

LIMITES DE SUCESSÕES DE TRIÂNGULOS PEDAIS

Rodrigo Pereira

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Rua do Campo Alegre, s/n
4169-007 Porto, Portugal
e-mail: rodrigo.asp98@outlook.com

Este artigo foi escrito no âmbito da edição de 2019-20 do Programa Novos Talentos em Matemática, da Fundação Calouste Gulbenkian, com a orientação de Maria Carvalho (DM-FCUP, email: mpcarval@fc.up.pt).

Resumo: Neste trabalho, generalizamos um teorema de A. Manning [8] sobre a diferenciabilidade do ponto limite de sucessões de triângulos pedais associados a famílias parametrizadas de triângulos.

Abstract: In this paper, we generalize a theorem by A. Manning [8] on the differentiability of the curves of limit points of sequences of pedal triangles assigned to a parameterized family of triangles.

palavras-chave: Triângulo pedal, dinâmica simbólica, curvas diferenciáveis.

keywords: Pedal triangle, symbolic dynamics, differentiable curves.

1 Introdução

Uma das construções geométricas elementares mais conhecidas com triângulos consiste em traçar as suas alturas, intersecá-las com as respetivas bases e, de seguida, unir os pontos de intersecção, obtendo aquilo a que se chama o *pedal* do triângulo inicial. Na maioria dos casos, o pedal é um triângulo, e portanto podemos repetir a construção anterior, gerando-se desse modo uma sucessão de triângulos que herdaram algumas das propriedades do triângulo original. Em [1], J. Alexander mostrou que, se estivermos apenas interessados nos ângulos dos sucessivos pedais (ou seja, na sua forma), podemos transferir o estudo destas órbitas para o da dinâmica da operação de deslocamento à esquerda (conhecida como *shift*) a atuar nas palavras infinitas de 4 símbolos, permitindo assim retirar conclusões acerca da diversidade de órbitas possíveis, da sua variação com o triângulo inicial e da sua distribuição no espaço de triângulos. O leitor interessado nesta abordagem encontra mais informação em [6, 7, 11].

Quando bem definida, a sucessão de triângulos pedais associada a um triângulo fixado converge, no plano, para um ponto. Onde se situa este ponto limite, e que modo essa posição depende do triângulo inicial? A. Manning fornece em [8] uma fórmula para este ponto limite que, juntamente com as propriedades geométricas da configuração de triângulos pedais, nos permite obter explicitamente um conjunto de curvas cujos traços são feitos de pontos-limite de sucessões de triângulos pedais. Estes pedais são gerados por uma família de triângulos que é definida perturbando-se um triângulo previamente fixado à medida que, mantendo um lado inalterado, deixamos um dos seus vértices percorrer a sua circunferência circunscrita. A análise destas curvas, e a aplicação de um resultado de Manning sobre a diferenciabilidade do ponto limite relativamente a um parâmetro, permitiu-nos provar uma extensão do Teorema 2 de [8].

O texto está organizado do seguinte modo. Começamos por recordar a construção do triângulo pedal associado a um triângulo fixado, listando algumas das propriedades desta construção e da figura que assim se gera. Depois consideramos a sucessão de triângulos obtida iterando essa construção, sempre que isso seja possível, lembrando que, com ferramentas de dinâmica simbólica, é possível descrever completamente, a menos de semelhança, as órbitas desta dinâmica [1, 6]. Depois dessa breve apresentação, estudamos o comportamento e a posição do ponto limite dessas sucessões, e como ele varia quando se perturba o triângulo inicial. Finalmente, apresentamos o Teorema 2 de [8] e a generalização que anunciamos.

2 Triângulos pedais

Considere-se um triângulo $\triangle ABC$ e fixemos um ponto P no plano. Traçando as ortogonais aos lados do triângulo que passam por P , e de seguida unindo as respetivas interseções, obtemos um novo triângulo (que pode ser degenerado). A figura seguinte ilustra esta construção.

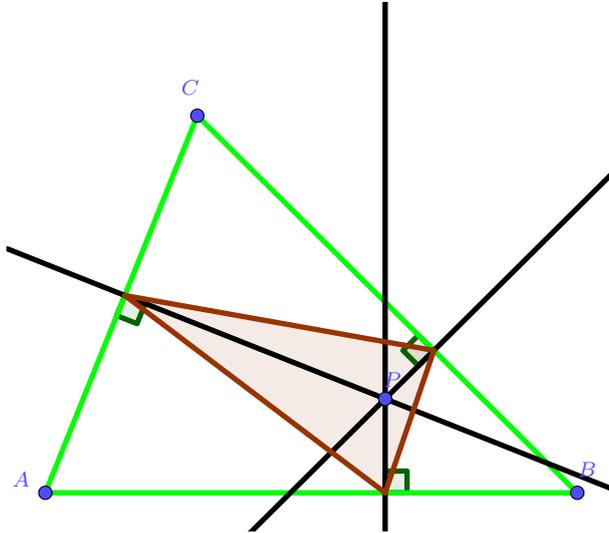


Figura 1: Triângulo pedal (a castanho) de $\triangle ABC$

Quando P está na circunferência circunscrita do triângulo o triângulo obtido degenera num segmento mas, quando tal não acontece, podemos repetir a construção anterior usando este novo triângulo e o ponto P , como mostramos no exemplo seguinte.

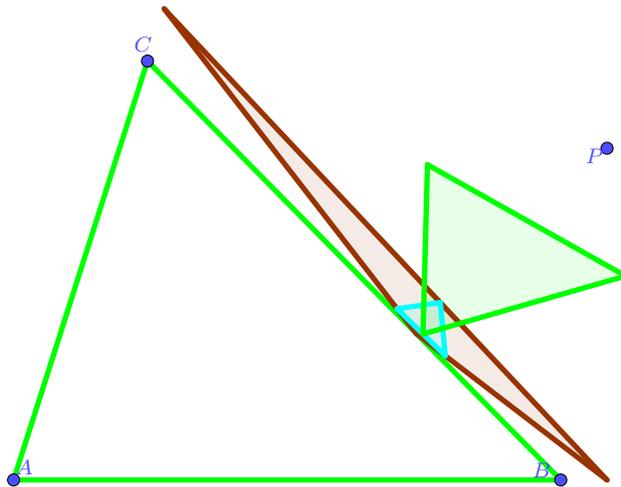


Figura 2: Iteração com P no exterior do triângulo original. A ordem de cores é verde, castanho, azul, verde.

Em [3] provou-se a seguinte propriedade desta sucessão.

Teorema 1 [3] *O terceiro triângulo obtido na iteração é semelhante ao triângulo original.*

Um enunciado idêntico (provado em [10]) é válido para polígonos de $n \geq 3$ lados: o termo de ordem n da sucessão de polígonos, obtida por iteração das projeções a partir de um ponto fixado, é semelhante ao polígono inicial.

2.1 Triângulo pedal desde o ortocentro

Dado um triângulo $\triangle ABC$, considerem-se as projeções ortogonais de cada vértice no respetivo lado oposto. Unindo-as, obtemos um triângulo (que pode ser degenerado) que se designa *o pedal de $\triangle ABC$* ¹. Vejamos alguns exemplos.

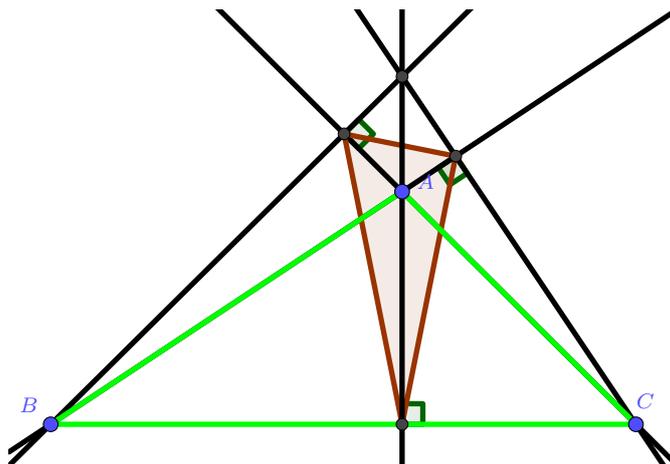


Figura 3: Pedal de um triângulo obtusângulo.

De notar que a construção do triângulo pedal é um caso particular da construção anterior: o pedal é justamente o triângulo obtido quando se tomam as projeções ortogonais do **ortocentro** nos lados do triângulo. Em [9] (veja-se também [2]) pode ler-se uma demonstração de que o triângulo pedal é a solução do problema de Fagnano: de todos os triângulos $\triangle XYZ$ inscritos num triângulo $\triangle ABC$ acutângulo (com $X \in BC$, $Y \in AC$, $Z \in AB$), o que tem menor perímetro é precisamente o pedal de $\triangle ABC$.

¹A terminologia usual para o que neste texto designamos como «triângulo pedal» é «triângulo órtico» ou «das alturas»

2.2 Ângulos e lados do pedal

Sejam $\triangle ABC$ um triângulo de lados a, b, c e ângulos A, B, C e designemos por $\triangle A'B'C'$ o pedal de $\triangle ABC$. Se $\triangle ABC$ for acutângulo, tem-se [4]:

$$\begin{aligned} a' &= a \cos(A) & b' &= b \cos(B) & c' &= c \cos(C) \\ A' &= 180 - 2A & B' &= 180 - 2B & C' &= 180 - 2C. \end{aligned}$$

Caso A seja obtuso:

$$\begin{aligned} a' &= -a \cos(A) & b' &= b \cos(B) & c' &= c \cos(C) \\ A' &= 2A - 180 & B' &= 2B & C' &= 2C. \end{aligned}$$

Fórmulas análogas são válidas quando B ou C são obtusos.

3 Sucessão pedal

Se o triângulo pedal não for degenerado, o que acontece se partirmos de um triângulo não retângulo, podemos repetir a construção anterior, usando agora o triângulo pedal. Podemos entender esta nova sucessão como uma variação da anterior: enquanto na primeira construção iterávamos o processo mantendo o ponto P fixo, agora o ponto de onde a projeção é feita - o ortocentro - também varia ao longo da sucessão. Por exemplo:

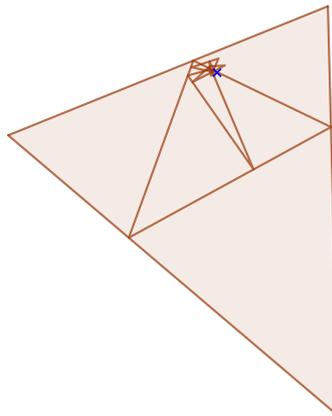


Figura 4: Exemplo de sucessão pedal com o ponto limite assinalado.

3.1 Dinâmica simbólica da sucessão pedal

O exemplo anterior sugere que esta nova construção introduz uma maior complexidade no sistema dinâmico. Recordemos como se provou isso mesmo em [1].

3.1.1 Codificação

Denotemos por \mathcal{T} o espaço de triângulos no plano, e associemos a cada triângulo $T \in \mathcal{T}$ (não retângulo), com ângulos A, B, C , a sua “palavra de obtusidade”, definida do seguinte modo:

- O primeiro símbolo da palavra é 0 se T for acutângulo.
- O primeiro símbolo da palavra é 1, 2 ou 3 se, A, B ou C , respectivamente, forem obtusos.

Uma vez que esta codificação só atenta aos ângulos de T , ou seja, à forma do triângulo, podemos simplificar esta abordagem descrevendo cada triângulo por coordenadas baricêntricas determinadas pelos seus ângulos.

