas das quais são apresentadas a seguir.

Uma vez que as fórmulas associadas a $g^j(x)$ se destinam a aproximar $\pi \in [3, 4]$, em particular começaremos por utilizar o ponto inicial $x = 3$, registando os resultados numéricos que resultem de um pequeno número de iterações de $g^j(3)$.

Por exemplo, é mostrado na Tabela 1, o número α de dígitos decimais correctos do valor obtido mediante auto composição de cada uma das funções g^j , com $1 \leq j \leq 4$, e anotada a respectiva ordem de convergência na última coluna tabelada.

Denotando por w o valor da quarta iterada de g^j , $w = g_4^j(3)$, o número α pode ser calculado pela expressão $\alpha = 1 + \lfloor -\log_{10}(|g^j(w) - w|) \rfloor$, uma vez que sendo g^j função iteradora de convergência supralinear, é bem conhecido que o erro absoluto de w é (muito bem) estimado por $|g^j(w) - w|$. Na expressão de α anterior $\lfloor \dots \rfloor$ denota a função parte inteira superior.

Os cálculos foram efectuados começando por fixar a precisão do ponto inicial, $x = 3$, mediante a instrução `SetPrecision[3, 10^5]`. A precisão adoptada foi aqui fixada em 10^5 porquanto o número final calculado, $g_4^4(3)$, possui um número de casas decimais correctas dessa ordem de grandeza, pelo que não terá interesse considerar uma precisão menor do que a prefixada. Relativamente à precisão a adoptar no cálculo de sucessivas iteradoras auto compostas, o preço a pagar quanto ao tempo de execução é decisivo. Por exemplo, a Tabela 1 foi calculada em 3.9 seg, enquanto a Tabela 2 demorou 85.7 seg.

Os resultados numéricos, ao passarmos do ponto inicial $x = 3$ ao ponto $x = 3.14$, sugerem estabilidade das fórmulas utilizadas, uma vez efectuado um ajustamento apropriado da precisão de cálculo. Assim, tomando para valor inicial $x = 3.14$ e fazendo `SetPrecision[3.14, 10^6]`, mostra-se na segunda coluna da Tabela 2 o número de dígitos decimais correctos dos valores calculados. Uma vez que, tal como era de esperar, se observa um incremento do número de dígitos correctos calculados para as aproximações de π , por iteração de cada uma das funções g^j consideradas, concluímos que as fórmulas usadas para tais funções são estáveis para os valores iniciais usados.

O leitor poderá testar as funções iteradoras propostas escolhendo outros pontos iniciais no intervalo $[3, 4]$.

j	α	ordem
1	23	2
2	373	4
3	5 965	8
4	95 434	16

Tabela 1: α é o número de dígitos decimais correctos da quarta iterada $g_4^j(3)$.

j	α	ordem
1	54	2
2	870	4
3	13 926	8
4	222 822	16

Tabela 2: α é o número de dígitos decimais correctos da quarta iterada $g_4^j(3.14)$.

Mostra-se a seguir (parcialmente) o número $w = g_4^4(3.14)$ calculado aquando da Tabela 2, apresentando apenas os seus primeiros 20 dígitos iniciais e 20 dígitos finais (dos 222 822 dígitos correctos do respectivo valor aproximado de π):

$$w = 3.1415926535897932384 \dots 74986013697679794276 .$$

Uma vez que o sistema *Mathematica* nos dá o número π com precisão arbitrária, pode verificar-se que

$$\pi - w \simeq -2.8 \times 10^{-222\,822},$$

confirmando que o valor calculado por meio da função iteradora em causa possui, de facto, 222 822 dígitos correctos.

3.1.2 Fórmulas aproximantes de π pelo método de Wegstein

A função auxiliar u , dada em (13), $u(x) = 1 + x/2 + \cos(x/2) - \sin(x/2)$, é agora utilizada a fim de se obter uma versão numericamente estável da iteradora de Wegstein e respectivas auto compostas.

Efectuando simplificações das expressões que resultam das fórmulas (1) a (6), quando se considera a função f dada em (11), a função W respectiva pode escrever-se na forma

$$W(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad (19)$$

onde

j	α	ordem
1	39	3
2	1 066	9
3	28 790	27

Tabela 3: α é o número de dígitos decimais correctos da terceira iterada $W_3^j(3)$.

j	α	ordem
1	92	3
2	2 479	9
3	66 924	27

Tabela 4: α é o número de dígitos decimais correctos da terceira iterada $W_3^j(3.14)$.

$$p(x) = 4 + (x + 4) (u(x) - (1 + x/2)) - 2 \sin(x) + x (\sin(u(x)) - \cos(u(x)))$$

$$\text{e } q(x) = u(x) - (1 + x/2) + \sin(u(x)) - \cos(u(x)).$$

Códigos *Mathematica* para definir esta função, bem como para as funções compostas W^j que dela resultam, é dado no Anexo 5.2, pressupondo que os cálculos são efectuados fixando previamente uma certa precisão **prec**.

Na segunda coluna da Tabela 3 apresenta-se o número α de dígitos correctos obtidos, partindo de $x = 3$, sendo **prec** = 10^5 . Na Tabela 4 são mostrados os resultados para $x = 3.14$ e **prec** = 10^6 . Em ambos os casos não se efectuaram mais do que três iterações pois, caso contrário, seria necessário aumentar a precisão dos cálculos para **prec** > 10^6 , o que é inaceitável em termos do tempo de execução.

