Análise e Equações com Derivadas Parciais

Editor Convidado: Lisa Santos

Multiplicador de Lagrange num problema com restrição não constante no gradiente

Assis Azevedo, *Fernando Miranda* e *Lisa Santos*
Departamento de Matemática e Aplicações / Centro de Matemática
Universidade do Minho
e-mail: {assis,fmiranda,lisa}@math.uminho.pt

Resumo: Prova-se a existência de solução, num sentido generalizado, de um problema com um multiplicador de Lagrange, para uma restrição arbitrária no gradiente e condição de Dirichlet homogénea na fronteira. Prova-se ainda a equivalência deste problema com a correspondente inequação variacional elíptica. A abordagem utilizada para provar o resultado de existência baseia-se na utilização de soluções de uma família aproximante de equações quasilineares elípticas.

Abstract We prove the existence of a generalized solution of a Lagrange multiplier problem with an arbitrary gradient constraint and homogeneous Dirichlet boundary condition. We prove the equivalence of this problem with the corresponding elliptic variational inequality. The approach for proving the existence result is based on the use of solutions of a family of quasilinear elliptic approximating equations.

palavras-chave: inequação variacional; restrição no gradiente; multiplicador de Lagrange.

keywords: variational inequality; gradient constraint; Lagrange multiplier.

1 Formulação do problema

Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira lipschitz Γ. Dado $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ não negativo, definimos o convexo fechado

$$\mathbb{K} = \{v \in H_0^1(\Omega) : |\nabla v| \leq \varphi \text{ q.s. em } \Omega\}$$

e a inequação variacional

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v-u) \geq \int_\Omega f(v-u), \quad \forall v \in \mathbb{K}. \tag{1}$$

Dado $f \in L^2(\Omega)$, considere-se o problema de encontrar λ e u verificando

$$
\begin{aligned}
-\nabla\cdot(\lambda\nabla u) &= f \quad \text{em } \mathscr{D}'(\Omega), && \text{(2a)}\\
u &= 0 \quad \text{em } \Gamma, && \text{(2b)}\\
|\nabla u| &\le \varphi \quad \text{em } \Omega, && \text{(2c)}\\
\lambda &\ge 1 \quad \text{em } \mathscr{D}'(\Omega), && \text{(2d)}\\
(\lambda-1)(|\nabla u|-\varphi) &= 0 \quad \text{em } \mathscr{D}'(\Omega). && \text{(2e)}
\end{aligned}
$$

Relativamente à igualdade (2a) provaremos a seguinte formulação, ligeiramente mais forte,

$$
\langle \lambda, \nabla u\cdot\nabla v\rangle_{L^\infty(\Omega)'\times L^\infty(\Omega)} = \int_\Omega fv, \ \forall v\in W_0^{1,\infty}(\Omega), \tag{3}
$$

onde $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{L^\infty(\Omega)'\times L^\infty(\Omega)}$ representa o par dualidade entre $L^\infty(\Omega)'$ e $L^\infty(\Omega)$.

O problema (2) foi tratado por Brezis em [2] no caso em que $\varphi\equiv 1$ e f é constante. Este resultado foi estendido em [5] ao caso em que a restrição satisfaz $\Delta\varphi^2\le 0$. Um problema análogo, com restrição $\varphi\equiv 1$, com um operador mais geral e f não constante, foi estudado, num sentido generalizado, em [3].

2 Existência do multiplicador de Lagrange

Nesta secção apresentamos o teorema de existência de solução (u,λ) do problema (2), indicando também que u é a solução da inequação variacional (1). Serão enunciados os resultados utilizados na demostração deste teorema.

Teorema 1 *Dadas funções $f\in L^2(\Omega)$ e $\varphi\in W^{2,\infty}(\Omega)$ minorada por uma constante positiva, o problema* (2) *tem solução $(u,\lambda)\in W^{1,\infty}(\Omega)\times L^\infty(\Omega)'$. Além disso, se (u,λ) é solução de* (2)*, u resolve a inequação variacional* (1)*.*

Considera-se uma família de problemas aproximados, utilizando uma penalização sugerida em [4],

$$
\begin{aligned}
-\nabla\cdot\left(k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2-\varphi^2)\nabla u^\varepsilon\right) &= f_\varepsilon \qquad \text{em } \Omega, && \text{(4a)}\\
u^\varepsilon &= 0 \qquad \text{em } \Gamma, && \text{(4b)}
\end{aligned}
$$

sendo $k_\varepsilon:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função de classe $\mathscr{C}^2$, não decrescente, convexa e tal que

$$
k_\varepsilon(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } s\le 0,\\ e^{\frac{s}{\varepsilon}} & \text{se } s\ge\varepsilon, \end{cases}
$$

e onde $f_\varepsilon = f*\rho_\varepsilon$, sendo ρ_ε uma função regularizadora e $*$ o operador convolução.

Proposição 2 *Dadas funções $f \in L^2(\Omega)$ e $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ positiva, o problema (4) tem solução única $u^\varepsilon \in \mathscr{C}^{2,\alpha}(\Omega) \cap \mathscr{C}(\bar{\Omega})$.*

Lema 3 *Dadas funções $f \in L^2(\Omega)$ e $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ com um minorante positivo e $1 \leq q < \infty$, existem constantes positivas C e C_q tais que, se $0 < \varepsilon < 1$ e u^ε é a solução do problema aproximado (4) então*

$$\begin{aligned}\|k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2 - \varphi^2)|\nabla u^\varepsilon|^2\|_{L^1(\Omega)} &\leq C,\\ \|k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2 - \varphi^2)\|_{L^1(\Omega)} &\leq C,\\ \|k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2 - \varphi^2)\nabla u^\varepsilon\|_{\boldsymbol{L}^\infty(\Omega)'} &\leq C,\\ \|\nabla u^\varepsilon\|_{\boldsymbol{L}^q(\Omega)} &\leq C_q.\end{aligned}$$

Proposição 4 *Dadas funções $f \in L^2(\Omega)$ e $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ com um minorante positivo, a família de soluções $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ dos problemas aproximados (4) possui uma subfamília que converge fracamente em $H^1_0(\Omega)$ para a solução da inequação variacional (1).*

Teorema 5 *Dadas funções $f \in L^2(\Omega)$ e $\varphi \in W^{2,\infty}(\Omega)$ com um minorante positivo, então as soluções u^ε dos problemas aproximados (4) pertencem a um subconjunto limitado de $H^2_{loc}(\Omega)$.*

Proposição 6 *Dadas funções $f \in L^2(\Omega)$ e $\varphi \in W^{2,\infty}(\Omega)$ com um minorante positivo, se u^ε é a solução do problema aproximado (4) e u é a solução da inequação variacional (1), então*

$$u^\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} u \quad em \quad W^{1,p}_0(\Omega),\ 1 \leq p < \infty$$

e também em $\mathscr{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, para $0 \leq \alpha < 1$.

