

GENERALIZAÇÕES DA ETIQUETAGEM DE PAK-STANLEY

Rui Duarte

Centro de Investigação e Desenvolvimento em
Matemática e Aplicações (CIDMA) e
Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
Campus Universitário de Santiago
3810-193 Aveiro, Portugal
e-mail: rduarte@ua.pt

António Guedes de Oliveira

Centro de Matemática da Universidade do Porto (CMUP) e
Departamento de Matemática, Universidade do Porto
Rua do Campo Alegre, s/n
4169-007 Porto, Portugal
e-mail: agoliv@fc.up.pt

Resumo: Neste artigo pretendemos dar a conhecer ao leitor uma área que consideramos particularmente atraente, onde temos obtido alguns resultados que tentaremos também relatar. O ponto de partida é uma construção (a “etiquetagem de Pak-Stanley”), que associa um vetor a cada uma das regiões em que determinado conjunto de hiperplanos divide o espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Regiões vizinhas diferem (em 1) numa coordenada, crescendo ao afastar-se de uma determinada região, etiquetada com $(1, 1, \dots, 1)$. Há cerca de vinte anos, Pak e Stanley mostraram que, no caso de os hiperplanos formarem o “arranjo de Shi”, as etiquetas de Pak-Stanley formam um conjunto previamente estudado, o conjunto das “parking functions”, e que a etiquetagem é bijetiva, muito embora seja difícil definir a função inversa, isto é, obter a região a partir da etiqueta [3]. Esta construção tem uma extensão natural a outros arranjos. Recentemente, Mazin obteve uma caracterização muito geral dos conjuntos de etiquetas assim obtidos, que implica, em particular, o resultado de Pak e Stanley. Com base neste trabalho de Mazin, estudamos as etiquetagens de outro arranjos, o arranjo de Ish recentemente definido e um conjunto de arranjos por nós introduzido, que constitui uma classe naturalmente balizada, por um lado, pelo arranjo de Shi, e por outro, pelo arranjo de Ish. O nosso trabalho, em traços gerais, consistiu em descrever o conjunto das etiquetas respetivas e em mostrar que as etiquetagens são bijetivas, recorrendo a diferentes técnicas e resultados que aqui são explicitamente referidos. A exposição dessas técnicas e o relato desses resultados, alguns já “clássicos” da área e outros muito recentes, foram talvez a nossa razão mais forte para a escrita deste pequeno texto.

Abstract: In this survey we introduce the reader to an area that we find particularly attractive, where we have obtained some results that we will also try to report. The starting point is a construction (the “Pak-Stanley labeling”), which associates a vector to each of the regions in which a set of hyperplanes divides the Euclidean space \mathbb{R}^n . Neighboring regions differ (by 1) in a coordinate, growing as they move away from a given region, labeled with $(1, 1, \dots, 1)$. About twenty years ago, Pak and Stanley showed that, for the “Shi arrangement”, the Pak-Stanley labels form a previously studied set, the set of parking functions, and that the labeling is bijective, although the inverse function, from the labels to the corresponding regions, is not easy to define [3]. This construction has a natural extension to other hyperplane arrangements. Recently, Mazin obtained a very general characterization of the sets of labels thus obtained, which implies, in particular, the result of Pak and Stanley. Based on this work by Mazin, we studied the labeling of the recently defined Ish arrangement and of a family of hyperplane arrangements that we introduced, bounded by the Shi arrangement on the one hand and by the Ish arrangement on the other hand. In our work, we describe the set of labels of these hyperplane arrangements and show that the labels are bijective, using different techniques and results that are mentioned here. The exposure of these techniques and the reporting of these results, some already “classic” in the area and others very recent, were perhaps our strongest reason for writing this short survey.

palavras-chave: parking function; arranjo de hiperplanos; arranjo de hiperplanos de Shi; arranjo de hiperplanos de Ish.

keywords: parking function; hyperplane arrangement; Shi arrangement; Ish arrangement.

1 Os arranjos de hiperplanos

Um *arranjo de hiperplanos* \mathcal{A} é um conjunto finito de hiperplanos de \mathbb{R}^n , que são subespaços (afins) caracterizados por uma equação da forma $\langle A, X \rangle + b = 0$, onde $A \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}$. Cada hiperplano divide o espaço restante em dois semiespaços, caracterizados pelas inequações $\langle A, X \rangle + b > 0$ e $\langle A, X \rangle + b < 0$, respetivamente. A união dos hiperplanos de um arranjo divide o espaço em *regiões*, que são portanto as componentes conexas do complementar em \mathbb{R}^n da união dos hiperplanos.