3.1.2 Coordenadas baricêntricas

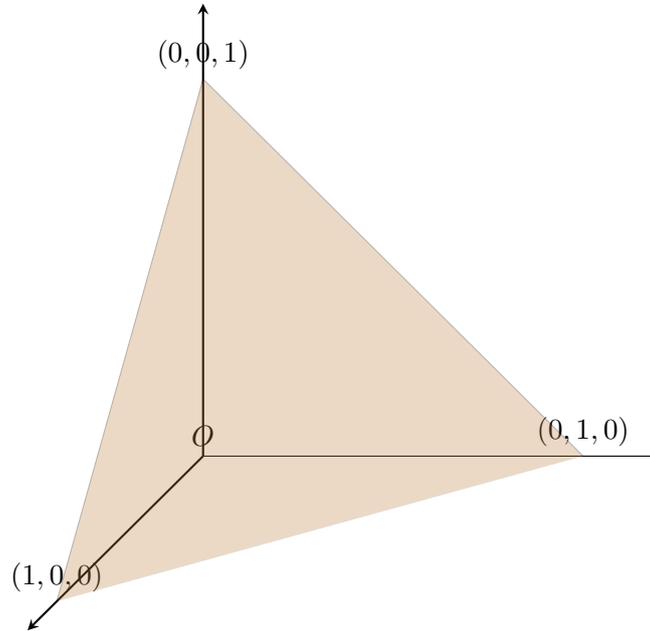
A cada $T = \triangle ABC \in \mathcal{T}$ associamos o terno

$$(x, y, z) = \left(\frac{\angle A}{180^\circ}, \frac{\angle B}{180^\circ}, \frac{\angle C}{180^\circ} \right) \in \mathbb{R}^3$$

identificando deste modo \mathcal{T} com o conjunto

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1 \wedge x, y, z \geq 0\}.$$

O conjunto \mathcal{M} é o triângulo em \mathbb{R}^3 de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Note-se ainda que \mathcal{T} inclui triângulos degenerados, de dois tipos diferentes - com dois ângulos de amplitude 0° (e um de amplitude 180°) cujos vértices são colineares e distintos; ou com um ângulo de amplitude 0° e dois vértices coincidentes - que moram no seu bordo. A figura seguinte ilustra esta informação.

Figura 5: Conjunto \mathcal{M}

O conjunto \mathcal{M} admite uma partição em quatro subconjuntos $(\mathcal{M}_i)_{i \in \{0,1,2,3\}}$ de acordo com as características do triângulo inicial T :

- T acutângulo $\leftrightarrow \mathcal{M}_0$.
- T obtuso em A , B ou C $\leftrightarrow \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ (respetivamente).

Por convenção, os segmentos no bordo dos subconjuntos \mathcal{M}_i da partição de \mathcal{M}_i (onde se localizam os triângulos retângulos) pertencem a \mathcal{M}_0 .

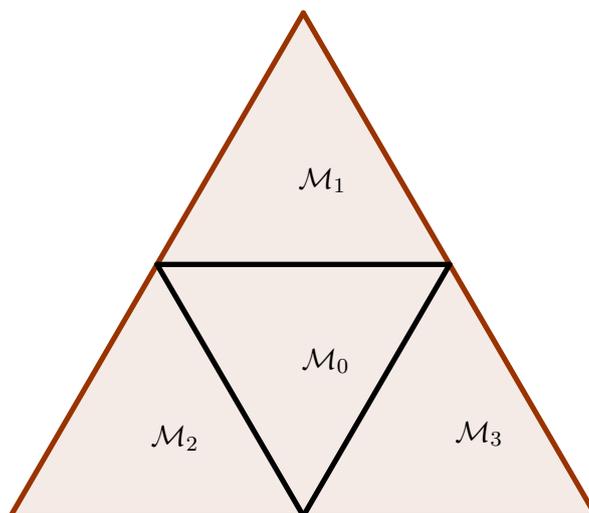


Figura 6: Partição do conjunto \mathcal{M} .

Nesta descrição, a aplicação pedal \mathcal{P} , que a T associa o seu pedal, tem a seguinte interpretação geométrica:

- $T \in \mathcal{M}_0 \Rightarrow \mathcal{P}(T)$ é a imagem de T pela homotetia \mathcal{H}_0 de razão -2 com centro em $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
- $T \in \mathcal{M}_i, i = 1, 2, 3 \Rightarrow \mathcal{P}(T)$ é a imagem de T pela homotetia \mathcal{H}_i de razão 2 com centro em $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, respetivamente.

Observe-se que o n -ésimo dígito da palavra de obtusidade de T corresponde ao índice da região de \mathcal{M} onde $\mathcal{P}^{n-1}(T)$ se encontra; ou seja, fornece o itinerário na partição $(\mathcal{M}_i)_{i=0,1,2,3}$ da órbita por P de cada triângulo T .

3.1.3 Representação binária das coordenadas baricêntricas x', y', z' do pedal

Dado um triângulo T (não retângulo) com ângulos A, B e C , o seu pedal (não degenerado) descreve-se em coordenadas baricêntricas do seguinte modo (onde $*' = 1 - *$).

Caso 1: $\triangle ABC$ acutângulo.

$$\begin{aligned} x &= \frac{\angle A}{180\check{z}} = (0.0 a_2 a_3 a_4 \cdots)_2 \Rightarrow x' = 1 - 2x = (0.a'_2 a'_3 a'_4 \cdots)_2 \\ y &= \frac{\angle B}{180\check{z}} = (0.0 b_2 b_3 b_4 \cdots)_2 \Rightarrow y' = 1 - 2y = (0.b'_2 b'_3 b'_4 \cdots)_2 \\ z &= \frac{\angle C}{180\check{z}} = (0.0 c_2 c_3 c_4 \cdots)_2 \Rightarrow z' = 1 - 2z = (0.c'_2 c'_3 c'_4 \cdots)_2. \end{aligned}$$

Caso 2: A obtuso.

$$\begin{aligned} x &= \frac{\angle A}{180\check{z}} = (0.1 a_2 a_3 a_4 \cdots)_2 \Rightarrow x' = 2x - 1 = (0.a_2 a_3 a_4 \cdots)_2 \\ y &= \frac{\angle B}{180\check{z}} = (0.0 b_2 b_3 b_4 \cdots)_2 \Rightarrow y' = 2y = (0.b_2 b_3 b_4 \cdots)_2 \\ z &= \frac{\angle C}{180\check{z}} = (0.0 c_2 c_3 c_4 \cdots)_2 \Rightarrow z' = 2z = (0.c_2 c_3 c_4 \cdots)_2 \end{aligned}$$

Obtemos fórmulas análogas caso B ou C seja obtuso. Estas fórmulas permitem a criação de um algoritmo (descrito em [1]) para a passagem entre o triângulo e a sua palavra de obtusidade (e vice-versa).

3.1.4 Aplicação pedal e o shift em 4 símbolos: Teorema de Alexander

Sejam \mathcal{T} o espaço dos triângulos no plano e $\mathcal{P} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ a aplicação que associa a cada triângulo o seu pedal. Consideremos o espaço \sum_4^+ das palavras $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que $a_n \in \{0, 1, 2, 3\}$ para todo o natural n e a transformação shift definida por

$$\begin{aligned} \sigma : \sum_4^+ &\rightarrow \sum_4^+ \\ a_1 a_2 a_3 a_4 \cdots &\mapsto \cancel{a_1} a_2 a_3 a_4 \cdots . \end{aligned}$$

Temos assim definida uma aplicação $\mathcal{E} : \mathcal{T} \rightarrow \sum_4^+$ tal que o diagrama seguinte comuta.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{T} & \xrightarrow{\mathcal{P}} & \mathcal{T} \\
 \mathcal{E} \downarrow & & \downarrow \mathcal{E} \\
 \Sigma_4^+ & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_4^+
 \end{array}$$

E, excluindo o conjunto \mathcal{C} das palavras não admissíveis de Σ_4^+ , que surgem devido à ambiguidade da representação dos triângulos retângulos (que moram no bordo da partição $M_0 \cup M_1 \cup M_2 \cup M_3$),² o Teorema de Alexander [1] estabelece a existência de isomorfismos entre as diferentes descrições que apresentámos, nomeadamente:

- O espaço dos triângulos \mathcal{T} com a aplicação pedal \mathcal{P} .
- Um subespaço das palavras Σ_4^+ com a aplicação shift σ .
- O espaço de coordenadas baricêntricas \mathcal{M} com as homotetias \mathcal{H}_i , para $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

É agora fácil descrever muitas sucessões pedais, exibindo, em particular, sucessões periódicas ou sucessões pré-periódicas, pois basta encontrar elementos admissíveis de Σ_4^+ com estas características.

²Por exemplo, a palavra $0\bar{1}$ localiza-se no ponto médio da base de \mathcal{M} e portanto $10\bar{1}$ deveria estar a meio da base de \mathcal{M}_1 , no entanto, como os pontos desse segmento pertencem a \mathcal{M} , a palavra correpondente deverá ser $00\bar{1}$, pelo que $10\bar{1}$ é não admissível. Para uma descrição mais completa do conjunto \mathcal{C} , o leitor deverá consultar [1]

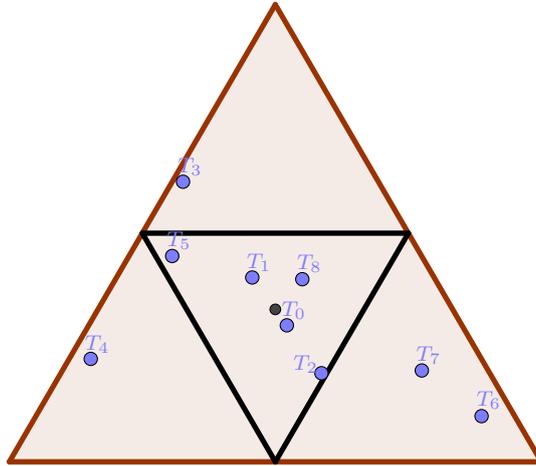


Figura 7: Exemplo da passagem de \mathcal{M} para Σ_4^+ . A palavra obtida é $000120330\dots$.

Podemos também localizar um ponto de \mathcal{M} a partir da palavra de obtusidade subdividindo cada um dos \mathcal{M}_i , como foi feito com \mathcal{M} , num processo limite que converge para o ponto que queremos encontrar.

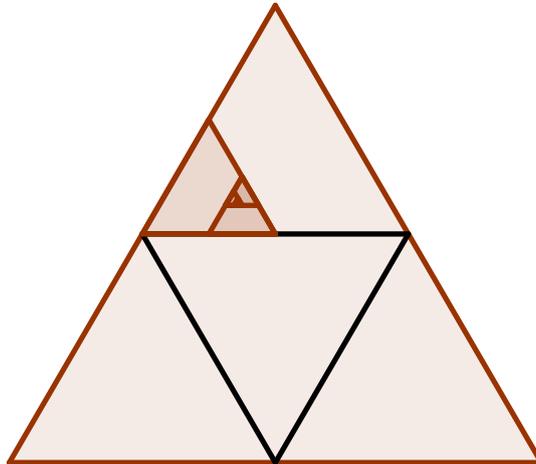


Figura 8: Exemplo da passagem de Σ_4^+ para \mathcal{M} com a palavra $\overline{123}$.