De seguida apresentam-se os passos mais relevantes da demonstração do Teorema 1. Das estimativas apresentadas no Lema 3 resulta que existe uma subfamília de $(u^\varepsilon)_\varepsilon$, também denotada por $(u^\varepsilon)_\varepsilon$, tal que

$$k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2 - \varphi^2)\nabla u^\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\rightharpoonup} \boldsymbol{\Upsilon} \text{ fraco-}* \text{ em } \boldsymbol{L}^\infty(\Omega)'$$

$$k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2 - \varphi^2) \underset{\varepsilon \to 0}{\rightharpoonup} \lambda \text{ fraco-}* \text{ em } L^\infty(\Omega)'.$$

Mostra-se que

$$\langle \boldsymbol{\Upsilon}, \nabla u \rangle_{\boldsymbol{L}^\infty(\Omega)' \times \boldsymbol{L}^\infty(\Omega)} = \langle \lambda, |\nabla u|^2 \rangle_{L^\infty(\Omega)' \times L^\infty(\Omega)},$$

o que permite concluir que

$$\int_\Omega k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2-\varphi^2)|\nabla(u^\varepsilon-u)|^2 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \langle\boldsymbol{\Upsilon},\nabla u\rangle - 2\langle\boldsymbol{\Upsilon},\nabla u\rangle + \langle\lambda,|\nabla u|^2\rangle = 0. \quad (5)$$

Uma vez que

$$\int_\Omega k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2-\varphi^2)\nabla u^\varepsilon\cdot\nabla v = \int_\Omega k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2-\varphi^2)\nabla(u^\varepsilon-u)\cdot\nabla v + \int_\Omega k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2-\varphi^2)\nabla u\cdot\nabla v = \int_\Omega f_\varepsilon v,$$

usando (5) obtém-se (3).

As demonstrações de (2b), (2c) e (2d) são relativamente simples.

Observando que, por definição de k_ε,

$$\big(k_\varepsilon(|\nabla u^\varepsilon|^2-\varphi^2)-1\big)\big(\varphi^2-|\nabla u^\varepsilon|^2\big)^+ = 0,$$

algumas das relações anteriores permitem concluir (2e).

Os detalhes das demonstrações dos resultados aqui apresentados podem ser consultados em [1].

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CMAT - "Centro de Matemática da Universidade do Minho", através de fundos do FEDER pelo "Programa Operacional Factores de Competitividade - COMPETE" e pela FCT - "Fundação para a Ciência e a Tecnologia", Projeto Est-C/MAT/UI0013/2011.

Referências

[1] A. Azevedo, F. Miranda e L. Santos, Variational and quasivariational inequalities with first order constraints, *J. Math. Anal. Appl. 397* (2013) 738-756.

[2] H. Brezis, Multiplicateur de Lagrange en torsion elasto-plastique, *Arch. Rational Mech. Anal. 49* (1972) 32–40.

[3] V. Chiadò Piat e D. Percivale, Generalized Lagrange multipliers in elastoplastic torsion, *J. Differential Equations 114* (2) (1994) 570–579.

[4] C. Gerhardt, On the existence and uniqueness of a warpening function in the elastic-plastic torsion of a cylindrical bar with multiply connected cross-section, *Joint Sympos., IUTAM/IMU, Marseille, 1975*, pp. 328–342. Lecture Notes in Math., 503. Berlin: Springer, 1976.

[5] L. Santos, Variational problems with non-constant gradient constraints, *Port. Math. (N.S.) 59* (2) (2002) 205–248.

Resultados de existência de soluções fracas para fluidos viscosos incompressíveis

Hermenegildo Borges de Oliveira
FCT - Universidade do Algarve & CMAF - Universidade de Lisboa
e-mail: holivei@ualg.pt

Resumo: Neste trabalho, consideramos o problema de valores inicial e de contorno que modela escoamentos isotérmicos de fluidos incompressíveis com viscosidade dependendo da tensão de corte. Para este problema, estabelecemos a existência de soluções fracas para qualquer $q > 1$, onde q é o expoente de não-linearidade que caracteriza o escoamento.

Abstract In this work we consider the initial-boundary value problem which models isothermal flows of incompressible fluids with shear stress depending viscosity. For this problem, we establish the existence of weak solutions for any $q > 1$, where q is the nonlinearity exponent which characterizes the flow.

palavras-chave: modelo de Sisko; soluções fracas; existência.

keywords: Sisko model; weak solutions; existence.

1 Modelos da Mecânica dos Fluidos

A lei de potência seguinte é um dos modelos mais simples propostos para fluidos com viscosidade dependendo da tensão de corte

$$\mathbf{S} = \mu |\mathbf{D}|^{q-2}\mathbf{D}\,, \quad \mathbf{D} \equiv \mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(\nabla\,\mathbf{u} + \nabla\,\mathbf{u}^T\right)\,, \tag{1}$$

onde $\mathbf{S}$ é a parte desviante do tensor das tensões de Cauchy, $\mathbf{D}$ é a parte simétrica do gradiente do campo das velocidades $\mathbf{u}$, habitualmente designada por tensor das taxas de deformação. Aqui, μ e q representam constantes positivas: μ é um factor de consistência relativo ao modelo de Stokes e q é o expoente que caracteriza o tipo de fluido em análise. Este modelo foi proposto por Ostwald, em 1925, e por De Waele, em 1923, para descrever a viscosidade de soluções coloidais. Posteriormente, o modelo mostrou-se bastante preciso para caracterizar a grande maioria dos fluidos pseudo-plásticos, a que correspondem valores de q tais que $1 < q < 2$ e onde se incluem os champôs, o sangue e a maioria dos fluidos feitos a partir de leite. Por outro lado, este modelo permite recuperar a lei de Stokes quando $q = 2$ ou o modelo de Bingham quando $q = 1$. O sucesso do modelo (1), para além