Por exemplo, consideremos o seguinte arranjo, constituído por seis hiperplanos, a que correspondem 16 regiões.

$$\text{Shi}_3 = \{ \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x\}, \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y + 1\}, \\ \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x\}, \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z + 1\}, \\ \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = y\}, \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z + 1\} \}.$$

Uma vez que os hiperplanos são neste caso planos paralelos à reta de equações $x = y = z$, podemos representar os hiperplanos e as respetivas regiões através da sua interseção com o plano de equação $x + y + z = 0$, como na Figura 1, em baixo. Note-se que cada região está *etiquetada*¹ com um elemento de $[3]^3$.

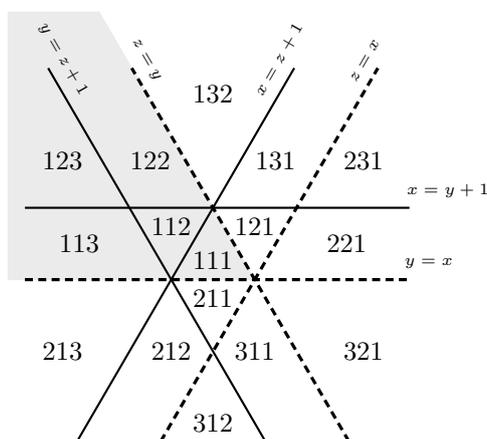


Figura 1: Etiquetagem de Pak-Stanley das regiões de Shi_3

Neste artigo debruçamo-nos essencialmente sobre este modo de etiquetar as regiões de diversos arranjos, incluindo sempre que possível a caracterização das etiquetas que se obtêm.

Os termos aqui utilizados, em inglês, são de um modo geral termos já fixados pelo uso por diversos autores. Como não há literatura portuguesa relevante nesta área, não temos nesta língua termos igualmente fixados pelo uso para os substituir. Podíamos simplesmente traduzi-los como nos parecesse melhor, mas temos consciência de que isso pode levar à introdução de

¹Definimos $[n] := [1, n]$ onde $[m, n] := \{i \in \mathbb{N} \mid m \leq i \leq n\}$, para $m, n \in \mathbb{N}$. Omitimos neste artigo livremente os parênteses e as vírgulas da designação habitual dos elementos de \mathbb{R}^n .

termos diferentes para o mesmo conceito — sendo isto, precisamente, o que se pretende evitar ao nomear um conceito ².

2 Arranjo de Coxeter

O primeiro arranjo cuja etiquetagem estudamos é Cox_n , o *arranjo de Coxeter* de dimensão n . Todos os outros arranjos aqui estudados são “deformações” deste [10], no sentido em que são constituídos por hiperplanos paralelos a estes. Além disso, todos os arranjos aqui estudados contêm este arranjo.

O arranjo Cox_n consiste na coleção dos seguintes hiperplanos de \mathbb{R}^n , para $1 \leq i < j \leq n$,

$$C_{ij} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_j = x_i\}.$$

É fácil entender aqui o que são as regiões: são os conjuntos da forma

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_{\sigma_1} > \dots > x_{\sigma_n}\},$$

onde $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ é uma permutação de $[n]$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. De facto, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ estão do mesmo lado do hiperplano de equação $x_j = x_i$ se e só se $(x_j - x_i)(y_j - y_i) > 0$. Estão portanto do mesmo lado de *todos* os hiperplanos de equação $x_j = x_i$ se e só se, sendo $x_{\sigma_1} > \dots > x_{\sigma_n}$ para algum $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, também $y_{\sigma_1} > \dots > y_{\sigma_n}$. Poderíamos pois etiquetar as $(n!)$ regiões de Cox_n com os elementos de \mathfrak{S}_n .

No caso particular em que $n = 3$, temos três planos contendo a reta de equação $x = y = z$; representando-os através das suas interseções com o plano de equação $x + y + z = 0$, como atrás, obtemos a Figura 2, onde colocamos em cada região R a permutação associada e a respetiva *etiqueta de Pak-Stanley*, $\lambda(R)$. Esta etiquetagem foi introduzida na literatura por Pak e Stanley [13] e pode ser obtida neste caso do seguinte modo (veremos depois o caso geral):

- Etiquetamos com $\lambda(R_0) = (1, \dots, 1)$ a região inicial R_0 , constituída pelos pontos $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tais que $x_1 > \dots > x_n$.
- Dadas duas regiões R e R' separadas por um único hiperplano de equação $x_i = x_j$, com $i < j$, estando R do mesmo lado que R_0 , então $\lambda(R') = \lambda(R) + \mathbf{e}_i$, onde, como é habitual, $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ tem todas as coordenadas nulas exceto a coordenada de ordem i , igual a 1.

