Ensino da Matemática

Editor Convidado: Paula Reis

José Afonso Martins, Marília Pires
Matemática Escolar e Astronomia 41

António Caetano
MATEAS: ao serviço da educação matemática no ensino superior 45

Susana Fernandes
Ensinando métodos de representação proporcional – O método de Hamilton e os paradoxos 49

Helena Monteiro, Maria João Afonso, Marília Pires
Testes de escolha múltipla: construção de itens 53

Ana C. Conceição, José C. Pereira, Cátia M. Silva, Cristina R. Simão
Software Educacional em Pré-Cálculo e Cálculo Diferencial: O Conceito F–Tool 57

Ilda Reis, Edite Cordeiro, Manuel Delgado
Dinâmica do desdobramento de sólidos geométricos com recurso ao GeoGebra $2D$ 61

Álvaro Anjo
Cálculo Sistemático em Excel 65

Matemática Escolar e Astronomia

José Afonso Martins
Agrupamento de Escolas D. José I
Monte Gordo, Vila Real de Santo António
e-mail: `jose.arm@gmail.com`

Marília Pires
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade do Algarve
e-mail: `mpires@ualg.pt`

Resumo: A astronomia é uma área em que a matemática é uma ferramenta fundamental. Para além de ser possível encontrar problemas que requerem cálculos complexos e elaborados, existem também problemas envolvendo apenas matemática escolar e, portanto, adequados às aprendizagens dos alunos. Neste artigo apresentamos alguns exemplos destes problemas.

Abstract Mathematics is an essential tool in astronomy. Astronomy can involve very elaborate and complex calculations, but also allows to find applications involving only school mathematics and, so, being appropriated to basic and secondary school students. In this paper some possible activities are presented.

palavras-chave: Astronomia; Matemática escolar; Resolução de problemas.

keywords: Astronomy; School Mathematics; Problem solving.

1 Introdução

Como é sabido, a matemática tem aplicações em inúmeras áreas, o que nem sempre é refletido nos exercícios que se fazem nas aulas. Sem querer desvalorizar a importância do estudo da matemática formal, a resolução de problemas reais pode levar os alunos a sentirem-se mais motivados pelo estudo da disciplina, bem como aumentar o seu conhecimento matemático.

São apresentadas algumas propostas de atividades que envolvem problemas de astronomia e que podem ser resolvidas em contexto escolar, mostrando assim um campo de possibilidades para as aulas de matemática no ensino básico e secundário. O objetivo é incentivar os professores de matemática a introduzi-las nas suas práticas letivas. Espera-se que estas atividades possam proporcionar um enriquecimento das aulas que contribua para o conhecimento matemático dos alunos.

Para o ensino básico, as caraterísticas dos planetas, tais como dimensões, distâncias e períodos relacionados com os seus movimentos, podem ser utilizados na aprendizagem dos números (inteiros, decimais, frações, percentagens) e das operações, bem como na organização e tratamento de dados. Fenómenos que se desenrolam ao longo do tempo, como a variação da luz das estrelas, podem ser uma boa oportunidade para a construção e estudo de gráficos de funções. A determinação das posições dos corpos celestes, que envolve referenciais e coordenadas relativas a esses referenciais, permite a introdução destes conceitos em contexto real.

No ensino secundário, a trigonometria, as funções exponenciais e logarítmicas usam-se de forma natural em aplicações na astronomia. Como exemplo, são apresentados três problemas envolvendo fórmulas que usam estas funções.

I. Determinar a magnitude, M, de um objeto no zénite (a 90° de altitude) tendo em consideração a sua magnitude, m, observada numa determinada posição com altitude h: $M = m + 5\log\sin(h)$. A magnitude está relacionada com a intensidade luminosa. Esta varia com a altitude devido à influência da atmosfera.

II. Determinar a magnitude, M, do objeto menos brilhante que é possível observar com um telescópio de abertura D, tendo em consideração a magnitude ml do objeto menos brilhante observado a olho nu: $M = ml + 5\log\left(\frac{D}{10}\right)$. É importante para saber que telescópio se pode usar, ou... comprar!