Encontro Nacional da SPM 2012, Análise e Equações com Derivadas Parciais, pp. 23–26

da sua simplicidade, reside no facto de que também pode ser usado para descrever fluidos dilatantes, a que correspondem valores de q tais que $q > 2$ e onde se incluem o gelo polar, a lava dos vulcões e a areia molhada, quando modelados como fluidos. Dada a sua analogia com a lei de Stokes, os fluidos modelados por (1) são designados por fluidos Newtonianos generalizados. O único inconveniente do modelo (1), é que se deve ter cuidado quando é usado para valores $q > 2$, uma vez que o modelo falha para tensões de corte muito grandes, quando a viscosidade deve, em última análise, aproximar-se de uma constante. De modo a rectificar esta situação, Sisko propôs, em 1958, o modelo seguinte para modelar o escoamento de algumas graxas comerciais,

$$\mathbf{S} = \left(\mu_\infty + \mu|\mathbf{D}|^{q-2}\right)\mathbf{D}, \tag{2}$$

onde μ e q são tal como no modelo (1) e μ_∞ é uma constante positiva que corresponde à viscosidade quando a tensão de corte é muito grande.

2 Apresentação do problema

Neste trabalho, consideramos o problema de valores inicial e de contorno:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 \quad \text{em} \quad Q_T, & (3)\\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{div}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) &= \mathbf{f} - \nabla p + \mathbf{div}\,\mathbf{S} \quad \text{em} \quad Q_T, & (4)\\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 \quad \text{em} \quad \Omega \quad \text{para} \quad t=0, & (5)\\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{sobre} \quad \Gamma_T. & (6) \end{aligned}$$

Aqui p denota a pressão dividida pela densidade do fluido, suposta constante, e $\mathbf{f}$ e $\mathbf{u}_0$ representam as forças externas e a velocidade no instante inicial. Supomos que o fluido está confinado a um domínio espaço-temporal definido por $Q_T = \Omega \times (0,T)$ de fronteira $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0,T)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$, é um domínio limitado com fronteira compacta $\partial\Omega$, e $0 < T < \infty$. Consideremos os espaços habituais da teoria matemática da Mecânica dos Fluidos: $\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega) : \operatorname{div}\mathbf{v} = 0\}$; $\mathbf{H} = \{\text{fecho de } \mathcal{V} \text{ em } \mathbf{L}^2(\Omega)\}$; $\mathbf{V}_q = \{\text{fecho de } \mathcal{V} \text{ em } \mathbf{W}^{1,q}(\Omega)\}$. Por $\mathbf{V}'_q$, denotamos o espaço dual de $\mathbf{V}_q$. Neste texto, estamos interessados na questão da existência de soluções fracas, no sentido de Leray-Hopf, para o problema (3)-(6) .

Definição 1 *Sejam $N \geq 2$, $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}$ e $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^1(Q_T)$. Diz-se que um campo vectorial $\mathbf{u}$ é uma solução fraca do problema (3)-(6), se:*
(1) $\mathbf{u} \in \mathrm{L}^q(0,T;\mathbf{V}_q) \cap \mathrm{C}_{\mathrm{w}}([0,T];\mathbf{H})$ *(no caso do modelo (2) com $1 < q \leq 2$,*

$\mathbf{u} \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathbf{V}_2) \cap \mathrm{C}_{\mathrm{w}}([0,T];\mathbf{H})$*);*
(2) Para todo $\varphi \in \mathbf{C}^\infty(Q_T)$*, com* $\operatorname{div}\varphi = 0$ *e* $\operatorname{supp}\varphi \subset\subset \Omega \times [0,T)$*,*

$$\begin{aligned} &-\int_{Q_T} \mathbf{u}\cdot\varphi_t \, d\mathbf{x}dt + \int_{Q_T} (\mathbf{S}(\mathbf{D}(\mathbf{u})) - \mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\varphi)\, d\mathbf{x}dt \\ &= \int_{Q_T} \mathbf{f}\cdot\varphi \, d\,\mathbf{x}dt + \int_\Omega \mathbf{u}_0 \cdot \varphi(0)\, d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{7}$$

O resultado principal que apresentamos neste trabalho é o seguinte (ver [4]).

Teorema 1 *Seja* Ω *um domínio limitado de* $\mathbb{R}^N$*,* $N \geq 2$*, e suponhamos que*

$$\mathbf{f} = -\mathbf{div}\,\mathbf{F}, \quad \mathbf{F} \in \mathbb{M}^N_{\mathrm{sym}}, \quad \mathbf{F} \in \mathbf{L}^{q'}(Q_T), \qquad \mathbf{u}_0 \in \mathbf{H},$$

onde $\mathbb{M}^N_{\mathrm{sym}}$ *denota o espaço vectorial constituído por todas as matrizes simétricas de ordem* $N \times N$ *e* q' *indica o expoente conjugado de Hölder de* q*. Se* $q > 1$*, então existe uma solução fraca para o problema {(2), (3)-(6)}.*

3 Resultados de existência

Num trabalho que remonta a 1967, Ladyzhenskaya (ver [2]) estabeleceu a existência de soluções fracas para o problema $\{(2), (3)\text{-}(6)\}$, considerando $N = 3$ e $q \geq \frac{12}{5}$, e sob as hipóteses de que $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}$ e $\mathbf{f} \in \mathrm{L}^2(Q_T)$. Pouco depois, em 1969, Lions [3] estabeleceu a existência de soluções fracas para o problema $\{(1), (3)\text{-}(6)\}$ e para qualquer $N \geq 2$. Sob as hipótese de que $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}$ e $\mathbf{f} \in \mathrm{L}^{q'}(0,T;\mathbf{V}'_q)$, o resultado de [3] estabelece a existência de soluções $\mathbf{u} \in \mathrm{L}^q(0,T;\mathbf{V}_q) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbf{H})$ tais que (7) é satisfeita para todo $\varphi \in \mathrm{C}^1(0,T;\mathbf{V}_q)$. As demonstrações em [2] e [3] usam aproximações de Galerkin com argumentos de compacidade, juntamente com a teoria dos operadores monótonos. A melhoria no resultado apresentado em [3], relativamente a [2], reside no facto de que a inclusão contínua $\mathrm{L}^q(0,T;\mathbf{V}_q) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbf{H}) \hookrightarrow \mathrm{L}^{q\frac{N+2}{N}}(Q_T)$ implica que $\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} : \mathbf{D}(\mathbf{v})$ é limitado em $\mathbf{L}^1(Q_T)$ para todos $\mathbf{u},\ \mathbf{v} \in \mathrm{L}^q(0,T;\mathbf{V}_q) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbf{H})$, desde que $q \geq \frac{3N+2}{N+2}$.