²Note-se que mesmo um conceito da Teoria de Grafos tão básico e tão frequentemente utilizado como “spanning tree” tem em português traduções tão diferentes como “árvore geradora” e “árvore abrangente”.

Os arranjos que consideramos a seguir contêm estes hiperplanos, como dissemos. Portanto, as regiões destes arranjos são partes das regiões do arranjo de Coxeter. Mais precisamente, as regiões do arranjo de Coxeter constituem as “câmaras” dos arranjos considerados. A câmara $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > \dots > x_n\}$ (que etiquetamos com $(1, \dots, 1)$ como região de Cox_n), diz-se *câmara fundamental* do arranjo. Portanto, a câmara fundamental de Shi_3 é a que está sombreada na Figura 1.

3 Arranjos de Shi

O arranjo de hiperplanos representado na Figura 1 é um caso particular dos seguintes arranjos (contendo os hiperplanos de Cox_n), chamados *arranjos de Shi n -dimensionais* [11]:

$$\begin{aligned} \text{Shi}_n &= \text{Cox}_n \cup \{ \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i = x_j + 1\} \mid 1 \leq i < j \leq n \} \\ &= \{ \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i = x_j + \ell\} \mid 1 \leq i < j \leq n, \ell = 0, 1 \} . \end{aligned}$$

Etiquetamos os arranjos gerais que contêm o arranjo de Coxeter como subarranjo como segue:

- Seja R_0 a região da câmara fundamental mais próxima da reta de equação $x_1 = \dots = x_n$. Tomamos $\lambda(R_0) = (1, \dots, 1)$.
- Se duas regiões R e R' estão separadas por um único hiperplano de equação $x_j = x_i + \ell$, com $i < j$ e $\ell \geq 0$, estando R do mesmo lado que R_0 , então $\lambda(R') = \lambda(R) + \mathbf{e}_i$.
- Se duas regiões R e R' estão separadas por um único hiperplano de equação $x_i = x_j + \ell$, com $i < j$ e $\ell > 0$, estando R do mesmo lado que R_0 , então $\lambda(R') = \lambda(R) + \mathbf{e}_j$.

Note-se que λ associa à região R de cada câmara que está mais próxima da reta de equação $x_1 = \dots = x_n$ a etiqueta correspondente na etiquetagem do arranjo de Coxeter, e que esta etiqueta é *mínima* componente a componente de entre as regiões da mesma câmara. Por exemplo, a câmara de Shi_3 definida por $z > y > x$ tem duas regiões, etiquetadas 221 e 231. A condição “ $z > y > x$ ” define em Cox_3 uma única região, também etiquetada 221. Note-se que 221 é coordenada a coordenada menor ou igual a 231, $221 \preceq 231$.

4 “Parking functions”

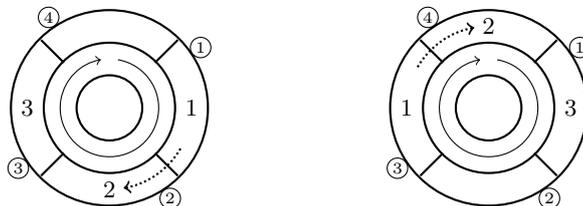
Chama-se “parking function” de comprimento n aos elementos \mathbf{a} de $[n]^n$ tais que se $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ é o vetor com as coordenadas de \mathbf{a} ordenadas por ordem crescente, então $b_i \leq i$ para todo o i entre 1 e n . O conjunto das etiquetas de Pak-Stanley das regiões dos arranjos de Shi_n é o conjunto das “parking functions”³ de comprimento n [13].

As parking functions são assim chamadas porque podem ser definidas do seguinte modo [15]: suponhamos que n condutores entram sucessivamente numa rua de sentido único com n lugares de estacionamento vagos. Cada condutor tem “um lugar preferido”, e conduz até esse lugar sem estacionar. Se o lugar estiver livre, estaciona; se não, continua a conduzir até encontrar um lugar livre, e estaciona; se não existir nenhum lugar livre, abandona a rua. Sendo $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ a lista das preferências dos condutores por ordem de chegada, pode provar-se facilmente que os condutores estacionam *todos* na rua se e só se \mathbf{a} é uma parking function.