3.1.5 Topologia em \mathcal{M}

Considere-se em Σ_4^+ a seguinte distância entre dois elementos $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $b = (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$:

$$D(a, b) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k - b_k|}{4^k}.$$

Note-se que a série que define D converge e que se tem

$$D(a, b) < \frac{1}{4^n} \Rightarrow a_i = b_i, \forall i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow D(a, b) \leq \frac{1}{4^n}.$$

Transferindo para \mathcal{M} a topologia definida por esta métrica em Σ_4^+ através da aplicação \mathcal{E} , obtém-se

$$B\left(a, \frac{1}{4^n}\right) \subseteq M_{a_1, \dots, a_n} \subseteq \overline{B}\left(a, \frac{1}{4^n}\right)$$

onde $B(x, \delta)$ denota a bola para a métrica D de centro x e raio δ .

3.1.6 Sucessões especiais

Apliquemos as correspondências anteriores para descrevermos algumas sucessões especiais.

Triângulos acutângulos Se $\mathcal{P}^n(T) \in \mathcal{M}_0$ para todo o $n \in \mathbb{N}_0$, então $\mathcal{E}(T) = \bar{0}$. Há apenas um triângulo $T \in \mathcal{T}$ para o qual todos os triângulos da sucessão pedal são acutângulos: o triângulo equilátero, que é ponto fixo da dinâmica.

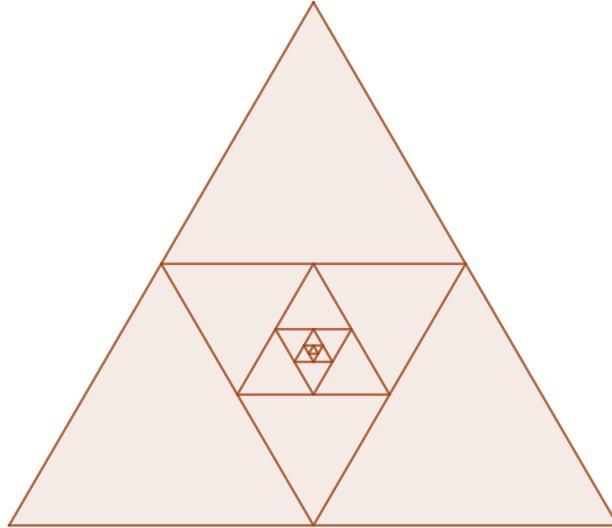


Figura 9: Sucessão pedal correspondente à palavra $\bar{0}$.

Triângulos obtusângulos Se $\mathcal{P}^n(T) \notin \mathcal{M}_0$ para todo o $n \in \mathbb{N}_0$, então $\mathcal{E}(T)$ é uma palavra na qual não aparece nenhum 0. Geometricamente, podemos representar este conjunto de triângulos apagando de \mathcal{M} o subconjunto $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{P}^{-n}(\mathcal{M}_0)$.

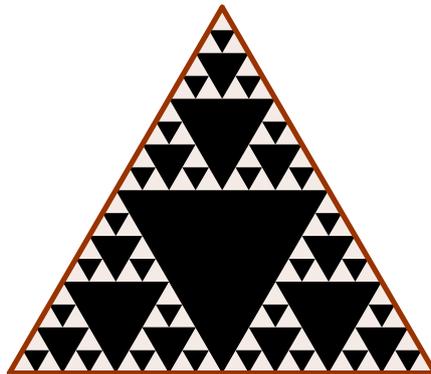


Figura 10: Espaço \mathcal{M} com (algumas) palavras que contêm algum 0 assinaladas a preto.

Triângulos isósceles O conjunto dos triângulos isósceles é

$$\mathcal{I} = \{(x, y, z) \in \mathcal{M} : x = y \vee y = z \vee x = z\}.$$

Geometricamente, estes triângulos localizam-se nas alturas do triângulo \mathcal{M} . Cada uma das alturas passa apenas por duas das quatro sub-divisões de \mathcal{M} , pelo que, na verdade, uma tal palavra é composta apenas por dois símbolos (0 e i , $i = 1, 2, 3$).

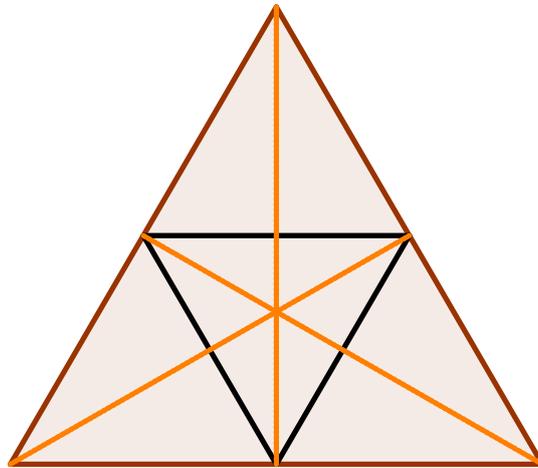


Figura 11: Espaço \mathcal{M} com o conjunto dos triângulos isósceles assinalado a laranja.

Um triângulo é pré-isósceles se algum dos seus iterados por \mathcal{P} for isósceles. Nesse caso, a sua palavra de obtusidade é, depois de um número finito de iterados, uma das descritas atrás. Podemos representá-los geometricamente em \mathcal{M} como

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}^{-n}(\mathcal{I}).$$

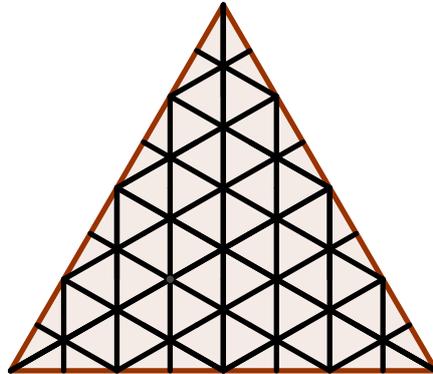


Figura 12: Espaço \mathcal{M} com (alguns) triângulos pré-isósceles assinalados a preto.

Exemplo 1: Sucessão de período 2 A palavra $\overline{01}$ corresponde a um triângulo isósceles semelhante ao seu segundo pedal, uma vez que por ação do shift

$$\overline{01} \mapsto \overline{10} \mapsto \overline{01}$$

ou, equivalentemente,

$$\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right) \times 180\checkmark \mapsto \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) \times 180\checkmark \mapsto \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right) \times 180\checkmark.$$

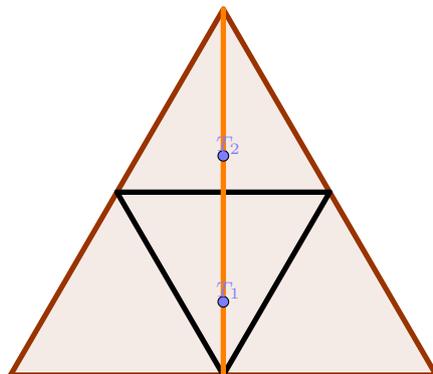


Figura 13: As duas iterações da sucessão do Exemplo 1 assinaladas numa das alturas (a laranja) de \mathcal{M} .

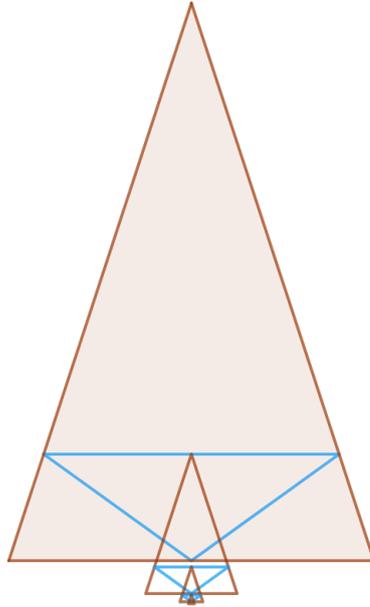


Figura 14: Sucessão pedal correspondente à palavra $\overline{01}$.

Exemplo 3: Sucessão de período 3 A palavra $\overline{130}$ corresponde a um triângulo obtusângulo semelhante ao seu terceiro pedal, pois tem-se

$$\overline{130} \mapsto \overline{301} \mapsto \overline{013} \mapsto \overline{130}.$$

Em coordenadas baricêntricas, esta ação corresponde a

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{9}, \frac{1}{9}, \frac{3}{9}\right) \times 180\checkmark &\mapsto \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{6}{9}\right) \times 180\checkmark \mapsto \left(\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{3}{9}\right) \times 180\checkmark \\ &\mapsto \left(\frac{5}{9}, \frac{1}{9}, \frac{3}{9}\right) \times 180\checkmark. \end{aligned}$$

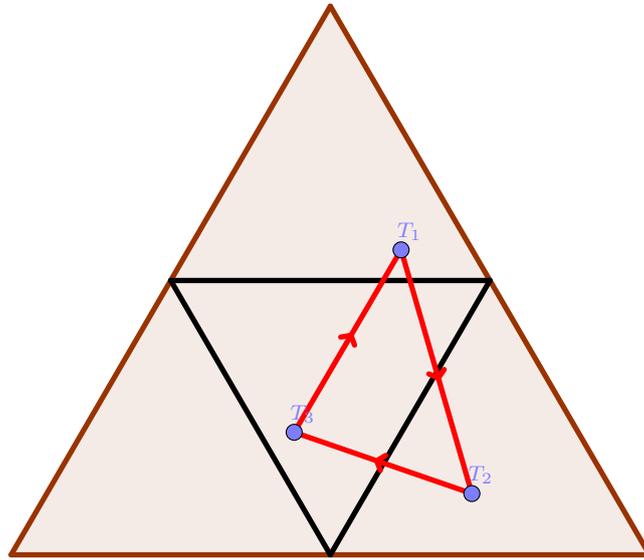


Figura 15: Os termos da sucessão anterior localizados em \mathcal{M} .

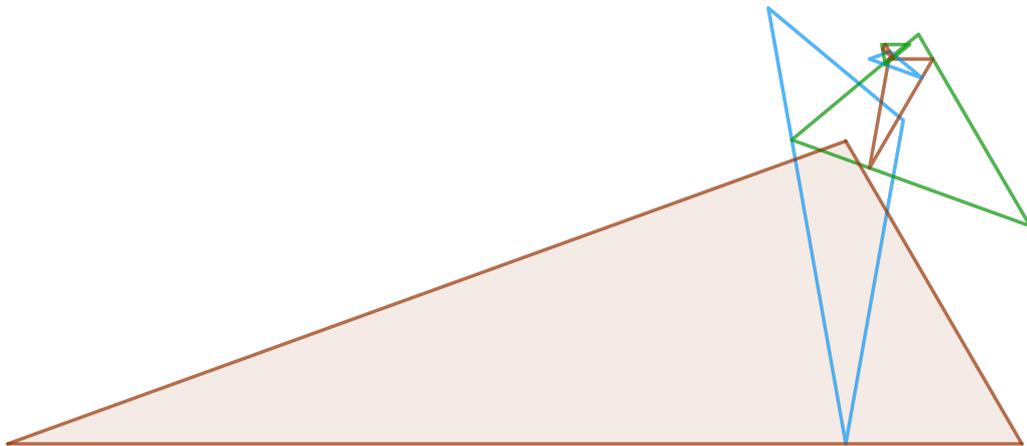


Figura 16: Sucessão pedal correspondente à palavra $\overline{130}$.