III. Determinar o número real de meteoros, por hora, ZHR, de uma determinada chuva, a partir do número observado, n, conhecendo a constante r que depende da origem dos meteoros observados, o valor da magnitude limite, ml, e a altitude do radiante, A, (o radiante é a zona do céu onde aparentemente se originam os meteoros): $ZHR = \frac{n \times r^{6{,}5-ml}}{\sin A}$. Meteoro é o fenómeno luminoso que vulgarmente se designa por estrela cadente e que todos já viram, pelo menos na televisão.

Embora as fórmulas apresentadas nestes exemplos sejam funções de mais de duas variáveis, é possível, e realista, fixar algumas e estudar assim funções de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, de acordo com os programas do ensino secundário.

2 Propostas de atividades

As três propostas de atividades que se seguem, sugerindo os níveis de ensino em que poderão ser aplicadas, são apresentadas de forma mais completa.

Conforme o nível dos alunos estas propostas podem ser mais ou menos desenvolvidas.

Proposta 1 - Frações e percentagens - 2º ciclo

1. Fornecendo as seguintes 4 fotografias da Lua e a informação de que a percentagem da face iluminada é, em cada foto, aproximadamente, 35%, 50%, 80% e 100% (não por esta ordem). Pedir ao aluno que escreva, abaixo de cada figura, a percentagem iluminada correspondente.

   

2. Na fase de Lua Nova, a Lua está invisível; nos quartos crescente e minguante pode-se observar 50% da face voltada para a Terra e na Lua Cheia está totalmente visível.

A partir da informação sobre a fração da face visível da Lua em determinadas datas de 2012 fornecida na seguinte tabela

Data	21/04	26/04	29/04	02/05	06/05	13/05	16/05	20/05
Fração Iluminada	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	0

é possível colocar várias questões sobre as datas de ocorrência da Lua Nova ou da Lua Cheia, ou sobre as datas em que a Lua apresentou visível 50% ou 75% da face voltada para a Terra. Acrescentando ainda a informação de que quanto maior for a fração iluminada, mais brilhante está a Lua, é ainda possível pedir para indicar o dia em que a Lua estava mais brilhante, ou um período em que a Lua aumente de brilho e outro em que diminua.

Proposta 2 - Regularidades - 2º e 3º ciclos

Tal como o Sol e a Lua, os restantes astros também nascem e se põem devido ao movimento de rotação da Terra. Mas o movimento de translação faz com que os astros exteriores ao Sistema Solar nasçam, se ponham ou se encontrem numa determinada posição todos os dias mais cedo, cerca de 4 minutos, do que no dia anterior.

1. O Movimento anual aparente das estrelas

Se uma estrela nascer hoje às 23:15, a que horas nascerá daqui a um mês (30 dias)?

2. As horas de observação

A observação de uma galáxia torna-se viável quando ela se encontra a partir de uma determinada altura do horizonte, o que ocorre 1h20m depois de nascer. Supondo que essa galáxia nasce hoje às 23h50, a partir de que horas será viável a sua observação dentro de dez dias?

Proposta 3 - Funções trigonométricas - Ensino Secundário

Como é sabido, a Lua apresenta fases. A face voltada para a Terra tem uma fração iluminada, excepto na fase de Lua Nova. Essa fração depende da posição relativa entre a Terra, o Sol e a Lua. A função que permite calcular a fração iluminada do disco lunar é $k\left(\alpha\right) = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$, em que k é a fração iluminada do disco lunar, $\alpha \in [0, \pi[$ é o ângulo Terra-Lua-Sol, isto é, considerando a Lua como o vértice do ângulo. Esta função pode ser estudada, por exemplo, no que diz respeito ao contradomínio e aos extremos, podendo os resultados ser interpretados no contexto. Pode-se também pedir para determinar os valores de α para os quais a Lua esteja iluminada numa determinada percentagem e ainda pedir para fazer um esboço da posição relativa dos três astros nessa situação.