Também é fácil contar as parking functions com o seguinte argumento [15]: considerem-se as $(n+1)^n$ funções $f : [n] \rightarrow [n+1]$ e o procedimento que consiste em “estacionar” n carros numa rotunda de sentido único com $n+1$ lugares de estacionamento, numerados de 1 a $n+1$, de modo a que, de novo, o condutor do i -ésimo carro tem como lugar preferido o lugar numerado $f(i)$, conduz até esse lugar sem estacionar e, se o lugar estiver livre, estaciona; se não, continua a conduzir (em círculo) até encontrar um lugar livre e estaciona então.

É claro que, neste caso, todos os condutores estacionam sempre, soando sempre um lugar. É claro também que $\mathbf{a} = (f(1), \dots, f(n))$ é uma “parking function” se e só se o lugar que fica livre é o que tem o número $n+1$. Finalmente, é fácil ver que o número de funções que “libertam” este lugar é igual ao número de funções que libertam outro lugar qualquer: de facto, se g é definido por $g(i) \equiv m + f(i) \pmod{(n+1)}$, por exemplo, então f liberta o lugar k se e só se g liberta o lugar ℓ , em que $\ell \equiv k + m \pmod{(n+1)}$. Por exemplo, $\mathbf{a} = 113$ é uma parking function e $\mathbf{c} = 331$ não. Note-se que $c_i \equiv a_i + 2 \pmod{4}$, $i = 1, 2, 3$. Os estacionamentos correspondentes estão representados em baixo:

³Uma vez que o uso deste conceito ainda não lhe fixou nenhum termo em português adequado, usaremos daqui em diante o termo “parking functions” como se de português se tratasse.



O número de parking functions de comprimento n é, portanto,

$$(n+1)^{n-1} = \frac{(n+1)^n}{n+1}.$$

Veremos na Secção 8 que este é também o número de regiões de Shi_n , e que esta etiquetagem é bijectiva.

5 G -parking functions

Por definição, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ é uma parking function se e só se, para todo $i \in [n]$,

$$|\{j \in [n] \mid a_j \leq i\}| \geq i,$$

ou, o que é equivalente, não há nenhum conjunto com $n-i$ elementos maiores que i .

Dito de outro modo, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ é uma parking function se e só se, para todo subconjunto não-vazio $I \subseteq [n]$, existe $i \in I$ tal que $a_i \leq n - |I|$. Seja G o digrafo simples completo com vértices em $[n]$, isto é, seja $G = (V, A)$ onde

$$A = \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq n\}.$$

Então, uma vez que $\{j \notin I \mid (i, j) \in A\} = [n] \setminus I$, \mathbf{a} é uma parking function se e só se é uma G -parking function [8] para o grafo atrás definido e conforme a definição que se segue.

Definição 5.1 ([10]). Seja, para $V = [n]$ com $n \in \mathbb{N}$, $G = (V, A)$ um multigrafo dirigido, finito, sem lacetes. Uma função $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ é uma G -parking function se, para todo subconjunto não-vazio $I \subseteq [n]$, existe um vértice $i \in I$ tal que o número de elementos $j \notin I$ tais que $(i, j) \in A$, contado com a respetiva multiplicidade, é maior ou igual a a_i .

Considere-se um arranjo de hiperplanos da forma

$$\mathcal{A} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i = x_j + a\} \mid a \in H_{ij}, 1 \leq i < j \leq n\}$$

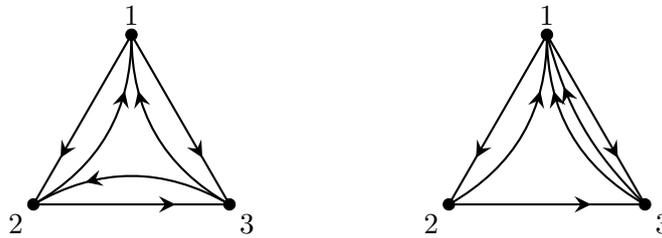


Figura 3: Multigrafos dirigidos associados a Shi_3 e Ish_3

onde, para cada par (i, j) com $1 \leq i < j \leq n$, H_{ij} é um conjunto finito de inteiros (possivelmente vazio). Suponhamos que, para cada par (i, j) , tomamos um arco orientado de i para j para cada $a \leq 0$ contido em H_{ij} e um arco orientado de j para i para cada $a > 0$ contido no mesmo conjunto.

Teorema 5.2 ([8], ad.). *Uma função $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ é uma etiqueta de uma região de \mathcal{A} se e só se é uma G -parking function.*

6 Arranjo de Ish

Nos casos que aqui consideramos, de deformações do arranjo de Coxeter que o contêm, $0 \in H_{ij}$ por definição. Portanto, para todo (i, j) com $1 \leq i < j \leq n$, $(i, j) \in A$, sendo A o conjunto de arcos do digrafo respetivo. Por exemplo, Armstrong introduziu recentemente um novo tipo de arranjo [1], a que chamou de Ish, assim definido

$$\text{Ish}_n = \text{Cox}_n \cup \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_j + i \mid 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Neste caso, além dos arcos da forma (i, j) , há em A , para cada $i > 1$, $i - 1$ arcos da forma $(i, 1)$ (V. Figura 3).