Quanto à função de Wegstein (19), inspecionando a segunda coluna das Tabelas 3 e 4, confirma-se que na passagem de W^j a W^{j+1} , para $1 \leq j \leq 3$, o número de dígitos correctos é aproximadamente multiplicado por $27 = 3^3$, dado que a iteradora W de base é de ordem 3 de convergência, conforme provado na Proposição 2.1. Há portanto melhoria dos resultados numéricos relativamente à iteradora de Newton, como se esperava.

4 Conclusões

Para responder à questão de saber se o método de Wegstein é vantajoso relativamente ao método de Newton, mostrámos que, de facto, o método de

Wegstein pode ser usado para melhorar os resultados do método de Newton aplicado à função $f(x) = \tan(x/4) - 1$, quando o objectivo consiste em obter valores aproximados de alta precisão do número π , mediante fórmulas estáveis das funções iteradoras de Newton/Wegstein auto compostas. O resultado teórico expresso na Proposição 2.1 reflecte-se nos resultados numéricos obtidos nos parágrafos 3.1.1 e 3.1.2, onde se confirma a convergência cúbica da função iteradora de Wegstein.

Evidentemente, poderíamos também considerar composições entre outras funções iteradoras g , e as correspondente iteradoras de Newton/Wegstein, e analisar as fórmulas aproximantes de π daí resultantes. Todavia, nesta nota, cingimo-nos apenas à auto composição de cada uma dessas duas funções iteradoras de base, por ser o processo mais óbvio de se obter funções iteradoras de ordem arbitrária. Além disso, no caso da função f adoptada, foi possível construir um processo recursivo para as nossas iteradoras auto compostas, tal como como descrito no Parágrafo 3.1 e seguintes.

5 Anexo (código *Mathematica*)

5.1 Para iteradoras de Newton

```
f[x_] := Tan[x/4] - 1;
u[x_] := u[x] = (xx = SetPrecision[x, prec]; x1 = xx/2;
  1 + x1 + Cos[x1] - Sin[x1]);
  (* iteradoras auto compostas: *)
g[j_, x_] := g[j, x] = (xx = SetPrecision[x, prec];
  Nest[2 u[#] &, xx, j]);

(* teste : *)
niter = 4;
prec = 10^5;
jmax = 4;
Timing[
  tab = Table[xx = SetPrecision[3, prec];
  v = Nest[g[k, #] &, xx, niter]; {k, Short[v, 0.6],
  1 + Floor[-Log10[Abs[g[k, v] - v]]]}, {k, 1, jmax}];
  Grid[tab, Frame -> All]]
```

5.2 Para iteradoras de Wegstein

```
(* iteradora de Wegstein *)
W[x_] := W[x] = Block[{xx, a, u, am, v, dif, p, q},
  xx = SetPrecision[x, prec];
  a = xx/2; am = 1 + a;
  u = am + Cos[a] - Sin[a];
```

```

v = u - am;
dif = Sin[u] - Cos[u];
p = 4 + (xx + 4) v - 2 Sin[xx] + xx dif; (* numerador *)
q = v + dif; (* denominador *)
p/q];
W[1, x_] := W[x]; (* iteradoras auto compostas *)
W[k_, x_] := W[k, x] = W[W[k - 1, x]];

```

Referências

- [1] A. Arman, “Acceleration algorithms for process design simulations”, Msc. Thesis, Oklahoma State University, 1986.
- [2] A. C. Aitken, “On Bernoulli’s numerical solution of algebraic equations”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, Vol. 46 (1925), pp. 289–305.
- [3] D. H. Bailey, “A short history of π formulas”, 2016. Disponível em <http://www.davidhbailey.com/dhbpapers/pi-history.pdf>
- [4] D. H. Bailey, “Finding new mathematical identities via numerical computations”, *ACM SIGNUM*, Vol. 33, No. 1 (1998), pp. 17–22.
- [5] D. H. Bailey, “The computation of π to 29,360,000 decimal digits using Borwein’s quartically convergent algorithm”, *Math. Comp.*, Vol. 50, No. 181 (1988), pp. 283–296.
- [6] J. M. Borwein, S. T. Chapman, “I prefer Pi: A brief history and anthology of articles in the American Mathematical Monthly”, *Amer. Math. Monthly*, Vol. 121, No. 1 (2015).
- [7] J. M. Borwein, “The life of Pi: from Archimedes to ENIAC and beyond”, (2012). Disponível em <http://www.cs.utsa.edu/~wagner/pi/LifeOfPi2.pdf>
- [8] J. M. Borwein, P. B. Borwein, “An explicit cubic iteration for π ”, *BIT*, Vol. 26 (1986), pp. 123–126.
- [9] F. C. Knopf, Modeling, *Analysis and Optimization of Process and Energy Systems*, John Wiley and Sons, New York, 2012.
- [10] C. H. Gutzler, “An iterative method of Wegstein for solving simultaneous nonlinear equations”, Msc. Thesis, Oregon State College, 1959. Disponível em <http://ir.library.oregonstate.edu/xmlui/bitstream/handle/1957/50411/GutzlerCharlesH1959.pdf?sequence=3>
- [11] J. H. Wegstein, “Accelerating convergence of iterative processes”, *Commun. ACM*, Vol. 1 (1958), pp. 9–13.
- [12] S. Wolfram, *The Mathematica Book*, Wolfram Media, fifth ed., 2003.