Mais ou menos 40 anos depois, Zhikov [6] foi bem sucedido em melhorar os resultados [2, 3] para o problema $\{(1), (3)\text{-}(6)\}$. A ideia principal da sua demonstração, consistiu num processo de regularização do tensor $\mathbf{S}$ e depois usar os resultados de Ladyzhenskaya e Lions. A seguir, observou que a inclusão de Sobolev $\mathrm{L}^q(0,T;\mathbf{V}_q) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbf{H}) \hookrightarrow \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{L}^{2q'}(\Omega))$ implica que $\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} : \mathbf{D}(\mathbf{v})$ é limitado em $\mathbf{L}^1(Q_T)$ para todos $\mathbf{u},\ \mathbf{v} \in \mathrm{L}^q(0,T;\mathbf{V}_q) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbf{H})$, desde que $q \geq \max\left\{\frac{3N}{N+2}, \frac{N+\sqrt{3N^2+4N}}{N+2}\right\}$. A passagem ao limite foi bem conseguida graças a alguns argumentos da Teoria da Medida.

Ainda antes de Zhikov, Wolf [5] estabeleceu a existência de soluções fracas, no sentido de (7), para o problema (3)-(6) tendo por base um modelo geral que incluía os casos (1) e (2), e sob as hipóteses de que $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}$, $\mathbf{f} = -\mathbf{div}\,\mathbf{F}$ e $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^{q'}(Q_T)$. A parte fulcral da demonstração reside no facto das inclusões contínuas $\mathrm{L}^q(0,T;\mathbf{V}_q) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;\mathbf{H}) \hookrightarrow \mathrm{L}^{q\frac{N+2}{N}}(Q_T)$ e $\mathrm{L}^q(0,T;\mathbf{V}_q) \cap \mathrm{L}^{q\frac{N+2}{N}}(Q_T) \hookrightarrow \mathrm{L}^s(Q_T)$ implicarem que $\mathrm{div}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})\cdot\varphi$ é limitado em $\mathbf{L}^s(Q_T)$ para toda a truncatura L^∞ de $\mathbf{u}$, aqui denotada por φ, e para algum $s > 1$, desde que $q > 2\frac{N+1}{N+2}$. Como as funções de teste construídas já não tinham divergência nula, houve primeiro que recuperar a pressão na formulação fraca, usando para isso uma versão do Teorema de De Rham. A seguir, o autor usou a decomposição harmónica de funções em L^q para decompor a pressão numa função mensurável e noutra singular, com respeito à medida de Lebesgue, e poder passar ao limite nos termos resultantes.

Por fim, o resultado [5] foi melhorado em [1] para valores de q tais que $\frac{2N}{N+2} < q < 2$, com $N > 2$. Em [1], a principal inovação em relação a [5], foi uma aplicação bem sucedida do método da truncatura de Lipschitz.

Pelo exposto, resulta que o caso de $1 < q \leq \frac{2N}{N+2}$, com $N > 2$, seria um problema em aberto. O Teorema 1 vem resolver este problema no caso do modelo (2). A demonstração do Teorema 1 usa, também, os resultados de [5] para decompor a pressão, bem como o método da truncatura de Lipschitz desenvolvido em [1]. O principal ingrediente da demonstração, consiste numa utilização optimal dos resultados de compacidade de Aubin-Lions, o que permite provar a existência de soluções fracas para todo $q > 1$.

Referências

[1] L. Diening, M. Růžička e J. Wolf. Existence of weak solutions for unsteady motions of generalized Newtonian fluids. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Csi.* **5** (2010), IX, 1–46.

[2] O.A. Ladyzhenskaya. *The mathematical theory of viscous incompressible flows.* Gordon and Breach Science Publishers Inc., New York, 1969.

[3] J.-L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.* Dunod, Paris, 1969.

[4] H.B. de Oliveira. On the existence for the Sisko problem. Submetido. Preprint disponível em `http://w3.ualg.pt/~holivei/Sisko.pdf`.

[5] J. Wolf. Existence of weak solutions to non-Newtonian fluids with shear rate dependent viscosity. *J. Math. Fluid Mech.* **9** (2007), no. 1, 104–138.

[6] V. Zhikov. New approach to the solvability of generalized Navier-Stokes equations. *Funct. Anal. Appl.* **43** (2009), no. 3, 190–207.

A NOTE ON NONLINEAR KdV-TYPE EQUATIONS

Nabil Bedjaoui
LAMFA-CNRS UMR 7352 & INSSET-UPJV
Rue Raspail, 48
02100 Saint Quentin, France
e-mail: nabil.bedjaoui@u-picardie.fr

Joaquim M. C. Correia
DMat-ECT & CIMA-IIFA, UÉvora
CAMGSD-LARSyS, IST
Rua Romão Ramalho, 59
7000-671 Évora, Portugal
e-mail: jmcorreia@uevora.pt

Resumo Consideramos aproximações da equação de Burgers sem viscosidade por equações de tipo Korteweg-de Vries (KdV), não-lineares. Em Brenier e Levy [1] conjetura-se que nalguns casos a dispersão não-linear leva a um comportamento dissipativo quando em geral se espera fosse dispersivo, à semelhança do caso linear. Nós damos aqui estimativas a priori suficientes para a prova do primeiro passo de uma prova disso.

Abstract We consider the approximation of the inviscid Burgers equation by nonlinear Korteweg-de Vries (KdV) type equations. It has been conjectured by Brenier and Levy [1] that in some special kind of nonlinear dispersion the behaviour is dissipative, when generally we expect a dispersive behaviour as in the linear case. We provide here a priori estimates enough to establish the first step in a proof of the conjecture above.

palavras-chave: Equação de tipo KdV; equação de Burgers sem viscosidade; onda de choque; solução fraca entrópica; solução com valores medidas; dispersão; dissipação.

keywords: KdV-type equation; inviscid Burgers equation; shock wave; entropy weak solution; measure-valued solution; dispersion; dissipation.