Representamos em baixo o arranjo de Ish_3 do modo como representamos o arranjo de Shi_3 , com as respetivas etiquetas de Pak-Stanley.

O número de regiões deste arranjo é igual ao número de regiões de Shi_3 , 16. Isto acontece em geral, isto é, o número de regiões de Ish_n é o número de regiões de Shi_n [1], $(n + 1)^{n-1}$, conforme veremos.

As etiquetas já não são as parking functions. Neste caso, em que $n = 3$, há duas diferenças: 312 é uma parking function mas não é uma etiqueta de Ish_3 , enquanto que 133 é uma etiqueta de Ish_3 mas não é uma parking function.

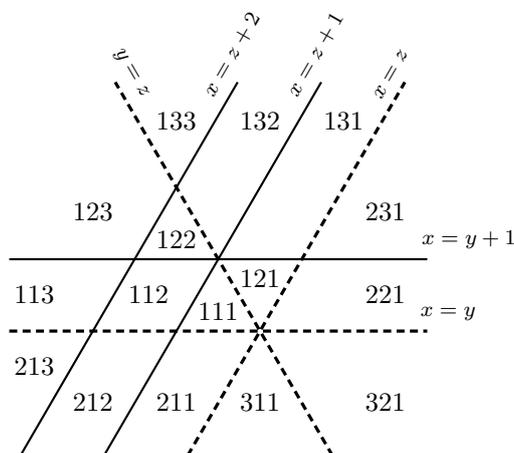


Figura 4: Etiquetagem de Pak-Stanley das regiões de Ish_3

A caracterização das etiquetas deste arranjo em geral requer uma nova definição.

Chamamos *centro* [4] (ou *0-centro* [5]) de $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n = (a_1, \dots, a_n)$ ao conjunto $Z(\mathbf{a})$ de índices da mais longa subsequência $(a_{i_1}, \dots, a_{i_{z(\mathbf{a})}})$ de \mathbf{a} que é menor ou igual coordenada a coordenada a $(z(\mathbf{a}), z(\mathbf{a}) - 1, \dots, 2, 1)$. Portanto, $z(\mathbf{a}) = |Z(\mathbf{a})|$, por definição ⁴. Chama-se *o comprimento do centro*. Por exemplo, se $a = (1, 1, 3)$ então $Z(a) = \{1, 2\}$ porque, sendo verdade que $a(1) \leq 2, a(2) \leq 1$, já não é verdade que $a(1) \leq 3, a(2) \leq 2, a(3) \leq 1$. Mais geralmente, temos, no caso em que $n = 3$ e na *câmara fundamental*, isto é, a parte de \mathbb{R}^n em que $x_1 > x_2 > \dots > x_n$ (V. Figura 4),

\mathbf{a}	$Z(\mathbf{a})$	$z(\mathbf{a})$
111	$\{1, 2, 3\}$	3
112	$\{1, 2\}$	2
122	$\{1\}$	1
113	$\{1, 2\}$	2
123	$\{1\}$	1

Observe-se que em todos estes casos, 1 pertence ao centro da etiqueta. Na verdade, pode provar-se que a caracterização é esta: $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ é uma etiqueta de Ish_n se e só se 1 pertence ao centro $Z(\mathbf{a})$ [4]. Em particular, pode ver-se que é o que se passa com a etiqueta 133 e que não se passa com 312,

⁴Note-se que $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ é um *elemento central* se e só se $Z(\mathbf{a}) = [n]$.

já que $Z(312) = \{2\}$. Esta caracterização é feita estudando as propriedades das G -parking functions respetivas.

O facto de os números de regiões coincidirem nos arranjos dos dois tipos, Shi e Ish, é uma consequência importante de os arranjos terem o mesmo *polinómio característico*, conceito que aqui não definimos. Outra consequência, facilmente verificável nas figuras, é que o número de *regiões relativamente limitadas* também é igual (4 em ambas as figuras).