Referências

[1] David Galadí Henriques, J.G., *Astronomia General - Teórica y pratica*, Ediciones Omega S.A., Barcelona, 2001.

[2] International Meteor Organization, *Handbook for meteor observers*, IMO, Potsdam, 2008.

[3] Meeus, Jean, *Astronomical Algorithmics*, Willmann-Bell, Inc, Virginia, 2000.

[4] Ros, Rosa Maria, *La Musica de las Esferas - Astronomia y matemáticas*, Espanha, 2011.

MATEAS: ao serviço da educação matemática no ensino superior

António Caetano
Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro
3810-193 Aveiro, Portugal
e-mail: `acaetano@ua.pt`

Resumo: Apresenta-se o serviço MATEAS (acrónimo para "Matemática: ensino e avaliação no (ensino) superior") como uma plataforma que permite a divulgação e partilha online de experiências pedagógicas realizadas na área da matemática no âmbito do ensino superior.

Abstract The service MATEAS (achronym based on the Portuguese spelling of "Mathematics: teaching and assessment in higher education") is introduced as a platform which allows online spreading and sharing of pedagogical experiences made in the area of mathematics in the framework of higher education.

palavras-chave: ensino; avaliação; matemática; superior; partilha.

keywords: teaching; assessment; mathematics; higher; sharing.

1 Introdução

Quando se discutem os problemas do ensino da matemática em Portugal quer-me parecer que está quase sempre a pensar-se no ensino não superior (veja-se, por exemplo, a secção de "ensino" na página da própria SPM).

No entanto, existem problemas no ensino da matemática a nível superior e existem com certeza algumas soluções tentadas, algumas porventura com resultados positivos, outras nem tanto. E existe com certeza muita repetição de erros, muito começar do zero, já que não há um meio adequado de divulgação sobre o que se vai fazendo: imaginem que os resultados das nossas áreas de investigação não eram divulgados, ou que determinado colega se põe a tentar resolver um problema de matemática na sua área sem ter o cuidado de verificar o estado da arte ou de estabelecer uma base de contactos que lhe permita manter-se atualizado. É inconcebível, não é? No entanto esse é o estado atual da *praxis* do ensino da matemática a nível superior em Portugal.

A nível dos ensinos básico ou secundário, existe um enquadramento governamental para aquilo que pode ser feito: existem programas nacionais, existe alguma avaliação de manuais escolares, existe oferta de formação complementar (a própria SPM sendo bastante ativa nestas duas últimas vertentes). A própria comunidade de docentes desses níveis de ensino mobiliza-se mais facilmente com vista a propósitos comuns e tem por exemplo um veículo de divulgação nas revistas da APM.

Embora longe de mim preconizar uma uniformização das práticas a nível do ensino superior, aflige-me o desconhecimento sobre o que se vai fazendo nas várias instituições para resolver problemas comuns. Situação muito diferente do que, por exemplo, se passa no Reino Unido, onde o Maths, Stats & OR Network (`http://www.mathstore.ac.uk/`) serve de exemplo do muito que se poderia fazer nesta área também em Portugal.

Apesar de tudo, algo tem sido feito no sentido da partilha de experiências de ensino/avaliação na área da matemática no ensino superior: veja-se, por exemplo, as quatro comunicações realizadas na sessão temática IV (Ensino Superior) no Encontro Nacional da SPM realizado em 2010, no grupo das sessões temáticas sobre o ensino da matemática (`http://www.enspm10.ipleiria.pt/portal/enspm?p_id=1738`). Infelizmente, não foram incluídas nas atas desse encontro (publicadas num número especial do Boletim da SPM já de si difícil de encontrar). O que quer dizer que a partilha dessa informação teve um alcance muito limitado relativamente ao que realmente poderia ter.