1 Introduction

We consider the family of initial value problems with a common initial datum $u(x,0) = u_0(x)$ for the KdV-type equations (depending on the given g function)

$$u_t + uu_x = \delta\, g(u_{xx})_x \tag{1}$$

and its formal limit problem as $\delta \searrow 0$, with limit equation

$$u_t + uu_x = 0, \tag{2}$$

the inviscid Burgers equation. The proper KdV equation corresponds to the case where $g(v) = v$ and if the initial datum u_0 is not an increasing function, then we know that the formal limit solution, the entropy weak solution of (2), has shock waves and the KdV equation has a dispersive behaviour: as $\delta \searrow 0$ the KdV solution, where shocks are smoothed by the emission of highly oscillatory waves at the shock fronts, develops more and more, regular and irregular, oscillations with higher and higher frequency and hence does not converge to the formal limit solution (after the critical time where shocks became to emerge, see Lax and Levermore [4]).

However, if $g(v) = -|v|$ or $g(v) = -v^2$ Brenier and Levy[1] [1] showed through numerical work a dissipative behaviour of the solutions of these nonlinear KdV equations and they conjectured the strong convergence as $\delta \searrow 0$ to the entropy weak solution. This shows the high contrast between the effects of regularity for the smoothing of solutions of (2) given by different third-order approximations. Here we present a first and fundamental step to the analytical proof of that conjecture.

2 A weak* compactness

We use the setting given by Tartar-Schonbek-DiPerna-Szepessy on Young measure-valued solutions. For this framework, cf. Correia and LeFloch [2] and references therein; see also Correia and Sasportes [3] for other related problems.

Let $\{u^\delta\}_{\delta>0}$ be the family of solutions of equations (1) till an uniform time T. To have a candidate to the entropy measure-valued solution of equation (2) over $[0,T]$, it is enough to show that the family $\{u^\delta\}_{\delta>0}$ is bounded in some space $L^\infty\left((0,T); L^p(\mathbb{R})\right)$, $p > 2$. Our purpose is to establish a priori conditions to this end.

We begin by multiplying equation (1) by $(\alpha+1)u|u|^{\alpha-1}$ to get

$$\begin{aligned} \left(|u|^{\alpha+1}\right)_t + \frac{\alpha+1}{\alpha+2}\left(u|u|^{\alpha+1}\right)_x &= (\alpha+1)\,\delta\left(u|u|^{\alpha-1}g(u_{xx})\right)_x \\ &\quad -(\alpha+1)\,\alpha\,\delta\,|u|^{\alpha-1}u_x g(u_{xx}). \end{aligned}$$

Then we integrate the above equation over $\mathbb{R}\times[0,t]$, assuming the solutions are rapidly decreasing as $|x|\to\infty$, to obtain the

[1] We want to thank prof. Zuazua for bringing this reference to our attention.

Lemma 1 *Let $\alpha \geq 1$ and $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be any dispersion function. The solution of equation* (1) *satisfies for $t \in [0,T]$*

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^{\alpha+1}\,dx \quad + \quad (\alpha+1)\,\alpha\,\delta \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |u|^{\alpha-1}\,u_x\,g(u_{xx})\,dxds$$
$$= \quad \int_{\mathbb{R}} |u_0|^{\alpha+1}\,dx\,.$$

Usually, taking $\alpha = 1$, we deduce in this way the first a priori L^2 energy estimate. It is not the case here, unless the factor δu_x of $g(u_{xx})$ is always negative (g will be always negative).

From now on, we assume that the function g as well their first and second primitives, which we will handle next, are homogeneous functions. Lets say $g(v) = -|v|^n$, $n \geq 1$. Then, using the multipliers $3(|u_x|u_x)_x$ and $3(u_x^2)_x$ we obtain:

$$\begin{aligned}(3\,u_t\,|u_x|\,u_x)_x \;-\; (|u_x|^3)_t &= \cdots\\ &= -\left(2\,|u_x|^3\,u\right)_x + 2\,|u_x|^3\,u_x\\ &\quad -\left(6\,\delta\,\frac{n}{n+1}\,|u_x|\,|u_{xx}|^n\,u_{xx}\right)_x\\ &\quad +6\,\delta\,\frac{n}{n+1}\,\mathrm{sgn}(u_x)\,|u_{xx}|^{n+2}\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3\,u_t\,u_x^2)_x \;-\; (u_x^3)_t &= \cdots\\ &= -\left(2\,u_x^3\,u\right)_x + 2\,u_x^4\\ &\quad -\left(6\,\delta\,\frac{n}{n+1}\,u_x\,|u_{xx}|^n\,u_{xx}\right)_x\\ &\quad +6\,\delta\,\frac{n}{n+1}\,|u_{xx}|^{n+2}.\end{aligned}$$

Now, we add the two equations above and integrate over $\mathbb{R} \times [0,t]$. If we abbreviate as $\mathcal{U}^+$ the set $\{(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T] : \delta\,u_x > 0\}$ or their section by $t = s$ as ${\mathcal{U}_s}^+$, we have

Lemma 2 *Let $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be the negative positively homogeneous dispersion function $g(v) = -|v|^n$, $n \geq 1$. The, each solution of equation* (1) *satisfies for $t \in [0,T]$*

$$\int_{{\mathcal{U}_t}^+} |u_x(t)|^3\,dx + 6\,|\delta|\,\frac{n}{n+1} \int_0^t \int_{{\mathcal{U}_s}^+} |u_{xx}|^{n+2}\,dxds$$
$$+2\,\mathrm{sgn}(\delta) \int_0^t \int_{{\mathcal{U}_s}^+} |u_x|^4\,dxds$$
$$= \int_{{\mathcal{U}_0}^+} |u_0'|^3\,dx\,.$$

And after few, little and nonessential improvements on the previous estimates, if we proceed similarly to Correia and LeFloch [2] or Correia and Sasportes [3]), we can claim the

Proposition 1 *Let $\delta > 0$ and $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a negative positively homogeneous dispersion function of degree $n \in [1, 2]$. The solutions of* (1) *are bounded in $L^\infty\big((0,T); L^{m(n)}(\mathbb{R}) \cap L^{M(n)}(\mathbb{R})\big)$ where $m(n) = 1 + \frac{n+5}{2n+1}$ and $M(n) = 2 + 2\frac{n+10}{5n+2}$.*

So, if we return to the conjecture of Brenier and Levy [1], we have proved here the existence of an Young measure sublimit of the bounded family of solutions in the space

- $L^\infty\big((0,T); L^3(\mathbb{R}) \cap L^{5+1/7}(\mathbb{R})\big)$ in the case where $g(v) = -|v|$;
- $L^\infty\big((0,T); L^{2+2/5}(\mathbb{R}) \cap L^4(\mathbb{R})\big)$ in the case where $g(v) = -v^2$.