7 Entre Shi e Ish

Entre outros arranjos que aqui abordamos, figuram os seguintes [5], que podem ser vistos como generalizando simultaneamente Shi_n e Ish_n . Consideremos, para $n \geq 3$, hiperplanos de \mathbb{R}^n dos seguintes três tipos, todos eles já mencionados. Sejam, para $1 \leq i < j \leq n$,

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i = x_j\}, \\ S_{ij} &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i = x_j + 1\}, \\ I_{ij} &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_j + i\}. \end{aligned}$$

Definimos então, para $2 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n^k &:= \{C_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\} \\ &\cup \{I_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n \wedge i < k\} \\ &\cup \{S_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n \wedge i \geq k\}. \end{aligned}$$

Note-se que $\text{Shi}_n = \mathcal{A}_n^2$ enquanto que $\text{Ish}_n = \mathcal{A}_n^n$.

Podemos de novo caracterizar as etiquetas de Pak-Stanley destes arranjos [5], a que chamámos *parking functions parciais*, estudando as propriedades das G -parking functions respetivas. Obtém-se que $\mathbf{a} = a_1 \cdots a_{k-1} a_k \cdots a_n \in \mathbb{N}^n$ é uma k -parking function parcial se e só se

$$\begin{cases} \underbrace{1 \cdots 1}_{k \text{ vezes}} a_k \cdots a_n \text{ é uma parking function} \\ a_1 \cdots a_{k-1} \overline{a_k \cdots a_n} \text{ é uma etiqueta de Ish} \end{cases}$$

onde $\overline{a_k \cdots a_n}$ é o vetor com as coordenadas de $a_k \cdots a_n$ ordenadas por ordem *decrecente*.

Note-se que as parking functions se podem caracterizar como segue:

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in [n]^n \text{ tal que existe uma permutação } \sigma \in \mathfrak{S}_n \text{ com}$$

$$a_{\sigma(i)} \leq i, \text{ para todo } i \in [n].$$

É fácil ver que as etiquetas de Ish podem ser caracterizadas como:

$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in [n]^n$ tal que existe uma permutação $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ com

$$\begin{cases} a_{\sigma(i)} \leq i, \text{ para todo } i \in [a_1]; \\ \sigma(i+1) < \sigma(i), \text{ para todo } i \in [a_1 - 1]. \end{cases}$$

No caso das parking functions parciais, propomos a seguinte caracterização [5]:

$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in [n]^n$ tal que existe uma permutação $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ com

$$\begin{cases} a_{\sigma(i)} \leq i \text{ para todo } i \in [a_1] \text{ e para todo } i \in [k, n] \text{ tal que } \sigma(i) \geq k; \\ \sigma(i+1) < \sigma(i) \text{ para todo } i \in [a_1 - 1] \text{ tal que } \sigma(i) < k. \end{cases}$$

Como veremos na secção seguinte, em todos estes arranjos o número de etiquetas é o número de regiões, $(n+1)^{n-1}$, e a etiquetagem é uma bijeção [5].

8 “Burning algorithm” de Dhar

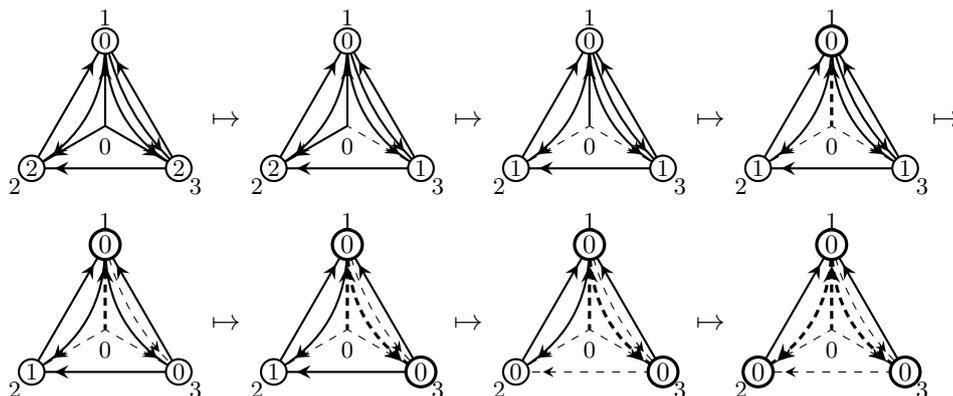
Dado o multigrafo dirigido $G = ([n], A)$, seja $\overline{G} = ([n], \overline{A})$ onde