Exemplo 4: Sucessão pré-periódica A palavra $20\overline{1123}$ é periódica (de período 4) a partir do terceiro símbolo. Corresponde à seguinte sucessão de triângulos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{60}, \frac{43}{60}, \frac{14}{60}\right) \times 180\checkmark &\mapsto \left(\frac{6}{60}, \frac{26}{60}, \frac{28}{60}\right) \times 180\checkmark \mapsto \left(\frac{48}{60}, \frac{8}{60}, \frac{4}{60}\right) \times 180\checkmark \\ &\mapsto \left(\frac{36}{60}, \frac{16}{60}, \frac{8}{60}\right) \times 180\checkmark \mapsto \left(\frac{12}{60}, \frac{32}{60}, \frac{16}{60}\right) \times 180\checkmark \\ &\mapsto \left(\frac{24}{60}, \frac{4}{60}, \frac{32}{60}\right) \times 180\checkmark. \end{aligned}$$

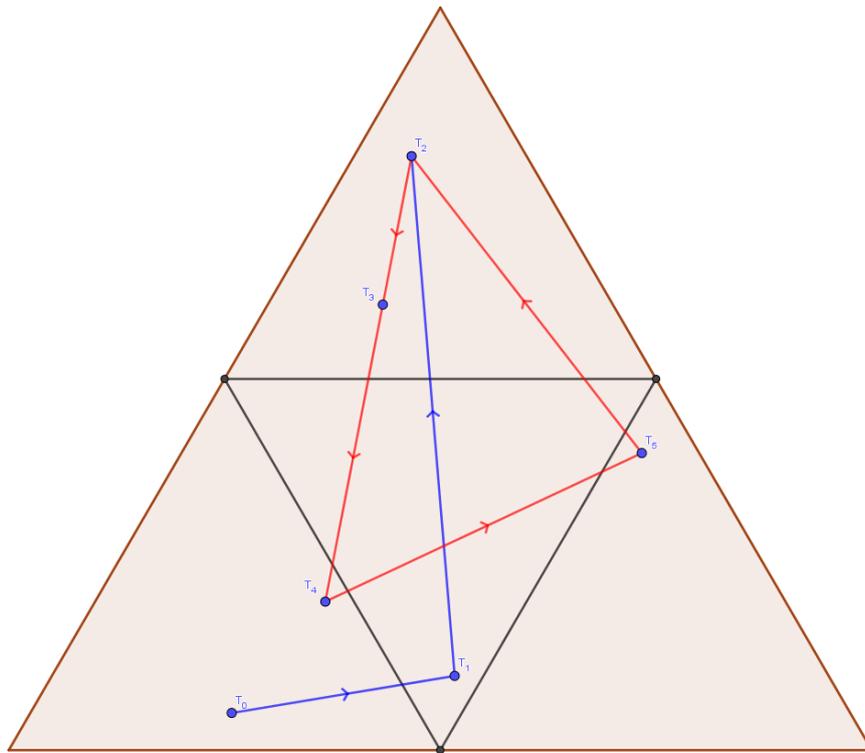


Figura 17: Termos da sucessão anterior em \mathcal{M} .

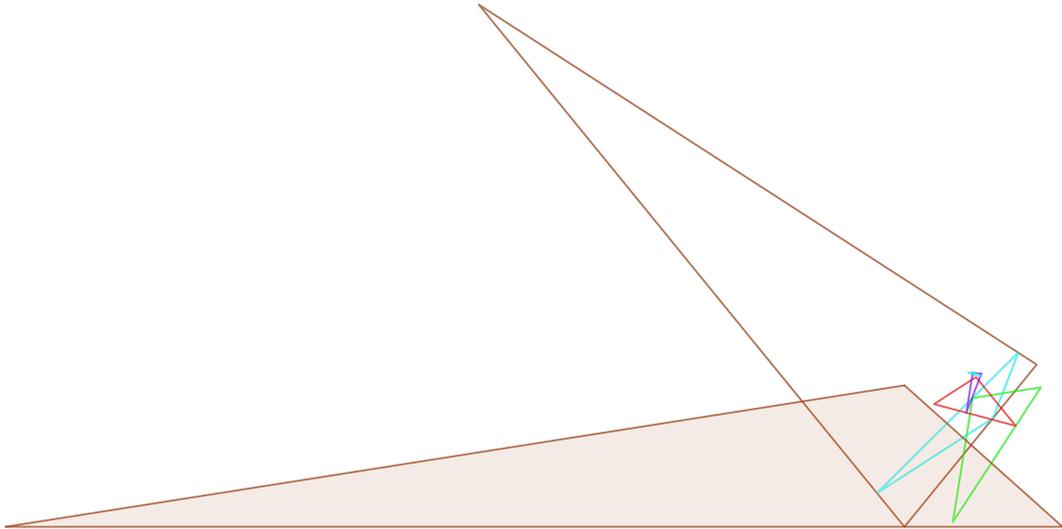


Figura 18: Sucessão pedal correspondente à palavra $20\overline{1123}$.

Triângulos degenerados Os triângulos degenerados (com um ou dois ângulos de amplitude 0) correspondem ao conjunto

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathcal{M} : x = 0 \vee y = 0 \vee z = 0\}.$$

Geometricamente, localizam-se nos lados do triângulo \mathcal{M} . Podemos considerar três casos:

- Triângulos com dois ângulos nulos, que se localizam nos vértices de \mathcal{M} , correspondem às palavras

$$\overline{1}, \overline{2} \text{ e } \overline{3}$$

e são pontos fixos da dinâmica.

- Triângulos com apenas um ângulo nulo, que se localizam nos lados de \mathcal{M} e:

- Se algum iterado passar a ter dois ângulos nulos, a palavra de obtusidade é da forma $a0\bar{i}$, onde a é uma palavra com apenas dois símbolos de $\{1, 2, 3\}$ e i é o símbolo restante.
- Caso contrário, a palavra de obtusidade tem apenas dois símbolos, de entre 1, 2 e 3.

Um triângulo é pré-degenerado se algum dos seus iterados for um triângulo degenerado. Nesse caso, a sua palavra de obtusidade é, ao fim de um número finito de iterados, uma das descritas anteriormente. Podemos representá-los geometricamente em \mathcal{M} como

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}^{-n}(\mathcal{D})$$

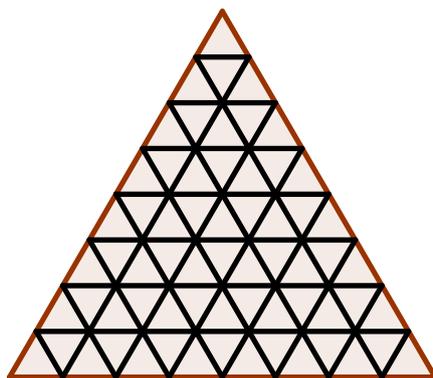


Figura 19: Alguns triângulos pré-degenerados assinalados a preto em \mathcal{M} .

4 Circunferência dos 9 pontos

O pedal de um triângulo $\triangle ABC$ tem como circunferência circunscrita a “*circunferência dos 9 pontos*”, assim chamada por conter 9 pontos especiais de $\triangle ABC$, nomeadamente:

- os 3 pés das alturas;
- os 3 pontos médios dos lados;
- e os 3 pontos médios dos segmentos que unem o ortocentro aos vértices do triângulo.

Esta circunferência é imagem da circunferência circunscrita de $\triangle ABC$ pela homotetia de centro no ortocentro de $\triangle ABC$ e razão $\frac{1}{2}$.

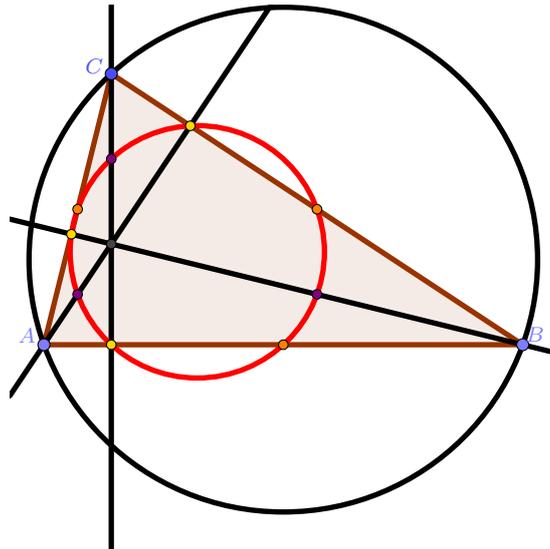


Figura 20: Circunferência dos 9 pontos de um triângulo $\triangle ABC$ com os 9 pontos assinalados a amarelo, laranja e roxo, pela ordem em que foram enunciados.

Além disso, as áreas de um triângulo e do seu pedal têm a seguinte relação entre si [5]:

$$\text{Área de } \mathcal{P}(\triangle ABC) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{|OQ|^2}{R^2} \right) (\text{Área de } \triangle ABC)$$

onde OQ é o segmento que une o circuncentro ao ortocentro de $\triangle ABC$, o número real $R > 0$ designa o raio da circunferência circunscrita de $\triangle ABC$ e \mathcal{P} é a aplicação pedal. Daqui resulta que

$$\text{Área de } \mathcal{P}(\triangle ABC) \leq \frac{1}{4} (\text{Área de } \triangle ABC)$$

e que

$$0 \leq \text{Área de } \mathcal{P}^n(\triangle ABC) \leq \frac{1}{4^n} (\text{Área de } \triangle ABC).$$

Conseqüentemente, se o triângulo inicial não é pré-degenerado (logo a sua sucessão pedal está bem definida), a sucessão das respectivas áreas tende para zero. E, portanto, a sucessão dos triângulos pedais tende para um ponto do plano.

5 Ponto limite

Considerando os vértices do triângulo $\triangle ABC$ como inscritos na circunferência de centro 0 e raio 1 no plano complexo, é possível encontrar uma fórmula para o ponto limite da sucessão pedal usando a sucessão dos circuncentros. Sejam

- $A_0 = \exp(2\pi i \alpha_0)$, $B_0 = \exp(2\pi i \beta_0)$ e $C_0 = \exp(2\pi i \gamma_0)$ os vértices do triângulo inicial, onde $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 \in [0, 1[$.
- $H_0 =$ ortocentro de $\triangle A_0B_0C_0$
- $Q_0 =$ circuncentro de $\triangle A_0B_0C_0$
- $K_0 =$ circunferência circunscrita de $\triangle A_0B_0C_0$
- $\triangle A'_1B'_1C'_1$ o pedal de $\triangle A_0B_0C_0$.

A homotetia de centro H_0 e razão 2 envia a circunferência circunscrita K_1 do pedal $\triangle A'_1B'_1C'_1$ em K_0 , e portanto envia o pedal num triângulo semelhante $\triangle A_1B_1C_1$ inscrito em K_0 .

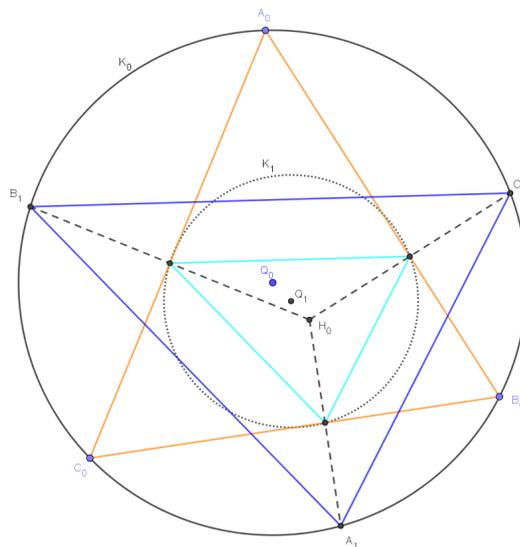


Figura 21: Triângulo $\triangle A_0B_0C_0$, a sua circunferência circunscrita K_0 , o seu pedal $\triangle A'_1B'_1C'_1$ e a ampliação $\triangle A_1B_1C_1$.

