Problemas

Editor:
Jorge Nuno Silva

Notas sobre o Problema anterior e Há horas felizes

Jorge Nuno Silva

Os leitores são convidados a enviar, para eventual publicação, soluções, comentários, propostas de problemas, etc. Essa correspondência deve ser enviada para a SPM, ao cuidado do editor desta secção. Há livros para sortear entre as soluções recebidas em cada número.

Relembremos o problema do número anterior.

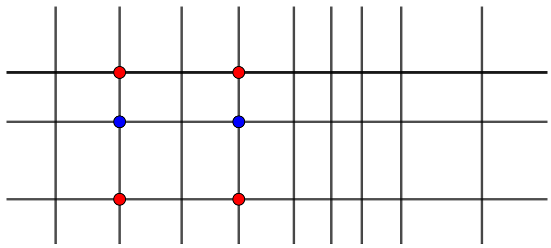
Plano psicadélico

Imaginemos que cada ponto do plano é pintado vermelho ou azul. Será que há dois pontos da mesma cor exactamente a um metro de distância um do outro? Esta é uma questão fácil: considere-se um triângulo equilátero de lado um. Que cores podem ter os seus vértices?...

Propomos uma questão mais interessante: Provar que há um rectângulo cujos vértices têm todos a mesma cor.

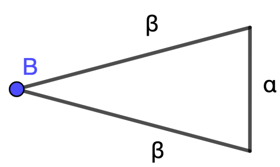
Boletim da SPM 79, Dezembro 2021, Problemas, pp. 1–4

Consideremos três rectas paralelas quaisquer. Tracemos nove perpendiculares a estas rectas. Ficam assim definidos nove ternos de intersecções. Como há $2^3 = 8$ ternos possíveis, pelo Princípio das Gavetas, ocorrerão pelo menos dois ternos iguais. Um tal par de triplos iguais indica-nos onde encontraremos um rectângulo monocromático.



No mesmo contexto, será que pelo menos uma das cores (azul ou vermelho) realiza todas as distâncias possíveis?

Suponhamos que não. Admitamos então que não há dois pontos vermelhos à distância α um do outro e que não há dois pontos azuis que distem β um do outro. Note-se que tem de haver um ponto pintado de azul, B. Consideremos então o triângulo isósceles de lados iguais incidentes em B, de comprimento β e cujo outro lado mede α. que cores podem ter os restantes vértices?...



Usemos agora três cores. Admitamos então que os pontos do plano são pintados de azul, vermelho ou verde. Prove que há dois pontos da mesma cor exactamente a um metro de distância um do outro.

Admitamos que tal não sucede e consideremos um triângulo equilátero de lado unitário. Os vértices têm cores diferentes. Consideremos ainda um outro triângulo equilátero unitário, que partilhe um lado com o primeiro. Então os vértices opostos, à distância de $\sqrt{3}$ um do outro, têm a mesma cor. Não é difícil concluir que qualquer circunferência de raio $\sqrt{3}$ terá de ser um conjunto monocromático. Ora em cada tal circunferência há muitos pares de pontos que distam uma unidade um do outro.

Deixemos as cores de parte. Peço agora que o leitor me dê um exemplo de um conjunto de pontos no plano, S, de cardinalidade mínima, com a propriedade de não existir nenhum ponto do plano cuja distância a cada elemento de S seja racional.

É imediato verificar que a cardinalidade de tal conjunto não pode ser 1 nem 2. Mas, poderá ser 3?...

Experimentemos $S = \{0, 1, \xi\}$. Dado um ponto genérico no plano, de coordenadas (x, y), os quadrados das suas distâncias aos elementos de S são

$$x^2 + y^2 \qquad (x-1)^2 + y^2 \qquad (x-\xi)^2 + y^2$$

se as duas primeiras forem racionais, temos que x e y^2 são racionais. Para que a terceira distância também seja racional é necessário que ξ seja raiz de uma equação algébrica do segundo grau com coeficientes racionais. Portanto, tomando para ξ um valor irracional como π (que sabemos ser transcendente) obtemos um conjunto S de cardinalidade 3 que responde à questão.

Há horas felizes

Hoje proponho duas variantes de um jogo muito fácil de implementar por duas pessoas, desde que adoptem apostas sensatas e não exorbitem nos valores.

Os jogadores são o Adán e a Hannah. O Adán escolhe mentalmente dois números inteiros diferentes (em $\mathbb{Z}$), escreve cada um deles num papel que esconde, um em cada mão. A Hannah escolhe uma das mãos de Adán para abrir e espreitar o número aí registado. Ao ter conhecimento deste número, ela deve apostar se este é o menor ou o maior dos dois números escolhidos pelo Adán. Se acertar, o Adán paga-lhe um milhão de euros, caso contrário é ela que deve pagar ao seu adversário a mesma quantia.

Claro que se a Hannah apostar por moeda ao ar, terá uma probabilidade de um meio de sair vencedora. Contudo, pode melhorar as suas chances. Isto é, pode usar uma estratégia que lhe garante uma probabilidade de sair vencedora superior a um meio. Como?...

Uma outra variante, também interessante é a seguinte. Em vez de ser o Adán a escolher números, temos um dispositivo que escolhe aleatoriamente dois números reais do intervalo $[0, 1]$ (escolha independente e uniforme). O Adán tem conhecimento dos números e escolhe qual mostrar à Hannah. De novo, esta deve apostar que o número que viu é o menor ou o maior dos dois. Será que pode superar a probabilidade de ganho de um meio, associada à escolha por moeda ao ar?...