$$\overline{A} = \{(0, i) \mid i \in [n]\} \cup \{(j, i) \mid (i, j) \in A\}.$$

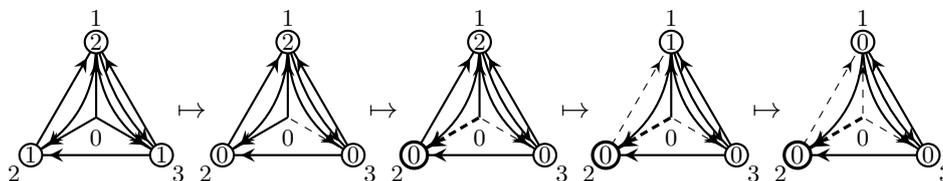
Seja G o grafo associado a Ish_3 . Em baixo representa-se \overline{G} , juntamente com $\mathbf{a} = (3, 1, 2)$, ao conjunto dos quais se aplica o algoritmo de Dhar [2]. Para entender este algoritmo, imaginemos que cada arco de \overline{G} representa um corredor de um edifício em chamas. O fogo começa em 0 e propaga-se corredor a corredor segundo as direções indicadas pelos arcos e começando pelos corredores que ligam a vértices de maior numeração. O fogo de um corredor pode ser detido se houver na sua extremidade um balde de areia, que assim se gasta. O mesmo corredor não torna a propagar o fogo. O número de baldes em cada vértice em cada momento está indicado nos círculos, sendo que os números de baldes de areia à partida são as coordenadas de \mathbf{a} diminuídas de 1.

Suponhamos que $\mathbf{a} = 133$. Temos então a situação representada em baixo. Pode ver-se que o processo termina com *todos* os vértices esgotados. A tracejado grosso figuram os arcos que conduzem o fogo a cada vértice. Por definição, se esquecermos a sua orientação, o grafo que estes arcos definem

é *acíclico* e, havendo n arcos para $n + 1$ vértices, é uma árvore (dirigida), e é geradora, portanto. Como digrafo, cada arco é orientado de uma única maneira, de 0 para fora.



Note-se que procedendo da mesma maneira com $\mathbf{a} = 312$ vemos que o processo termina (por falta de corredores que propaguem o fogo onde ele ocorre) sem “queimar” todos os vértices. Não se produz portanto uma árvore geradora.



Teorema 8.1 ([9, 5], ad.). *A função $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ é uma G -parking function se e só se o algoritmo atrás apresentado aplicado a \overline{G} produz uma árvore geradora. A função que associa a cada G -parking function a árvore determinada pelo algoritmo é uma bijeção.*

Corolário 8.2. *O número de etiquetas criadas pela etiquetagem de Pak-Stanley a partir de um digrafo G é o valor do determinante da matriz de Laplace de \overline{G} , suprimida a linha e a coluna correspondente ao vértice 0.*

Demonstração. O conjunto de etiquetas é, segundo Mazin [8], o conjunto das G -parking functions. Pelo teorema anterior, este número é o número de árvores geradoras de \overline{G} , que, pelo Teorema de Kirchhoff, é o determinante da matriz de Laplace de \overline{G} suprimida uma linha e uma coluna. \square

Podemos assim, por exemplo, verificar a nossa contagem de parking functions com determinado comprimento. Basta calcular o determinante de

$$M_n := \begin{pmatrix} n & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Por exemplo, o número de parking functions de comprimento 3 é

$$|M_3| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 16.$$

Notamos agora [5] que, suprimidas as linhas e as colunas correspondentes ao vértice 0, a matriz de Laplace de $\overline{G_n^k}$, onde G_n^k é o digrafo associado ao arranjo \mathcal{A}_n^k , se pode obter da do digrafo completo associado ao arranjo de Shi multiplicando-a à direita por uma matriz unitária. Por exemplo, as matrizes de Laplace correspondentes a Shi_3 e a Ish_3 são as seguintes:

$$\begin{array}{cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} & e & \begin{array}{cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

$$\text{Note-se que } \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daqui se conclui que

$$(n+1)^{n-1}$$

é o número de etiquetas da etiquetagem de Pak-Stanley de qualquer arranjo “entre Shi e Ish”, isto é, da forma \mathcal{A}_n^k , incluindo os arranjos de Shi e de Ish.

O cálculo do número de regiões, assim como o estudo da etiquetagem de outros arranjos do mesmo tipo, ficarão para outra ocasião.

Concluimos este pequeno artigo referindo um facto que conseguimos provar, e uma conjectura que, a ser provada, o generalizaria [6]. Mais precisamente, provámos que o número de parking functions de centro com determinado comprimento é igual ao de funções de Ish de centro com o mesmo comprimento. Verificámos computacionalmente, depois, que o mesmo se passa com as etiquetas dos arranjos “entre Shi e Ish” até oito elementos, inclusive, e conjecturámos que o mesmo se passa sempre.

