Problemas

Editor:
Jorge Nuno Silva

Notas sobre o Problema anterior e Problemas para meninas

Jorge Nuno Silva

Os leitores são convidados a enviar, para eventual publicação, soluções, comentários, propostas de problemas, etc. Essa correspondência deve ser enviada para a SPM, ao cuidado do editor desta secção. Há livros para sortear entre as soluções recebidas em cada número.

Relembremos o problema do número anterior.

Não julgue um número pelo aspecto!

Os programas doutorais contêm, em algumas universidades, exames de acesso, constituídos por problemas que, ao longo dos anos, vão criando belas colecções, que os estudantes usam para se prepararem. Isto sucede com UC Berkeley, de cujos *Preliminary examination (2016)*, retiramos a nossa proposta de hoje. Este era o primeiro de nove problemas propostos, de que os candidatos deviam resolver seis em três horas.

Mostre que o número

$$\int_4^9 \sqrt{-6+5\sqrt{-6+5\sqrt{-6+5\sqrt{-6+5\sqrt{x}}}}}\,dx$$

é racional.

Seja a função $f:[4,9]\to[2,3]$ definida por

$$f(x)=\sqrt{-6+5\sqrt{-6+5\sqrt{-6+5\sqrt{-6+5\sqrt{x}}}}}$$

É fácil ver que f admite inversa dada por

$$f^{-1}(y)=\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(y^2+6\right)\frac{1}{5}\right)^2+6\right)\frac{1}{5}\right)^2+6\right)\frac{1}{5}\right)^2+6\right)\frac{1}{5}\right)^2$$

que é um polinómio com coeficientes racionais. O integral dado é a área limitada pelo gráfico de f e as rectas verticais $x=4, x=9$ e o eixo das abcissas. A união desta região com a área limitada pelo mesmo gráfico, as rectas horizontais $y=2, y=3$ e o eixo das ordenadas é a diferença de dois rectângulos—um limitado pelas rectas $x=9, y=3$ e os eixos coordenados, o outro limitado pelas rectas $x=4, y=2$ e os eixos. Portanto, temos

$$\int_4^9 f(x)dx+\int_2^3 f^{-1}(y)dy=9\cdot 3-4\cdot 2=19$$

O segundo integral, sendo a função integranda um polinómio com coeficientes racionais, é um número racional, pelo que o primeiro também tem de ser racional.

O Professor Armando Machado, nosso leitor assíduo, foi sorteado, entre os que enviaram soluções para este problema, e receberá um livro de oferta. Parabéns ao feliz contemplado!

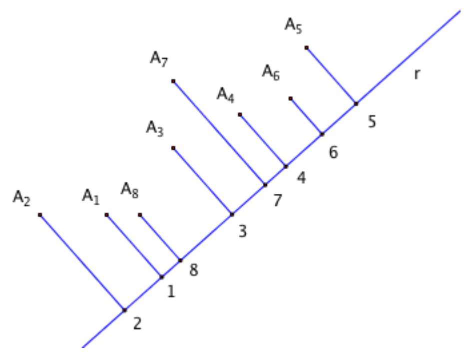
Problemas para meninas

Por esse mundo fora estão implementadas muitas competições matemáticas, algumas com longas tradições. As Olimpíadas—IMO—são as mais conhecidas, sendo que é a SPM a instituição promotora da sua versão portuguesa.

Hoje viajamos até à China, onde esta competição tem versões exclusivamente para *meninas*, se bem que também haja uma versão nacional global. Escolhemos duas questões para meninas (anos 2002 e 2003).

1. Seja n um inteiro positivo e D_n o conjunto dos divisores positivos de n, incluindo 1 e n. Prove que no máximo metade dos elementos de D_n tem 3 como algarismo das unidades.

2. Sejam $A_1, \ldots, A_8$ oito pontos quaisquer do plano. Seja $\overrightarrow{r}$ uma recta (orientada) qualquer. Consideremos os pés das perpendiculares tiradas pelos pontos $A_1, \ldots, A_8$ sobre $\overrightarrow{r}$.



Atendendo à orientação da recta, estes novos pontos definem uma permutação dos índices $1, \ldots, 8$. Por exemplo, na figura a permutação é

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 8 & 3 & 7 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Imaginemos que este processo se repete para todas as rectas do plano que não geram projecções ortogonais coincidentes para pontos diferentes. No máximo, quantas permutações diferentes de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ se podem obter?