Além disso, H_0 e Q_0 satisfazem a seguinte igualdade

$$H_0 - Q_0 = (A_0 - Q_0) + (B_0 - Q_0) + (C_0 - Q_0)$$

pois a composta das translações segundo os vetores $\overrightarrow{Q_0A_0}$, $\overrightarrow{Q_0B_0}$ e $\overrightarrow{Q_0C_0}$ envia as mediatrizes dos lados do triângulo nas suas alturas, e portanto envia Q_0 em H_0 . Como estamos a supor que $Q_0 = 0$, daqui resulta que

$$H_0 = \exp(2\pi i \alpha_0) + \exp(2\pi i \beta_0) + \exp(2\pi i \gamma_0).$$

Tendo em conta que Q_1 é o ponto médio do segmento de extremos H_0 e Q_0 , sabemos ainda que

$$Q_1 - Q_0 = \frac{H_0 - Q_0}{2}$$

e, portanto,

$$Q_1 = \frac{1}{2} \left(\exp(2\pi i \alpha_0) + \exp(2\pi i \beta_0) + \exp(2\pi i \gamma_0) \right).$$

Em geral, para o n -ésimo termo da sucessão pedal, obtém-se analogamente

$$\begin{aligned} H_n - Q_n &= (A'_n - Q_n) + (B'_n - Q_n) + (C'_n - Q_n) \\ &= \frac{1}{2^n} \left((A_n - Q_0) + (B_n - Q_0) + (C_n - Q_0) \right) \\ &= \frac{1}{2^n} \left(\exp(2\pi i \alpha_n) + \exp(2\pi i \beta_n) + \exp(2\pi i \gamma_n) \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Q_{n+1} - Q_n &= \frac{1}{2} (H_n - Q_n) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \left(\exp(2\pi i \alpha_n) + \exp(2\pi i \beta_n) + \exp(2\pi i \gamma_n) \right). \end{aligned}$$

Consequentemente, o ponto limite é dado por:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow +\infty} Q_N &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=0}^{N-1} (Q_{n+1} - Q_n) \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (Q_{n+1} - Q_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \left(\exp(2\pi i \alpha_n) + \exp(2\pi i \beta_n) + \exp(2\pi i \gamma_n) \right). \end{aligned}$$

5.1 Fórmulas para $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$

Podemos agora escrever $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ como função dos parâmetros iniciais $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ de modo a obter uma fórmula do ponto limite que dependa explicitamente destes dados iniciais.

Comecemos por observar que com tais valores $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ obtemos os vértices do pedal $A_1 = \exp(2\pi i \alpha_1)$, $B_1 = \exp(2\pi i \beta_1)$ e $C_1 = \exp(2\pi i \gamma_1)$, e que as cordas A_0A_1 e B_0C_0 são ortogonais, logo os argumentos dos pontos médios respectivos têm uma diferença de $\frac{\pi}{2}$.

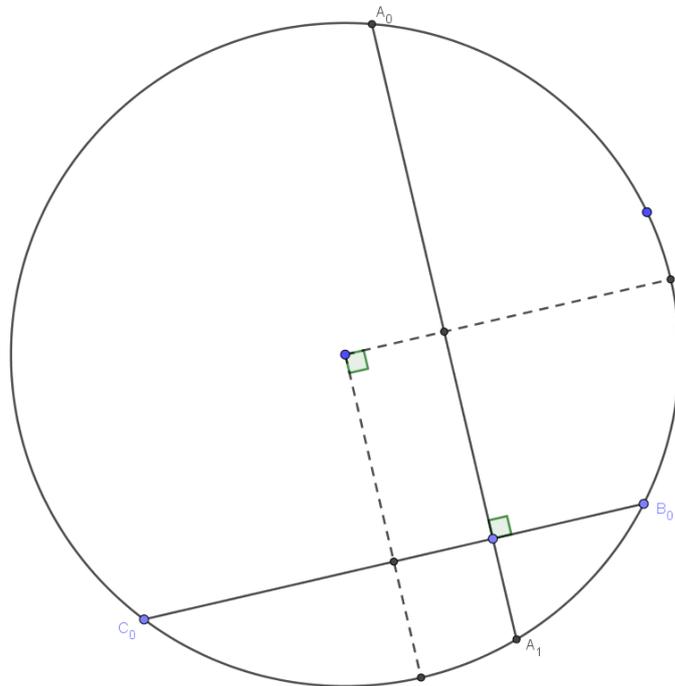


Figura 22: Ortogonalidade das cordas A_0A_1 e B_0C_0 .

Ou seja,

$$2\pi \left(\frac{\beta_0 + \gamma_0}{2} \right) + \frac{\pi}{2} = 2\pi \left(\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2} \right)$$

de onde resulta que

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} - \alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0.$$

De forma análoga, obtém-se

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \beta_0 + \alpha_0 + \gamma_0$$

e

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} - \gamma_0 + \alpha_0 + \beta_0.$$

Tem-se então

$$a_1 = \mathcal{A} a_0 + b$$

sendo

$$a_k = (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)^t \quad b = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^t$$

e

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Como $\mathcal{A}b = b$, deduzimos que para todo o natural n

$$a_n = \mathcal{A}^n a_0 + n b.$$

Além disso, a matriz \mathcal{A} é simétrica, logo diagonalizável. E $\mathcal{A} = UDU^{-1}$, onde

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad U^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente,

$$\mathcal{A}^n = U D^n U^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 + 2(-2)^n & 1 - (-2)^n & 1 - (-2)^n \\ 1 - (-2)^n & 1 + 2(-2)^n & 1 - (-2)^n \\ 1 - (-2)^n & 1 - (-2)^n & 1 + 2(-2)^n \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\alpha_n = \frac{\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0}{3} + (-2)^n \frac{2\alpha_0 - \beta_0 - \gamma_0}{3} + \frac{n}{2}.$$

O que implica que

$$\exp(2\pi i \alpha_n) = (-1)^n \exp\left(2\pi i \frac{\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0}{3}\right) \exp\left(2\pi i (-2)^n \frac{2\alpha_0 - \beta_0 - \gamma_0}{3}\right).$$

As estimativas de β_n e γ_n seguem fórmulas de recorrência análogas. Fica assim provado o seguinte resultado.

Teorema 2 [8] *Se os vértices do triângulo original são os pontos em \mathbb{C} dados por*

$$A = \exp(2\pi i \alpha) \quad B = \exp(2\pi i \beta) \quad C = \exp(2\pi i \gamma)$$

então o ponto limite é imagem da função

$$\mathcal{L}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$$

definida por

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}(\alpha, \beta, \gamma)}{\exp\left(2\pi i \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \left[\exp\left(2\pi i (-2)^n \frac{2\alpha - \beta - \gamma}{3}\right) \right. \\ &+ \exp\left(2\pi i (-2)^n \frac{-\alpha + 2\beta - \gamma}{3}\right) \\ &\left. + \exp\left(2\pi i (-2)^n \frac{-\alpha - \beta + 2\gamma}{3}\right) \right]. \end{aligned}$$

5.2 Algumas propriedades da função \mathcal{L}

Observe-se que:

- Para todo o α, β e γ , tem-se $|\mathcal{L}(\alpha, \beta, \gamma)| \leq 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$. Logo a série que descreve \mathcal{L} converge uniformemente para uma função contínua (pelo teste M de Weierstrass).

- Além disso, \mathcal{L} é simétrica em relação às três variáveis α, β e γ . Ou seja, o ponto limite não depende da ordenação dos vértices.

- Dado $\theta \in \mathbb{R}$, para todo o α, β e γ tem-se

$$\mathcal{L}(\alpha + \theta, \beta + \theta, \gamma + \theta) = \exp(2\pi i \theta) \mathcal{L}(\alpha, \beta, \gamma).$$

Ou seja, uma rotação do triângulo induz uma rotação no ponto limite.

- Analogamente se mostra que para todo o α, β e γ se tem

$$\mathcal{L}(-\alpha, -\beta, -\gamma) = \overline{\mathcal{L}(\alpha, \beta, \gamma)}$$

onde \bar{z} denota o conjugado do complexo z . Ou seja, a reflexão dos vértices do triângulo relativamente ao eixo real no plano complexo induz uma reflexão do ponto limite relativamente ao mesmo eixo.

6 Curvas de pontos-limite

Fixemos agora β_0 e γ_0 e façamos variar α . Geometricamente, isto corresponde a considerar um triângulo e variar um dos seus vértices sobre a sua circunferência circunscrita. A curva traçada pelo ponto limite pode então parametrizar-se por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\cdot, \beta_0, \gamma_0): [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \alpha &\mapsto \mathcal{L}(\alpha, \beta_0, \gamma_0). \end{aligned}$$

Note-se que:

- $\mathcal{L}(0, \beta_0, \gamma_0) = \mathcal{L}(1, \beta_0, \gamma_0)$. Ou seja, todas as curvas são fechadas.
- O formato da curva depende apenas do tamanho da corda B_0C_0 .
- Uma forma de descrever a família de todas as curvas (sem repetição) é a seguinte: fixa-se B_0 em 1 e C_0 percorre a metade superior da circunferência, obtendo-se

$$\left(\mathcal{L}([0, 1], 0, \gamma_0) \right)_{\gamma_0 \in [0, \frac{1}{2}]}$$

Em geral, estas curvas têm um traço complicado. Mas é possível exibir alguns exemplos cujo formato é fácil de explicar geometricamente usando as propriedades da sucessão de pedais ou através da fórmula para o ponto limite. É o que faremos de seguida.

6.1 Curvas simples

Vejam alguns exemplos de curvas de pontos-limite que são elementares.

Um ponto Quando B_0 e C_0 coincidem (isto é, $\gamma_0 = 0$), o triângulo degenera num segmento e o seu pedal reduz-se ao ponto $B_0 = C_0$.

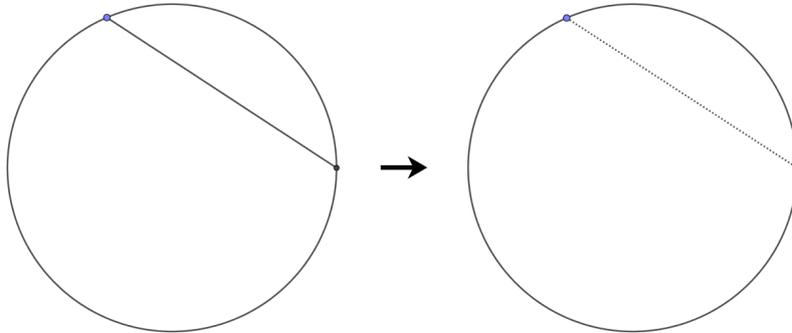


Figura 23: Ponto limite quando dois dos vértices do triângulo coincidem.

Provemos que assim é. Da fórmula para o ponto limite, resulta que

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}(\alpha, 0, 0)}{\exp\left(\frac{2\pi i}{3}\alpha\right)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{2^n} \exp\left(\frac{-2\pi i}{3}(-2)^n\alpha\right) - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \exp\left(\frac{-2\pi i}{3}(-2)^{n+1}\alpha\right) \right] \\ &= \exp\left(\frac{-2\pi i}{3}\alpha\right) \end{aligned}$$

Ou seja, $\mathcal{L}(\alpha, 0, 0) = 1$ para todo o $\alpha \in [0, 1]$.