Outro exemplo é o do interessante artigo [1], publicado na secção "Fórum sobre o ensino da matemática" num número recente do Boletim da SPM. No entanto, ao lê-lo, algumas dúvidas me surgiram sobre a implementação do método que é aí descrito. Poderia ter endereçado essas dúvidas à mesma secção do Boletim, mas as mesmas só seriam publicadas seis meses depois e a resposta da autora poderia eventualmente só aparecer outros seis meses mais tarde. É claro que poderia contactar diretamente a autora por e-mail (o que, aliás, fiz), mas uma resposta através de um e-mail que me é somente dirigido não beneficia mais ninguém.

2 Proposta

Foi com o objetivo de facilitar a partilha de informação do teor acabado de discutir que um grupo de colegas da Universidade de Aveiro criou o serviço MATEAS (`http://mateas.wikidot.com`), cuja página de entrada pode ser vista na Figura 1.

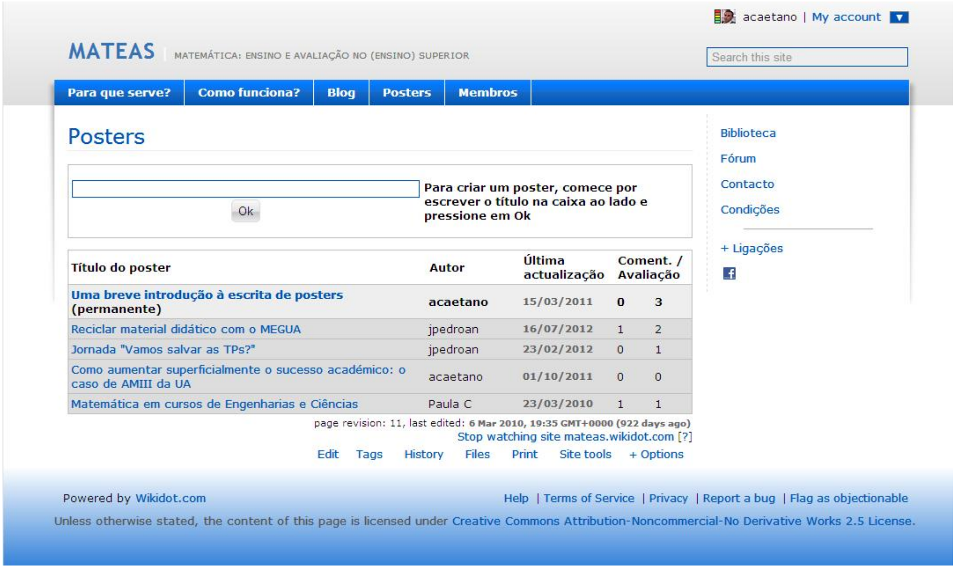

Figura 1: Página (personalizada) de entrada do MATEAS.

Tem estado a funcionar a nível experimental desde há dois anos, mas está na altura de o dar a conhecer a um universo mais alargado de potenciais utilizadores. O que tem neste momento para oferecer de conteúdo é ainda muito pouco, porque a produção se tem centrado basicamente na equipa que gere o sítio. No entanto, a ideia é mesmo aprender mais do que ensinar através do que lá for partilhado e a existência deste serviço só faz sentido se houver uma comunidade de colegas com vontade de aí partilhar as suas experiências e opiniões no âmbito do que acima foi descrito. Serve, assim, esta comunicação também como uma "call for applications" para esse efeito. Termino com uma descrição de alguns aspetos deste serviço. Como complemento, é possível também fazer uma visita guiada ao sítio em causa seguindo a ligação `http://prezi.com/v3-nrr4veipf/mateas/`.