N.B. We can rephrase these results for any strictly convex flux function and we can also treat the case of any negative positively homogeneous dispersion function of degree $n \in [1, 6]$.

References

[1] Y. Brenier and D. Levy, Dissipative behavior of some fully non-linear KdV-type equations, *Physica D*, Vol. 137 (2000), pp. 277-294.

[2] J.M.C. Correia and P. LeFloch, Nonlinear Diffusive-Dispersive Limits for Multidimensional Conservation Laws, *Advances In Nonlinear Partial Differential Equations And Related Areas*, World Sci. Publ., ISBN 978-981-02-3664-9, River Edge, NJ, 1998, Eds. G-Q Chen, Y. Li, X. Zhu, D. Chao, pp. 103-123.

[3] J.M.C. Correia and R. Sasportes, Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws, *IRF'2009, Integrity, Reliability and Failure (Challenges and Opportunities)*, Edições INEGI, ISBN 978-972-8826-22-2 and 978-972-8826-21-5, Porto, 2009, Eds. J.F. Silva Gomes, Shaker A. Meguid, Refs. S2506_A0358 and S2506_P0358.

[4] P.D. Lax and C.D. Levermore, The small dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation. III, *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 36, No. 6 (1983), pp. 809-829.

Problema de camada limite: equações de Navier-Stokes e de Euler

N.V. Chemetov
CMAF/Universidade de Lisboa, Av. Prof. Gama Pinto, 2
1649-003 Lisboa, Portugal, e-mail: chemetov@ptmat.fc.ul.pt

F. Cipriano
GFM e Dep. de Matemática FCT-UNL, Av. Prof. Gama Pinto 2
1649-003 Lisboa, Portugal, e-mail: cipriano@cii.fc.ul.pt

Resumo: Neste trabalho é considerado um fluido viscoso e incompressível num domínio limitado bidimensional com fronteiras permeáveis. A impermeabilidade é caracterizada por uma condição de fronteira do tipo "Navier-slip". O objetivo deste trabalho consiste no estudo assintótico do fluido viscoso, quando a viscosidade tende para zero. É provado que o fluxo limite corresponde a solução das equações de Euler com a mesma condição de fronteira sobre a região de entrada de fluido.

Abstract We consider an incompressible viscous fluid in domains with permeable walls. The permeability is described by the Navier slip boundary condition. The goal is to study the fluid behavior at vanishing viscosity. We show that the vanishing viscous limit is a solution of the Euler equations with the Navier slip boundary condition on the inflow region of the boundary.

palavras-chave: Condições de fronteira de "Navier-slip", limite viscoso, camada limite de fronteira

keywords: Navier slip boundary conditions, vanishing viscosity, boundary layer

1 Introdução

Consideramos as equações de Navier-Stokes para um fluido viscoso e incompressível num domínio limitado de $\mathbb{R}^2$ e estudamos a convergência (até à fronteira) das suas soluções quando a viscosidade tende para zero. Uma vez que o conhecimento do comportamento destas soluções para pequenos valores da viscosidade é crucial para compreender os fenómenos de turbulência, a resolução matemática deste problema terá relevantes consequências em diversos ramos da engenharia (tecnologia que envolve transferência de calor e massa) tais como construção naval e aeroespacial, etc..

Quando as equações de Navier-Stokes são consideradas com a habitual condição de fronteira de Dirichlet, o estudo assintótico, quando a viscosidade tende para zero (também designado limite viscoso), das suas soluções é um problema clássico em mecânica dos fluidos. Apesar dos esforços de inúmeros matemáticos este problema continua em aberto, sendo conhecidos apenas alguns resultados parciais ([3], [6]). A condição de Dirichlet implica a aderência das partículas do fluido à fronteira criando uma camada limite muito forte.

Durante muito tempo a condição de fronteira de Dirichlet foi considerada como natural, no entanto teorias recentes e resultados experimentais [2] têm evidenciado o escorregamento das partículas de fluido sobre a superfície ou parede que o delimita, isto é, as partículas de fluido deslocam-se sobre a superfície a uma velocidade diferente da velocidade da superfície. Condições de fronteira apropriadas para descrever estes processos físicos foram inicialmente sugeridos por Navier em 1823 e são designadas por condições de "Navier-slip". Estas condições tornaram-se mais efetivas com a criação de novos materiais permitindo obter superfícies cada vez mais lisas.

A camada limite conduz à separação do fluido, acabando por destruir a regularidade do fluxo no interior do domínio. Diferentes tentativas foram feitas ao longo dos anos, para retardar o início da separação de fluido através do design cuidado das superfícies, criação de superfícies lisas e sistemas de injeção/aspiração. Referimos que Prandtl no seu primeiro artigo em 1904 demonstrou o efeito da aspiração da camada limite, implementado através de um corte efetuado num lado de um cilindro. Devido ao efeito de sucção, o fluxo adere ao cilindro e a separação é evitada. Durante o século XX, uma extensa pesquisa foi desenvolvida na indústria aeroespacial através da aplicação de dispositivos de injeção/aspiração de forma a controlar as camadas limite turbulentas (ver [5]).

Os fenómenos de escorregamento e injeção/aspiração, como discutido anteriormente, são descritos por condições de fronteira não homogéneas de "Navier-slip". O objetivo deste trabalho é investigar o problema assintótico das soluções de Navier-Stokes, com estas condições de fronteira, quando a viscosidade tende para zero.

2 Resultado principal

O movimento de um fluido viscoso e incompressível num domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é descrito pelas equações de Navier-Stokes

$$\mathbf{v}_t + \mathrm{div}\,(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \bigtriangledown p = \nu \Delta \mathbf{v}, \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0 \quad \text{em} \quad \Omega_T := (0,T) \times \Omega, \quad (1)$$

adicionando uma condição inicial

$$\mathbf{v}(0,\mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega, \qquad \text{tal que} \qquad \operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0, \tag{2}$$

onde $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t,\mathbf{x})$ representa a velocidade, $p = p(t,\mathbf{x})$ a pressão e ν a viscosidade do fluido. Vamos admitir que o fluxo de fluido atravessa a fronteira $\Gamma \in C^2$ do domínio Ω. Esta condição é descrita pela designada condição de fluxo

$$\mathbf{v} \cdot \mathsf{n} = a \qquad \text{sobre } \Gamma_T := (0,T) \times \Gamma \tag{3}$$

e pela condição de "Navier-slip"

$$2D(\mathbf{v})\mathsf{n} \cdot \mathsf{s} + \alpha \mathbf{v} \cdot \mathsf{s} = b \qquad \text{sobre } \Gamma_T. \tag{4}$$

O operador $D(\mathbf{v}) := \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T]$ é designado tensor das deformações; n é a normal exterior a Γ e s é o vetor tangente a Γ. A quantidade a de fluido que entra e sai do domínio através de Γ satisfaz a condição $\int_\Gamma a(t,\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0$, $\forall t \in [0,T]$. As funções $\alpha = \alpha(t,\mathbf{x})$ e $b = b(t,\mathbf{x})$ descrevem as propriedades físicas da fronteira Γ.