Uma circunferência Se B_0 e C_0 forem diametralmente opostos (isto é, $\gamma_0 = \frac{1}{2}$), o triângulo AB_0C_0 é retângulo em A (quando é não degenerado). Determinando o pedal, primeiro o triângulo colapsa na altura relativamente ao vértice A , e o pedal seguinte reduz-se ao vértice A . E, portanto, o ponto limite coincide com o ponto A . Consequentemente, a curva que o ponto limite descreve quando se varia o vértice A é a circunferência circunscrita de todos estes triângulos retângulos.

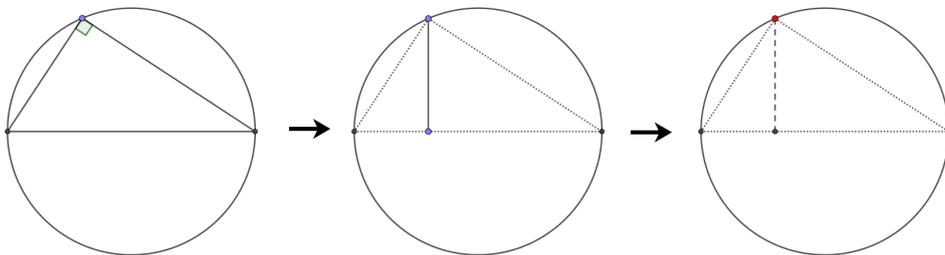
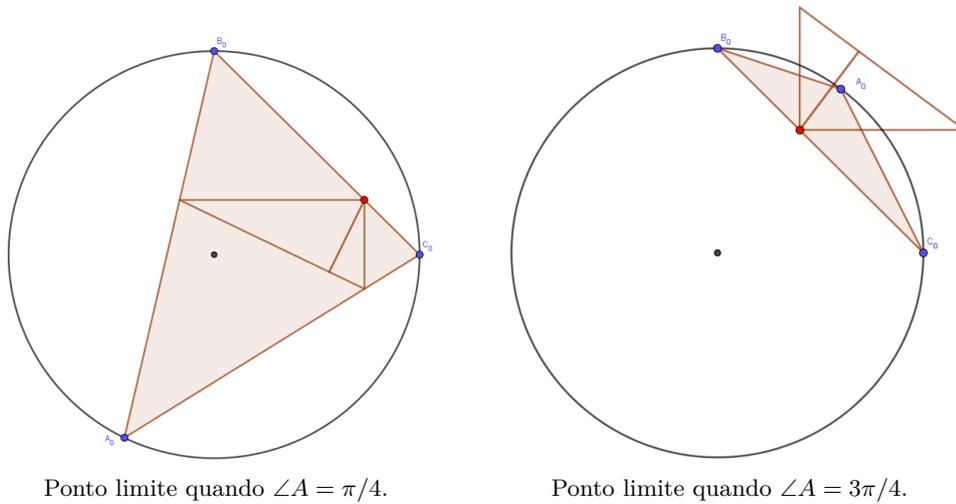


Figura 24: Ponto limite quando o ângulo em A é retângulo.

Um segmento de reta Quando a corda B_0C_0 subtende um arco de amplitude $\frac{\pi}{2}$ (isto é, se $\gamma_0 = \frac{1}{4}$), o pedal é retângulo – porque o ângulo em A tem amplitude $\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4}$, e em ambos os casos o pedal tem um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ – com o ângulo reto na reta que contém a corda. E, portanto, o ponto limite (que coincide com o vértice do ângulo reto) está sobre esta reta, qualquer que seja o ponto A .



O traço da curva de pontos-limite obtém-se fazendo a projeção ortogonal de todos os pontos da circunferência na reta que contém a corda, pelo que o segmento tem comprimento igual ao diâmetro da circunferência ($= 2$).

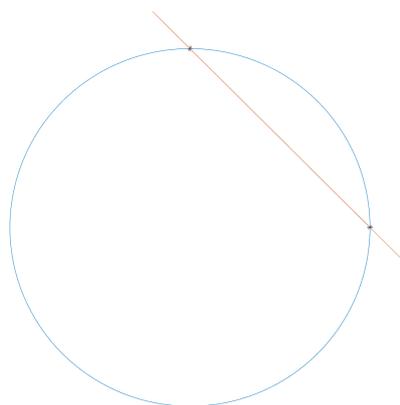


Figura 25: Curva obtida quando $\gamma_0 = 1/4$.

6.2 Propriedades geométricas das curvas

As curvas de pontos-limite que estamos a considerar parecem exibir alguma simetria. No que se segue descreveremos dois eixos de simetria comuns a todas elas.

Eixo de simetria: corda B_0C_0 Embora a reflexão do ponto móvel no diâmetro da circunferência (paralelo à corda B_0C_0) dê origem a triângulos com aspeto distinto, os respetivos pedais são simétricos em relação à corda B_0C_0 .

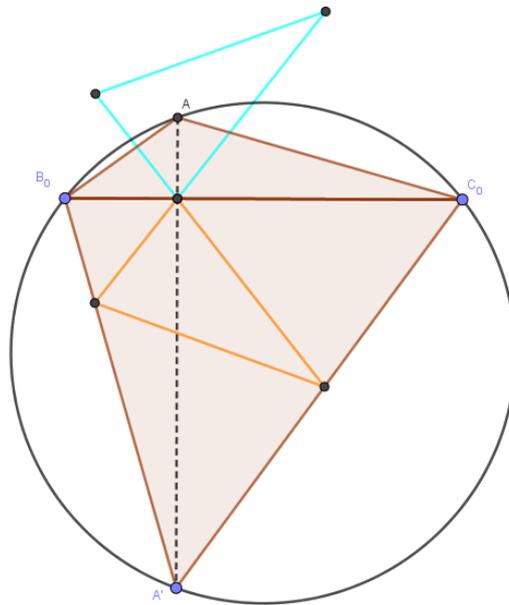


Figura 26: Simetria dos pedais de dois triângulos com ponto móvel simétrico em relação ao diâmetro paralelo à corda B_0C_0

Para o mostrar, estudemos os parâmetros α, β, γ das ampliações dos pedais até à circunferência circunscrita do triângulo inicial. Se $(\alpha, \beta_0, \gamma_0)$ descrever um triângulo obtusângulo, então $(-\alpha, \beta_0, \gamma_0)$ descreve um triângulo acutângulo, uma vez que os vértices B_0 e C_0 são comuns e $A' = \bar{A}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que a corda é horizontal (pois podemos sempre rodar a circunferência) e portanto $\beta_0 + \gamma_0 = \frac{1}{2}$. Passando para as ampliações dos pedais, obtemos

$$(\alpha, \beta_0, \gamma_0) \mapsto \left(\frac{1}{2} - \alpha + \beta_0 + \gamma_0, \frac{1}{2} - \beta_0 + \alpha + \gamma_0, \frac{1}{2} - \gamma_0 + \alpha + \beta_0 \right)$$

e

$$(-\alpha, \beta_0, \gamma_0) \mapsto \left(\frac{1}{2} + \alpha + \beta_0 + \gamma_0, \frac{1}{2} - \beta_0 - \alpha + \gamma_0, \frac{1}{2} - \gamma_0 - \alpha + \beta_0 \right).$$

Somando os termos com a mesma cor, obtemos um inteiro em cada caso, pelo que os pontos que representam são simétricos em relação ao diâmetro da circunferência. Assim, os pedais são simétricos em relação a alguma reta horizontal; como têm um vértice em comum na reta que contém a corda, é este o eixo de simetria.

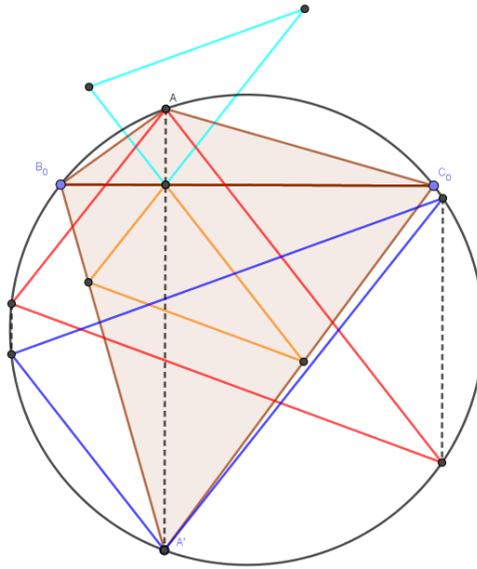


Figura 27: Ampliações dos pedais da imagem anterior

Eixo de simetria: mediatriz da corda B_0C_0 Note-se que a reflexão do ponto A na mediatriz da corda B_0C_0 corresponde a uma reflexão do triângulo, que por sua vez induz uma reflexão do ponto limite. Consequentemente, a curva tem também como eixo de simetria esta mediatriz.

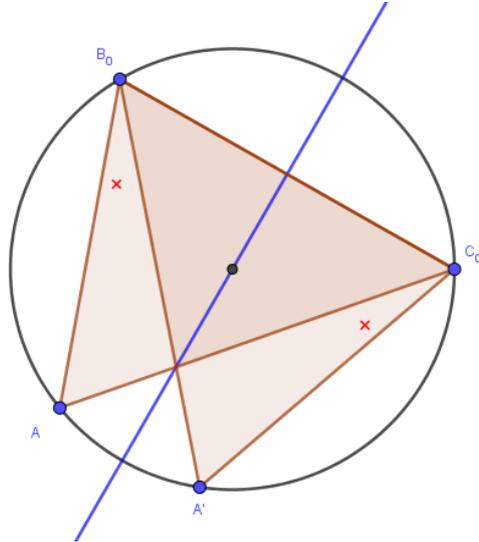


Figura 28: Reflexão do ponto móvel na mediatriz da corda B_0C_0 .

6.2.1 Estrutura da curva

Cada uma destas curvas pode ser dividida em três partes, que designamos por secção central e duas extremidades, havendo sempre auto-interseções nos pontos B_0 e C_0 . É o que se esquematiza na figura seguinte.

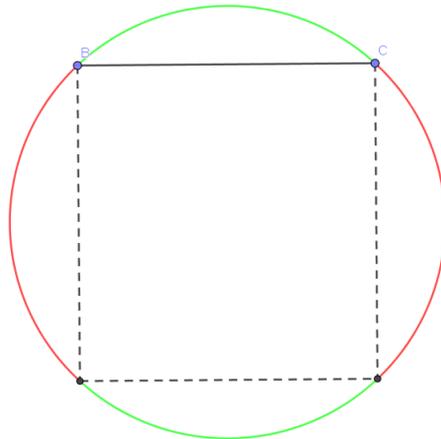


Figura 29: Divisão da circunferência em duas partes: a verde corresponde à secção central, as vermelhas correspondem aos sub-lacetes das extremidades da curva.

Vejamos alguns exemplos.

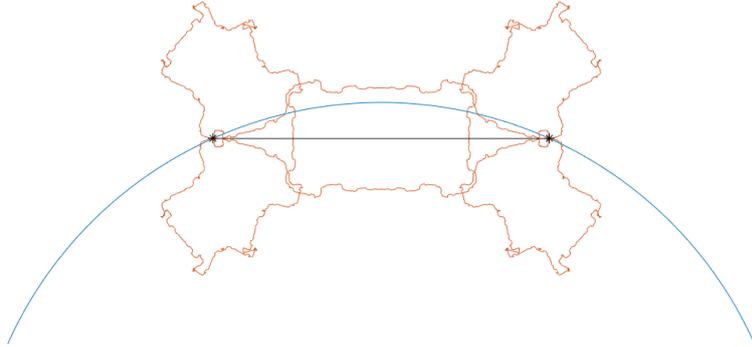


Figura 30: Exemplo com $\gamma_0 = 13/48$.