- Informação sobre o nível de participação no sítio acima pode ser lida no próprio, servindo o pouco conteúdo que ainda contém neste momento pelo menos como exemplo do que se pode fazer. Uma das principais ideias de força para a sua criação foi a possibilidade de publicar lá aquilo a que chamamos posters. Um poster não tem aqui exatamente o sentido que lhe é dado em encontros científicos, pois pode ter o formato de um artigo convencional. Não quisemos, no entanto, dar-lhe o nome de artigo para não darmos a ideia de que teria que ser algo com esse nível de acabamento ou extensão. Para nós um poster pode simplesmente ser o relatório de uma experiência pedagógica. Ou pode (e temos um exemplo disso) conter as atas de um encontro para discutir questões pedagógicas. E estas atas podem conter vídeos (como no exemplo que disponibilizamos), assim como qualquer outro poster ou outra comunicação feita no MATEAS pode conter vídeo.

- É também possível participar no blog, no fórum, e até na construção da biblioteca. E todos os textos que se escrevem no MATEAS, quer seja nos posters, no blog, no fórum ou nos comentários a qualquer um destes itens, podem facilmente conter simbologia matemática, já que o sistema usado suporta o LaTeX.

- Tudo isto está montado de modo a todo o processo de publicação poder ser feito essencialmente em autogestão (como vários colegas interessados nestes temas, temos também uma outra vida que passa pela investigação em áreas que nada têm a ver com o ensino, de modo que queremos gastar o nosso tempo somente com o que é essencial). A avaliação da qualidade do que lá for publicado é deixada para os comentários que podem ser feitos *a posteriori* a qualquer peça aí publicada, de modo que esse tipo de controlo pode também automaticamente ser feito pela comunidade interessada. No caso dos posters é mesmo possível usar um sistema de votação anónima de apreciação positiva ou negativa e observar em cada momento o *saldo* de uma tal votação.

Referências

[1] I. Laboriau, "Instrução Personalizada na Matemática Universitária", *Boletim da SPM*, No. 64 (maio de 2011), pp. 55-65.

Ensinando métodos de representação proporcional - O método de Hamilton e os paradoxos

Susana Fernandes
Universidade do Algarve FCT DM
Campus de Gambelas
8005-139 Faro, Portugal
e-mail: sfer@ualg.pt

Resumo: O atual programa da disciplina Matemática Aplicada a Ciências Sociais (MACS) do ensino secundário inclui nos seus conteúdos programáticos métodos de representação proporcional; uns de origem norte-americana e outros de origem europeia. O método de Hamilton (norte-americano) foi há muito abandonado por estar sujeito a diversos paradoxos. Neste documento são expostas as características deste método que tornam possível a ocorrência de paradoxos. Conhecer estas caraterísticas permite ao professor construir exercícios que confrontem os alunos com a existência destes paradoxos.

Abstract The subject of proportional representation is currently taught in portuguese high schools. It is included in the syllabus of a course dedicated to Applications of Mathematics in Social Sciences (MACS). The methods taught are north-american and european. The north-american Hamilton's method was deprecated a long time ago due to it's paradoxes. We will focus on the characteristics of this method which allow paradoxes to happen. By mastering these characteristics a teacher can recreate test cases where such paradoxes occur.

palavras-chave: MACS ; Hamilton ; paradoxos.

keywords: MACS ; Hamilton ; paradoxes.

1 Introdução

O atual programa da disciplina Matemática Aplicada a Ciências Sociais (MACS) do ensino secundário inclui, sob o tema da teoria da partilha equilibrada, a representação proporcional, que é uma aplicação da teoria da divisão proporcional no caso discreto. No entanto a maioria dos professores de matemática não teve formação nesta área e os materiais de apoio existentes são escassos e apresentam algumas lacunas.

O que é a representação proporcional? Nos Estados Unidos da América cada estado recebe um número de lugares no parlamento proporcional à sua população, segundo o último censo realizado. Em inúmeros países da Europa, como é o caso de Portugal, cada lista eleitoral recebe um número de mandatos no parlamento proporcional ao número de votos obtidos nas eleições.