O objectivo deste trabalho consiste em provar que as soluções $\mathbf{v}_\nu$ do sistema de Navier-Stokes (1)-(4) convergem até à fronteira, quando a viscosidade tende para zero, para uma solução do sistema de Euler

$$\mathbf{v}_t + \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \bigtriangledown p = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{em} \quad \Omega_T \tag{5}$$

com condições inicial e de fronteira (2)-(3), e (4) somente sobre a região de Γ_T onde $a < 0$.

Os dados iniciais são considerados nos seguintes espaços de Banach:

$$\begin{aligned} a &\in W_1^1(0,T; W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma)) \cap L_2(0,T; W_p^{2-\frac{1}{p}}(\Gamma)), \quad \alpha \in L_\infty(\Gamma_T), \\ \mathbf{v}_0 &\in W_p^1(\Omega), \quad b \in L_2(0,T; W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma) \cap W_1^1(0,T; W_p^{-\frac{1}{p}}(\Gamma)) \end{aligned} \tag{6}$$

para algum $p \in (2, +\infty)$.

O primeiro resultado, obtido no trabalho [1], é a *convergência fraca* de $\mathbf{v}_\nu$ para $\mathbf{v}$ em $L_2(0,T; W_p^1(\Omega))$.

Theorem 1 *Assumindo as hipóteses (6), obtêm-se as seguintes estimativas* $||\mathbf{v}_\nu||_{L_\infty(0,T;\, W_p^1(\Omega))} \leqslant C, \qquad ||\partial_t(\mathbf{v}_\nu - \mathbf{a})||_{L_\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leqslant C$. *Consequentemente, existe uma subsucessão de* $\mathbf{v}_\nu$, *tal que*

$$\mathbf{v}_\nu \rightharpoonup \mathbf{v} \qquad \textit{fracamente-* em } L_2(0,T; W_p^1(\Omega)). \tag{7}$$

A função limite $\mathbf{v}$ *é solução das equações de Euler (5), satisfazendo as condições inicial e de fronteira (2)-(3).*

Observamos que o teorema anterior está incompleto uma vez que ainda não provamos que $\mathbf{v}$ satisfaz a condição de "Navier-slip"(4) sobre a região da fronteira Γ onde há entrada de fluido. Esta condição para $\mathbf{v}$ será estabelecida no próximo resultado. Mostraremos ainda que a convergência (7) é forte para a topologia W_p^1. A ideia crucial consiste na aplicação do método da entropia [4]. No artigo [4] é demostrado que as soluções viscosas de equações parabólicas convergem para soluções das correspondentes equações hiperbólicas nonlineares relativamente à topologia L_∞. No trabalho [1] estendemos o método da entropia para as equações de Navier-Stokes e Euler, provando a *convergência forte* de $\mathbf{v}_\nu$ para $\mathbf{v}$ na topologia W_p^1.

Theorem 2 *Assumindo as hipóteses (6), existe uma subsucessão* $\mathbf{v}_\nu$ *de soluções do sistema (1)-(4), tal que*

$$\mathbf{v}_\nu \quad \to \quad \mathbf{v} \qquad \textit{fortemente em } L_r(0,T;W_p^1(\Omega)), \quad \forall r \in (1,\infty).$$

O limite $\mathbf{v}$ *é solução das equações de Euler, satisfazendo (2)-(3) e a condição de "Navier-slip"(4) sobre a região da fronteira* Γ *onde* $a < 0$.

Referências

[1] N.V. Chemetov, F. Cipriano, "The inviscid limit for the Navier-Stokes equations with slip condition on permeable walls". Submetido.

[2] W. Jager, A. Mikelic, "On the roughness-induced effective boundary conditions for a viscous flow", *J. Diff. Equations*, 96–122, **170** (2001).

[3] O.A. Oleinik, V.N. Samokhin, *Mathematical models in boundary layer theory*, Chapman&Hall/CRC, 1999.

[4] F. Otto, "Initial-boundary value problem for a scalar conservation law", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 729–734, **322**, n. 8 (1996).

[5] H. Schlichting, K. Gersten, *Boundary-layer theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York (2003).

[6] R. Temam, X. Wang, "Boundary Layers Associated with Incompressible Navier–Stokes Equations: The Noncharacteristic Boundary Case", *J. Diff. Equations*, 647–686, **179**, n. 2, (2002).

Sobre uma estimativa para a dimensão do núcleo de um operador integral singular com deslocamento não carlemaneano

Rui Marreiros
Departamento de Matemática
FCT, Universidade do Algarve
8005-139, Faro, Portugal
e-mail: rmarrei@ualg.pt

Resumo: Vamos considerar um operador integral singular com deslocamento não carlemaneano no espaço $L_2^n(\mathbb{R})$. Supondo satisfeitas determinadas condições para a propriedade de Fredholm do operador, é obtida uma estimativa para a dimensão do núcleo do operador considerado.

Abstract We consider a singular integral operator with non-Carleman shift on the space $L_2^n(\mathbb{R})$. Supposing that certain Fredholmness conditions for the operator are satisfied, an estimate for the dimension of the kernel of the considered operator is obtained.

palavras-chave: Operadores integrais singulares; operadores de deslocamento; dimensão do núcleo.

keywords: Singular integral operators; shift operators; kernel dimension.