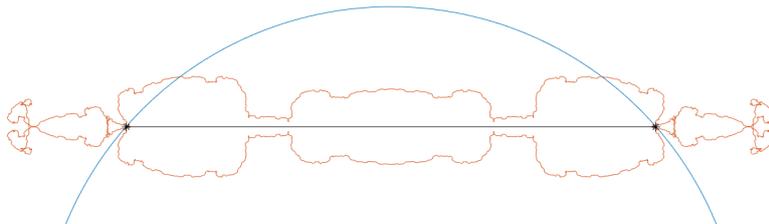


Figura 31: Exemplo com $\gamma_0 = 653/1200$.

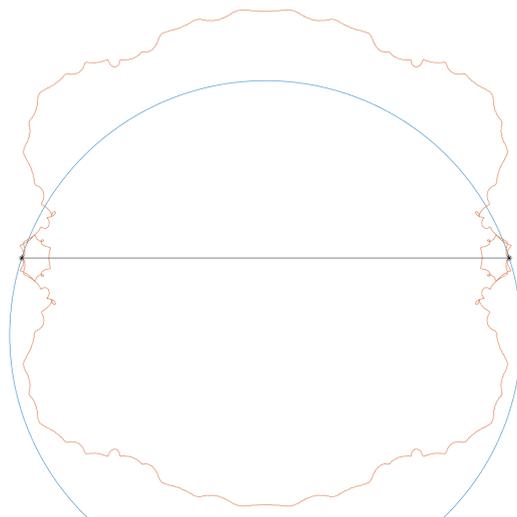


Figura 32: Exemplo com $\gamma_0 = 193/240$.

7 Diferenciabilidade da curva

Fixemos um triângulo como anteriormente, descrito por α_0 , β_0 e γ_0 , e consideremos a curva de pontos-limite da sucessão de pedais para o triângulo representado por α , β_0 e γ_0 quando α varia.

Teorema 3 *Sejam*

$$b = \alpha - \gamma_0 \quad e \quad c = \beta_0 - \alpha.$$

Se existem $p, q \in \mathbb{N}$ tais que

$$b + c = r = \frac{3p}{2^q}$$

sendo esta uma fração irredutível, então a curva obtida é diferenciável.

Vejamus uma demonstração por adaptação direta de um resultado de [8]. Começemos por observar que

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}(\alpha, \beta_0, \gamma_0)}{\exp\left(2\pi i \frac{\alpha + \beta_0 + \gamma_0}{3}\right)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \left[\exp\left(2\pi i (-2)^n \frac{r - 2c}{3}\right) \right. \\ &+ \exp\left(2\pi i (-2)^n \frac{r + c}{3}\right) \\ &\left. + \exp\left(2\pi i (-2)^n \frac{-2r + c}{3}\right) \right]. \end{aligned}$$

Além disso,

$$n \geq q \quad \Rightarrow \quad \frac{(-2)^n}{3} r = (-1)^n 2^{n-q} p \in \mathbb{Z}$$

pelo que, a partir do q -ésimo termo da série cuja soma é $\mathcal{L}(\alpha, \beta_0, \gamma_0)$, temos a seguinte simplificação

$$\begin{aligned} &\sum_{n=q}^{\infty} \left[-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \exp\left(2\pi i (-2)^{n+1} \frac{c}{3}\right) + \frac{(-1)^n}{2^n} \exp\left(2\pi i (-2)^n \frac{c}{3}\right) \right] \\ &= \frac{(-1)^q}{2^q} \exp\left(2\pi i (-2)^q \frac{c}{3}\right) \end{aligned}$$

Consequentemente, $\mathcal{L}(\cdot, \beta_0, \gamma_0)$ é uma soma finita de funções diferenciáveis na variável $c = \beta_0 - \alpha$. Logo, a curva é diferenciável.

As figuras seguintes ilustram alguns exemplos de curvas nas condições do Teorema 3.

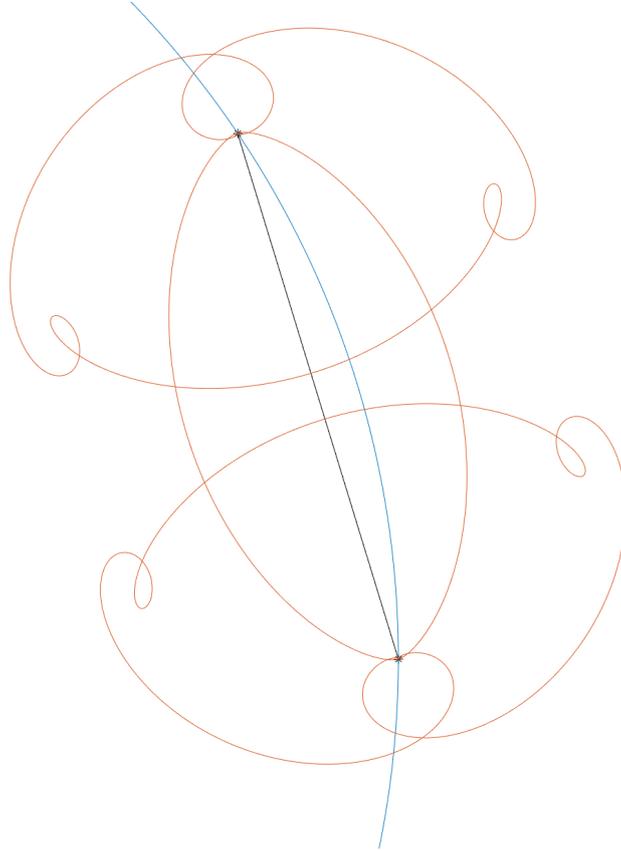


Figura 33: Exemplo com $r = 3/32$.

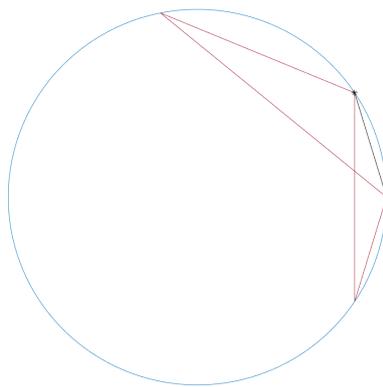


Figura 34: Uma família de triângulos que gera esta curva

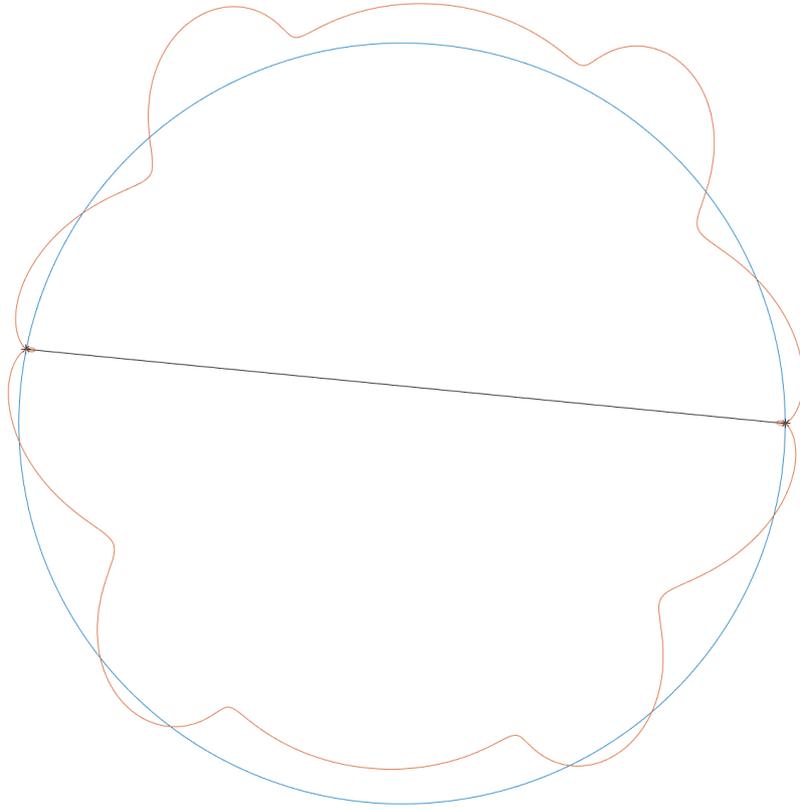


Figura 35: Exemplo com $r = 15/32$.

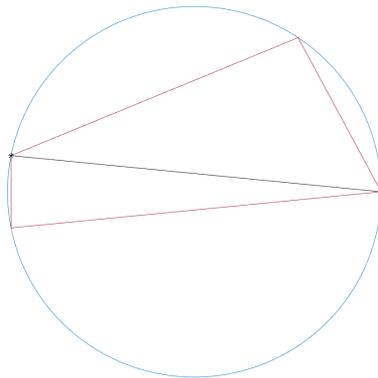


Figura 36: Uma família de triângulos que gera esta curva

Atentemos agora nestes outros exemplos, com $r = \frac{p}{2^q}$ para $p, q \in \mathbb{N}$ tais que a fração é irredutível.

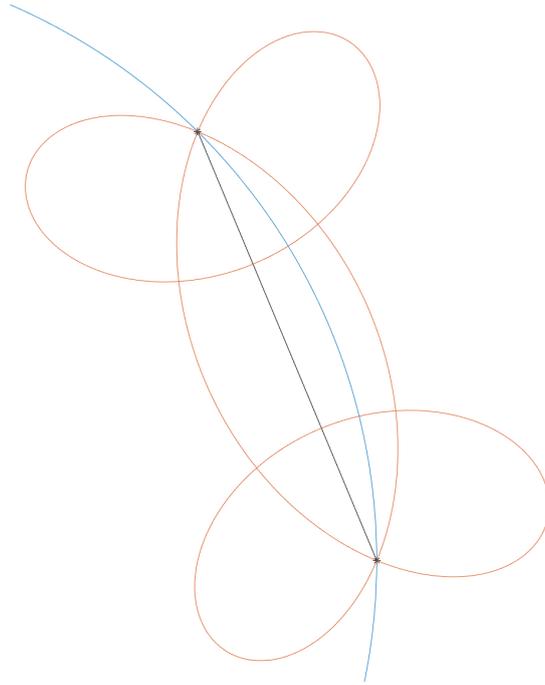


Figura 37: Exemplo com $r = 1/8$.

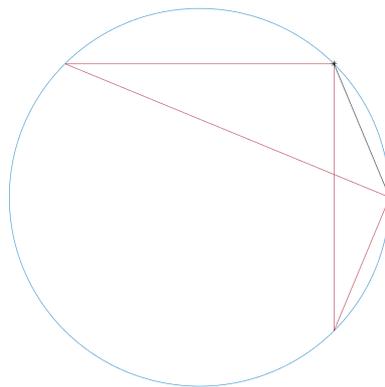


Figura 38: Uma família de triângulos que gera esta curva



Figura 39: Exemplo com $r = 7/32$.

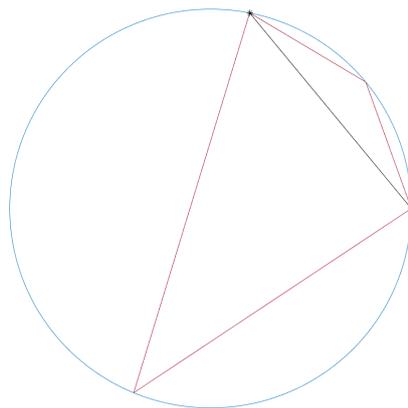


Figura 40: Uma família de triângulos que gera esta curva

O que mostram? Parece que para estes valores de r , não considerados no teorema anterior, também as curvas são diferenciáveis. Na próxima secção provaremos que assim é.