Porque são necessários métodos para determinar uma representação proporcional? Seja P o número total de cidadãos, que se distribuem por N estados, sendo p_i o total da população do estado i. Seja M o número total de mandatos a distribuir pelos estados, de acordo com a sua proporção populacional (p_i/P). Seja $D = P/M$ o divisor que representa o número de cidadãos representados por cada mandato. A quota de mandatos no parlamento do estado i será $q_i = M \times p_i/P$ (ou $q_i = p_i/D$), que em geral não é um número inteiro. Encontramos uma solução para o problema ao determinar o número de mandatos m_i a atribuir a cada estado i, sendo os m_i inteiros não negativos tais que $\sum_{i=1}^{N} m_i = M$.

Na disciplina MACS são abordados alguns métodos de representação proporcional de origem norte-americana (Hamilton, Jefferson, Adams, Webster, Huntington-Hill), pelo seu interesse histórico, e os dois métodos de origem europeia mais usados atualmente (D'Hondt e Sainte-Laguë).

O método de Hamilton foi há muito abandonado por estar sujeito aos paradoxos do Alabama, da população e dos novos estados. Neste documento são expostas as características do método de Hamilton que tornam possível a ocorrência destes paradoxos. O conhecimento destas caraterísticas permite ao professor construir exercícios que confrontem os alunos com a existência destes paradoxos.

Todos os restantes métodos de representação proporcional abordados são métodos de divisores modificados, que não estão sujeitos aos paradoxos [1]. Os métodos norte americanos determinam de uma só vez a distribuição dos lugares no parlamento pelos estados, necessitando de algumas iterações até acertar no número total de lugares a distribuir. Os métodos europeus vão distribuindo um a um os mandatos do parlamento pelas listas eleitorais. Na verdade o método de Jefferson e o método de D'Hondt são formas computacionais distintas do mesmo método. O mesmo sucede com os métodos de Webster e de Sainte-Laguë. Já em 1928 Hamilton havia desenvolvido as formas recursivas dos métodos de divisores modificados propostos até então [2].

O artigo [3] apresenta uma descrição dos métodos de divisores modificados evidenciando as diferentes formas computacionais dos mesmos. O livro

[1] apresenta a evolução histórica do problema de representação proporcional no parlamento dos Estados Unidos da América, assim como a formulação matemática do problema e dos métodos para o resolver, incluindo também demonstrações de inúmeras propriedades destes.

2 O método de Hamilton e os paradoxos

O estadista norte americano Alexander Hamilton propôs em 1791 o seguinte método para resolver o problema da representação proporcional dos estados no parlamento: (1) - Uma vez definido D, calcular a quota de cada estado ($q_i = p_i/D$). (2) - Atribuir a cada estado um número de lugares igual à sua quota mínima ($m_i = \lfloor q_i \rfloor$). (3) Se sobrarem lugares por atribuir, adicionar um lugar por estado, por ordem decrescente da parte decimal da sua quota ($q_i - \lfloor q_i \rfloor$), até completar o parlamento.

No final do século XIX foi detetado que este método estava sujeito ao que ficou conhecido como o paradoxo do Alabama; que ocorre sempre que, mantendo os valores das populações dos estados e aumentando o total de mandatos a distribuir, há um estado que perde um mandato. No início do século XX descobriu-se que o método de Hamilton está também sujeito aos paradoxo da população e paradoxo dos novos estados. O primeiro acontece quando, mantendo-se o total de mandatos a distribuir e tendo um estado A uma taxa de crescimento populacional superior à de um estado B, o estado A perde um lugar para o estado B. O segundo ocorre quando a inclusão de um novo estado, sendo acrescentados ao parlamento o número de lugares correspondentes à sua quota populacional, provoca alterações na distribuição de lugares dos restantes estados.

Porque é que isto acontece? Ao atribuir os mandatos extra pela parte decimal da quota o método de Hamilton desvia-se do princípio de proporcionalidade [1]. Em geral, a uma variação de quotas em igual proporção não correspondem variações iguais em termos absolutos, sendo que a quotas maiores corresponderá uma maior variação absoluta.