Creemos que a prova não será simples, porque, para calcular o número de parking functions de comprimento n e centro de comprimento $k \leq n$, tivemos que proceder como segue:

Dizemos [7] que a função $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in [n]^n$ é uma “rook word” se $a_1 \leq \text{run}(\mathbf{a})$, onde $\text{run}(\mathbf{a})$ é o maior valor de k tal que $1, 2, \dots, k$ são coordenadas de \mathbf{a} . Mostrámos que são iguais:

1. O número de parking functions com centro de comprimento k ;
2. O número de parking functions com “run” de comprimento k ;
3. O número de “rook words” com “run” de comprimento k .

Finalmente, obtivemos o número de “rook words” com “run” de comprimento k , o que é relativamente fácil. Também relativamente fácil é ver [4] que esse número é o número de funções de Ish com centro de comprimento k .

Agradecimentos

Este trabalho é financiado pelo Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações (CIDMA) e pelo Centro de Matemática da Universidade do Porto (CMUP), através da FCT - Fundação para a Ciência e a Tecnologia, com as referências UIDB/04106/2020 e UIDB/00144/2020.

Referências

- [1] D. Armstrong, Hyperplane arrangements and diagonal harmonics, *J. Comb.* **4** (2013) pp. 157–190. URL: <https://doi.org/10.4310/JOC.2013.v4.n2.a2>.
- [2] D. Dhar, Theoretical studies of self-organized criticality, *Phys. A* **369** (2006) pp. 29–70. URL: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2006.04.004>.
- [3] R. Duarte, A. Guedes de Oliveira, The braid and the Shi arrangements and the Pak-Stanley labelling, *European J. Combin.* **50** (2015) pp. 72–86. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2015.03.017>.
- [4] R. Duarte, A. Guedes de Oliveira, Between Shi and Ish, *Discrete Math.* **341**(2) (2018) pp. 388–399. URL: <https://doi.org/10.1016/j.disc.2017.09.006>.
- [5] R. Duarte, A. Guedes de Oliveira, Partial parking functions, *Discrete Math.* **342**(2) (2019) pp. 562–571. URL: <https://doi.org/10.1016/j.disc.2018.10.032>.

- [6] R. Duarte, A. Guedes de Oliveira, The number of parking functions with center of a given length, *Adv. in Appl. Math.*, **107** (2019) pp. 125–143. URL: <https://doi.org/10.1016/j.aam.2019.02.004>.
- [7] E. Leven, B. Rhoades, A. T. Wilson. Bijections for the Shi and Ish arrangements *European J. Combin.* **39** (2014) pp. 1–23. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2013.12.001>.
- [8] M. Mazin, Multigraph Hyperplane Arrangements and Parking Functions. *Ann. Comb.* **21** (2017) pp. 653–661. URL: <https://doi.org/10.1007/s00026-017-0368-7>.
- [9] D. Perkinson, Q. Yang and K. Yu, G -parking functions and tree inversions, *Combinatorica* **37** (2017) pp. 269–282. URL: <https://doi.org/10.1007/s00493-015-3191-y>.
- [10] A. Postnikov, B. Shapiro, Trees, parking functions, syzygies, and deformations of monomial ideals, *Trans. Amer. Math. Soc.* **356** (2004) pp. 3109–3142. URL: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-04-03547-0>.
- [11] J.-Y. Shi. *The Kazhdan-Lusztig Cells in Certain Affine Weyl Groups, Lecture Notes in Math.* **1179** (1986) Springer-Verlag Berlin Heidelberg. URL: <https://doi.org/10.1007/BFb0074968>.
- [12] R. Stanley, *Enumerative Combinatorics* Vol. 1, Second edition, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **49** (2012) Cambridge University Press. URL: <https://doi.org/10.1017/CB09781139058520>.
- [13] R. Stanley, Hyperplane Arrangements, Parking Functions and Tree Inversions, in *Mathematical Essays in Honor of Gian-Carlo Rota* (B. Sagan and R. Stanley, eds.), Progress in Math. **161** (1998) Birkhäuser pp. 359–375. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4108-9_19.
- [14] R. P. Stanley, An Introduction to Hyperplane Arrangements, in: *Geometric Combinatorics* (E. Miller, V. Reiner and B. Sturmfels, eds.), IAS/Park City Mathematics Series **13** (2007) A.M.S. pp. 389–496. URL: <https://doi.org/10.1090/pcms/013>.
- [15] C. Yan, Parking Functions, in *Handbook of Enumerative Combinatorics*, M. Bóna (ed.), Discrete Math. and Its Appl., CRC Press, Boca Raton-London-New York (2015) pp. 589–678. URL: <https://doi.org/10.1201/b18255>.