7.1 Extensão do Teorema 3

Seja $\angle A$ o ângulo do vértice móvel e $\angle A'$ o ângulo do vértice correspondente do pedal. Tem-se

$$\angle A' = \begin{cases} \pi - 2\angle A & \text{se o triângulo for acutângulo} \\ 2\angle A - \pi & \text{se } \angle A \text{ for obtuso} \\ 2\angle A & \text{se outro ângulo que não } \angle A \text{ for obtuso} \end{cases}$$

pelo que (veja-se [6])

$$\angle A' \equiv \pm 2\angle A \pmod{\pi}.$$

Para o n -ésimo pedal, obtém-se analogamente

$$\angle A^{(n)} \equiv \pm 2^n \angle A \pmod{\pi}$$

e, portanto,

$$\angle A^{(n)} = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \exists p \in 2\mathbb{N} - 1: \quad \angle A = \frac{p\pi}{2^{n+1}}.$$

Mais precisamente, se existe $p \in 2\mathbb{N} - 1$ tal que $\angle A = \frac{p\pi}{2^{n+1}}$, o n -ésimo pedal é retângulo em $\angle A$, e portanto na iteração seguinte obtemos um segmento, que colapsa de seguida no ponto limite. Dito de outra forma, tendo em conta que

$$b + c = \frac{\angle A}{\pi} \quad \text{ou} \quad b + c = 1 - \frac{\angle A}{\pi}$$

se $b + c$ é uma fração irredutível $\frac{p}{2^q}$ cujo denominador é uma potência de 2, então o ponto limite é atingido após um número *finito* de iterações (no máximo $q + 1$) da sucessão pedal, qualquer que seja a posição do vértice A na circunferência.

O comentário anterior levou-nos a conjecturar que seria possível dispensar o fator 3 no enunciado do Teorema 3.

Seja $r = \frac{p}{2^q}$ uma fração irredutível, com $p, q \in \mathbb{N}$. Tem-se

$$n \geq q \quad \Rightarrow \quad (-2)^n r = (-1)^n 2^{n-q} p \in \mathbb{Z}$$

e, portanto,

$$n \geq q \quad \Rightarrow \quad \exp\left(2\pi i \frac{(-2)^n}{3} r\right) = \exp\left(2\pi i \frac{R_n}{3}\right)$$

onde $(R_n)_{n \geq q}$ é a sucessão dos restos módulo 3 de $((-2)^n r)_{n \geq q}$. Como se tem

$$R_{n+1} \equiv (-2)^{n+1} r = (-2)(-2)^n r \equiv (-2)R_n \equiv R_n \pmod{3}$$

conclui-se que, na verdade,

$$\forall n \geq q: \quad R_n = R_q.$$

Logo a série cuja soma é $\frac{\mathcal{L}(\alpha, \beta_0, \gamma_0)}{\exp\left(2\pi i \frac{\alpha + \beta_0 + \gamma_0}{3}\right)}$ reescreve-se, a partir de $n = q$, como

$$\begin{aligned} & \sum_{n=q}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \left[\exp\left(2\pi i (-2)^n \frac{r-2c}{3}\right) + \exp\left(2\pi i (-2)^n \frac{r+c}{3}\right) \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \exp\left(2\pi i (-2)^n \frac{-2r+c}{3}\right) \right] \\ &= \exp\left(2\pi i \frac{R_q}{3}\right) \sum_{n=q}^{\infty} \left[-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \exp\left(2\pi i (-2)^{n+1} \frac{c}{3}\right) \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{(-1)^n}{2^n} \exp\left(2\pi i (-2)^n \frac{c}{3}\right) \right] \\ &= \exp\left(2\pi i \frac{R_q}{3}\right) \frac{(-1)^q}{2^q} \exp\left(2\pi i (-2)^q \frac{c}{3}\right) \end{aligned}$$

Mais uma vez, a série é afinal uma soma finita, e portanto a curva é diferenciável. Note-se que, quando $p \in 3\mathbb{N}$, recupera-se o enunciado do Teorema 3 com $R_q = 0$. Fica assim provado que:

Teorema 4 *Se existem $p, q \in \mathbb{N}$ tais que*

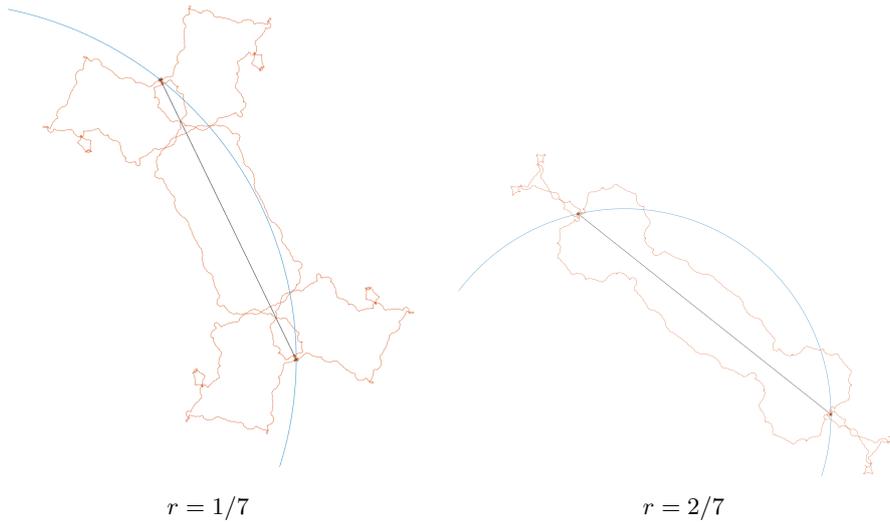
$$b + c = r = \frac{p}{2^q}$$

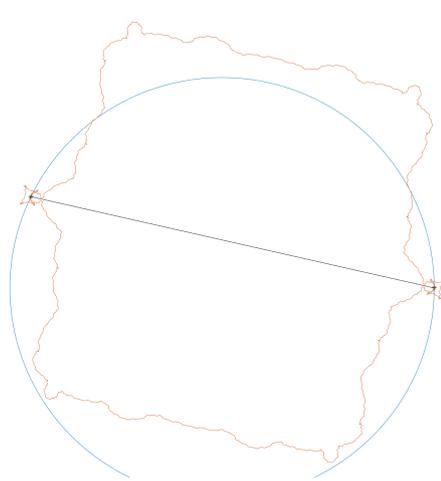
sendo esta uma fração irredutível, então a curva obtida é diferenciável.

Geometricamente, se o comprimento do arco de circunferência definido pelos vértices fixos B_0 e C_0 ($= 2\pi r$) for uma fração racional (com denominador potência de 2) do perímetro, então a curva obtida movendo o ponto A é diferenciável.

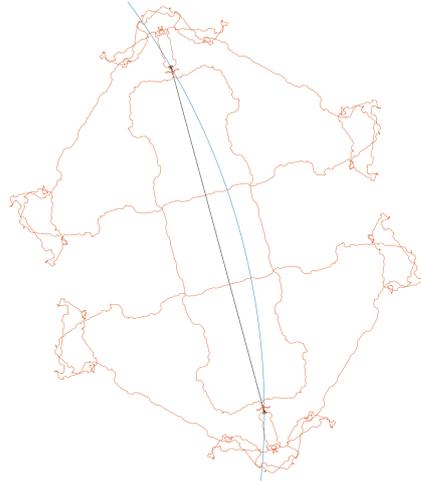
8 Comentário final

O resultado anterior sugere naturalmente várias questões. A primeira é sobre a existência de curvas deste tipo que não são diferenciáveis em algum ponto. Em [8] prova-se que a função \mathcal{L} não é diferenciável, pelo que seria interessante adaptar o resultado para encontrar uma tal curva. A segunda questão refere-se ao recíproco do Teorema 4. A análise mais detalhada das curvas para valores racionais de r cujas frações irredutíveis sejam da forma $\frac{p}{2^q(2^s-1)}$ ou $\frac{p}{2^s-1}$, para naturais p, q e $s \geq 2$, deverá elucidar sobre a possibilidade de não serem diferenciáveis, mas este é um trabalho ainda por completar. Apresentamos a seguir algumas curvas desta forma para denominadores menores ou iguais a 15.

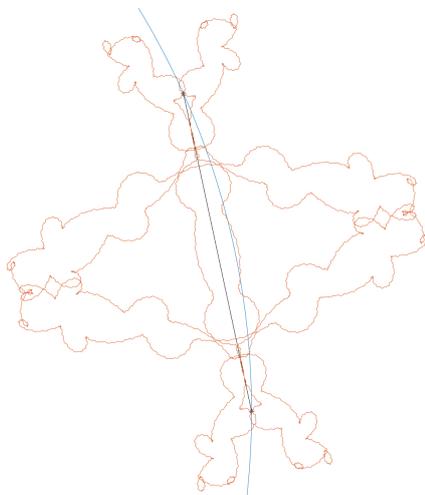




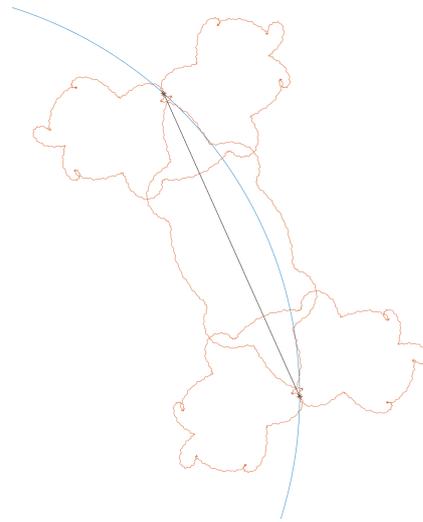
$$r = 3/7$$



$$r = 1/12$$



$$r = 1/15$$



$$r = 2/15$$

Referências

- [1] J. C. Alexander, "The symbolic dynamics of the sequence of pedal triangles", *Mathematics Magazine*, Vol. 66, No. 3 (1993), pp. 147-158.

-
- [2] P. V. Araújo, *Curso de Geometria (3ª Edição)*, Gradiva, Lisboa, 2002.
- [3] H. S. M. Coxeter e S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, The Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1967.
- [4] E. W. Hobson, *A Treatise on Plane and Advanced Trigonometry (7th edition)*, Dover Publications, Nova Iorque, 1957.
- [5] R. A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover Publications, Nova Iorque, 1960.
- [6] J. G. Kingston e J. L. Synge, “The sequence of pedal triangles”, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 95, No. 7 (1988), pp. 609-620.
- [7] P. D. Lax, “The ergodic character of sequences of pedal triangles”, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 97, No. 5 (1990), pp. 377-381.
- [8] A. Manning, “The limit of a pedal sequence of triangles”, *Bulletin of the London Mathematical Society*, Vol. 42, No. 4 (2010), pp. 673-679.
- [9] H. Rademacher e O. Toeplitz, *The Enjoyment of Math*, Princeton University Press, Nova Jérsea, 1957.
- [10] B. M. Stewart, “Cyclic properties of Miquel polygons”, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 47, No. 7 (1940), pp. 462-466.
- [11] P. Ungar, “Mixing property of the pedal mapping”, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 97, No. 10 (1990), pp. 898-900.