No caso do paradoxo do Alabama, o aumento do número de mandatos ($M' > M$) produz um aumento em igual proporção das quotas de todos os estados ($q'_i = M' \times p_i/P$, $q'_i/q_i = M'/M \ \forall i$), no entanto para estados maiores o aumento absoluto da quota será superior, podendo implicar a perda de um mandato para algum dos estados com menos população, que anteriormente tenha sido contemplado na distribuição dos mandatos extra.

No caso do paradoxo da população, mantendo-se o total de mandatos a distribuir e considerando um aumento populacional, existirão uns estados com uma proporção de crescimento superior à proporção do crescimento global ($p'_k/p_k > P'/P$) e outros com uma taxa de crescimento inferior ($p'_i/p_i < P'/P$). Para aqueles as quotas subirão ($q'_k/q_k > 1$), para estes as quotas diminuirão ($q'_i/q_i < 1$). No grupo de estados com taxas de crescimento inferior à taxa de crescimento global (por exemplo), a mesma proporção de redução da quota em dois estados provocará uma maior redução em valor absoluto da quota do estado com mais população. Assim, poderá ocorrer a perda de um mandato deste estado mais populoso, no hipótese de que antes tenha recebido um dos mandatos extra a distribuir.

No caso do paradoxo dos novos estados, considera-se a inclusão de um novo estado (j), sendo a sua população acrescentada à população total ($P' = P + p_j$), e acrescentando ao parlamento o número de lugares correspondentes à sua quota mínima ($M' = M + \lfloor q_j \rfloor$). Dado o aumento populacional global todos os estados (exceto o novo) vêem as suas quotas diminuir em igual proporção ($q'_i/q_i = (M' \times p_i/P') \,/\, (M \times p_i/P) = M'P/MP'$). A mesma proporção de redução da quota provocará uma maior redução em valor absoluto das quotas de estados com mais população, podendo implicar a perda de mandato para um destes estados, que antes tenha sido contemplado na atribuição de mandatos extra.

Nos diapositivos da comunicação apresentada no ENSPM2012 [4], encontram-se exemplos de aplicação desta análise do método de Hamilton na construção de exercícios para trabalhar em sala de aula.

Referências

[1] M.Balinsky e H. Young, *Fair Representation; Meeting the Ideal of One Man, One Vote*, Bookings Institution Press 2001 (primeira edição em 1982).

[2] E. Huntington, “The Apportionment of Representatives in Congress”, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 30 (1928), pp. 85–110.

[3] S. Fernandes, “Representação proporcional - Métodos dos Divisores”, *Educação e Matemática*, No. 118 (2012), pp. 35–43.

[4] S. Fernandes, “Ensinando métodos de representação proporcional”, Sapientia - Repositório Institucional da Universidade do Algarve, 2012, `http://hdl.handle.net/10400.1/1654`

Testes de Escolha Múltipla: Construção de Itens

Helena Monteiro
Esc. Sup. Tecnologia de Abrantes
Instituto Politécnico de Tomar
e-mail: `helena.monteiro@ipt.pt`

Maria João Afonso
Faculdade de Psicologia
Universidade de Lisboa
e-mail: `mjafonso@fp.ul.pt`

Marília Pires
Fac. Ciências e Tecnologia
Universidade do Algarve
e-mail: `mpires@ualg.pt`

Resumo: Se os itens de escolha múltipla, de um teste de avaliação académica, forem construídos de acordo com diretrizes técnicas, os resultados do teste tendem a ser mais fiáveis. Neste artigo, apresentam-se algumas dessas diretrizes.

Abstract If the multiple-choice items, of an educational test, are constructed according to technical guidelines, test scores tend to be more reliable. In this article, we explore some of these guidelines.

palavras-chave: Teste de avaliação académica; diretrizes para construção de itens; itens de escolha múltipla.

keywords: educational test; items construction guidelines; multiple choice items.