1 Introdução

No espaço de Hilbert $L_2^n(\mathbb{R})$ vamos considerar o operador integral singular com deslocamento

$$T = I - cUP_+ : L_2^n(\mathbb{R}) \to L_2^n(\mathbb{R}), \tag{1}$$

onde I é o operador de identidade, $c \in C^{n\times n}(\mathring{\mathbb{R}})$ é uma função matricial contínua na recta real compatificada a um ponto $\mathring{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$,

$$(U\varphi)(t) = \varphi(t + \mu)$$

é o operador de deslocamento isométrico correspondente ao deslocamento não carlemaneano $\alpha(t) = t + \mu$, com $t \in \mathring{\mathbb{R}}$ e μ um número real fixo,

$$P_\pm = \frac{1}{2}(I \pm S)$$

são os operadores de projecção complementares associados ao operador de integração singular com núcleo de Cauchy

$$(S\varphi)(t) = (\pi i)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\tau)(\tau - t)^{-1} d\tau.$$

O operador T também pode ser escrito na forma $T = (I - cU)P_+ + P_-$; notemos que, para o operador integral singular com deslocamento em $L_2^n(\mathbb{R})$

$$T(A_1, A_2) = A_1 P_+ + A_2 P_-,$$

onde

$$A_1 = a_1 I + b_1 U, \quad A_2 = a_2 I + b_2 U,$$

e $a_1, a_2, b_1, b_2 \in C^{n\times n}(\overset{\circ}{\mathbb{R}})$, a teoria de Fredholm (critério para a propriedade de Fredholm do operador, cálculo do índice do operador) é conhecida (veja [2]). A teoria da solubilidade (cálculo dos números de defeito do operador, determinação de bases nos subespaços do núcleo e conúcleo do operador, outras propriedades espectrais) é menos conhecida, mesmo no caso de um operador com deslocamento de Carleman (veja [5]). No caso de um deslocamento não carlemaneano, destaca-se o trabalho pioneiro de Baturev, Kravchenko e Litvinchuk [1]. Este trabalho foi o ponto de partida para os trabalhos conjuntos do autor com Kravchenko, [3] e [4], que revisitaremos no presente artigo.

Em [1] foi obtida uma estimativa para a dimensão do núcleo do operador T, no caso escalar e na circunferência unitária $\mathbb{T}$, i.e., com

$$T = I - cUP_+ : L_2(\mathbb{T}) \to L_2(\mathbb{T}),$$

onde $(U\varphi)(t) = |\alpha'(t)|^{\frac{1}{2}} \varphi(\alpha(t))$ e α é um deslocamento não carlemaneano em $\mathbb{T}$ com um conjunto finito de pontos fixos $\{\tau_1, ..., \tau_s\}$. Mostrou-se que: para toda a função contínua $c \in C(\mathbb{T})$ tal que

$$|c(\tau_j)| < 1, \quad j = \overline{1, s},$$

existe um polinómio

$$r(t) = \prod_{k=1}^{m} (t - \lambda_k), \quad |\lambda_k| > 1, \quad k = \overline{1, m},$$

tal que se verifica a condição

$$\left| r(t)c(t)r^{-1}(\alpha(t)) \right| < 1, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Nestas condições foi obtida a estimativa

$$\dim\ker T \leq m.$$

De seguida vamos considerar o operador T com coeficiente matricial (1); uma das condições suficientes para a propriedade de Fredholm deste operador é que todos os valores próprios da matriz $c(t)$ em ∞ (o único ponto fixo do deslocamento considerado) se encontrem no interior do círculo unitário. Nestas condições é obtida a estimativa (4) para a dimensão do núcleo do operador T. Este resultado pode ser considerado como a generalização natural, do caso escalar para o caso matricial, do resultado obtido em [1].

Tendo em conta a limitação de espaço, omitimos as demonstrações e mencionamos apenas a bibliografia essencial. Para além das demonstrações e referências bibliográficas adicionais, o leitor interessado encontrará nos artigos citados outras estimativas para a $\dim\ker T$, obtidas sob as diferentes condições suficientes para a propriedade de Fredholm do operador T.

2 O caso matricial

No que se segue, denotamos por $\mathbb{T}_+(\mathbb{T}_-)$ o interior (exterior, respectivamente) do círculo unitário e por $\sigma(g)$ o espectro de uma matriz $g \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Proposição 2.1 *[3] Para toda a função matricial contínua $d \in C^{n\times n}(\overset{\circ}{\mathbb{R}})$ tal que*

$$\sigma[d(\infty)] \subset \mathbb{T}_+,$$

existe uma matriz racional r tal que

$$\max_{t\in\overset{\circ}{\mathbb{R}}} \left\| r(t)d(t)r^{-1}(t+\mu) \right\|_2 < 1 \tag{2}$$

e

$$P_+ r^{\pm 1} P_+ = r^{\pm 1} P_+. \tag{3}$$

As matrizes racionais r que satisfazem as condições (2) e (3) têm os elementos da forma $r_{i,j}(t) = p_{i,j}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)$, onde $p_{i,j}$ é um polinómio, $i, j = \overline{1,n}$ (i.e., $r_{i,j}$ é uma função racional cujos zeros se encontram no semi-plano inferior e não tem polos). Denotemos por R_d o conjunto de todas estas matrizes racionais r, por $l_1(r)$ o número inteiro

$$l_1(r) = \sum_{i=1}^{n} \max_{j=\overline{1,n}} l_{i,j},$$

onde $l_{i,j}$ é o grau do elemento $r_{i,j}(t) = p_{i,j}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)$ da matriz racional r, e

$$l(d) = \min_{r \in R_h} \{l_1(r)\}.$$

Tem lugar o seguinte resultado.

Proposição 2.2 *[3] Seja T o operador definido por (1), onde a função matricial c satisfaz as condições da Proposição anterior. Então é válida a estimativa*

$$\dim \ker T \leq l(c). \tag{4}$$

Referências

[1] Baturev, A. A., Kravchenko, V. G. and Litvinchuk, G. S.. "Approximate methods for singular integral equations with a non-Carleman shift", *Journal of Integral Equations and Applications*, vol. 8, n. 1, 1996, pp. 1-17.

[2] Kravchenko, V. G. and Litvinchuk, G. S.. *Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift*, Mathematics and its Applications, vol. 289, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

[3] Kravchenko, V. G. and Marreiros, R. C.. "An estimate for the dimension of the kernel of a singular operator with a non-Carleman shift", *Factorization, Singular Operators and Related Problems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003, pp. 197-204.

[4] Kravchenko, V. G. and Marreiros, R. C.. "On the kernel of some one-dimensional singular integral operators with shift", *The Extended Field of Operator Theory*, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 171, Birkhauser Verlag, Basel, 2007, pp. 245-257.

[5] Litvinchuk, G. S.. *Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift*, Mathematics and its Applications, vol. 523, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[6] Marreiros, R. C.. "Sobre o núcleo de operadores integrais singulares com deslocamento não Carlemaneano", Tese de Doutoramento, Universidade do Algarve, Portugal, 2006.