1 Teste de avaliação académica e item

Um teste de avaliação académica é, também, um meio para aperfeiçoar o processo de ensino e aprendizagem - os objetivos e os métodos de ensino, definidos pelo professor ou outros agentes educativos, podem ser reformulados em função de indicadores obtidos na análise dos resultados do teste. Estes, naturalmente, devem ser de confiança, que é tanto maior, quanto maior é o grau de precisão do teste e a sua adequação aos objetivos. Por sua vez, estas propriedades dependem das técnicas de construção do teste. Em particular, da sua unidade básica - o item.

O item é composto por um enunciado (pergunta, afirmação incompleta ou instrução que solicita uma resposta), por condições fixadas para a resposta e pelo método de pontuação. Quanto ao formato, pode classificar-se como item de resposta construída (resposta elaborada sem informações além das do enunciado) ou item de escolha múltipla (resposta selecionada entre várias opções apresentadas). No primeiro caso, distingue-se entre itens de resposta aberta e de resposta fechada; no segundo, entre o tipo convencional, alternativa, verdadeiro-falso, associação e outros, definidos em Haladyna, Downing e Rodriguez (2002). Cada formato de item tem características que o tornam mais adequado aos conteúdos a avaliar, às condições de aplicação do teste ou à natureza dos avaliados. Relativamente aos itens de resposta construída, os de escolha múltipla apresentam, entre outras, as seguintes vantagens: a pontuação é mais objetiva e fiável, podendo ser feita de modo automático; o grau de dificuldade não aumenta para quem tem dificuldades de expressão; são respondidos mais rapidamente, o que permite abranger mais conteúdos da matéria a avaliar. Uma das desvantagens é o nível de dificuldade da sua construção.

2 Diretrizes para a construção de itens de escolha múltipla

Escrever um item de escolha múltipla requer muita imaginação e engenho. Exige também a consideração de um conjunto de regras ou diretrizes de escrita, básicas na construção deste tipo de itens, estabelecidas por peritos como Moreno, Martinez e Muñiz (2002) e Haladyna *et al.* (2002). Apresentam-se, de seguida, algumas dessas diretrizes, adaptadas do último artigo referido, que devem orientar (e facilitar) o trabalho de construção dos itens de escolha múltipla convencionais, os mais utilizados e vulgarmente conhecidos por, apenas, itens de escolha múltipla - constituídos por um enunciado e três a cinco alternativas de resposta, ou opções, sendo uma delas correta (a chave) e as outras erradas (os distratores); para responder ao item, o avaliado deve indicar a alternativa de resposta que considera certa.

Relativamente ao conteúdo: Cada item deve envolver um conteúdo específico e um único processo cognitivo, de acordo com o definido previamente; devem ser evitados conteúdos demasiado gerais e demasiado específicos; devem ser evitados itens com rasteiras; o conteúdo de um item deve ser independente do conteúdo dos outros itens do teste.

Relativamente ao estilo e ao formato: As alternativas de resposta devem ser colocadas na verical, não na horizontal; o tempo de leitura do item deve ser o menor possível (evitar palavreado excessivo); o vocabulário do item deve ser simples e ajustado ao nível de leitura dos destinatários; deve ser feita a revisão de cada item (uma regra prática: se, no final da revisão de um teste, foram localizados três erros, provavelmente ficou um por encontrar).

Relativamente à redação do enunciado: as instruções devem ser o mais claras possível (ao ler o enunciado, o estudante deve saber logo o que o item foca); o enunciado deve ser o mais curto possível; o enunciado deve ser escrito na positiva, evitando o NÃO e o EXCETO (se, com cuidado, forem usadas palavras na negativa, elas devem ser escritas com letras maiúsculas e a negrito).

Relativamente à formulação das alternativas de resposta: a posição da resposta certa deve variar entre os itens e ser aleatória; as alternativas de resposta devem ser colocadas numa ordem lógica ou numérica; a alternativa "Nenhuma das anteriores"deve ser usada com moderação; evitar usar a opção "Todas as anteriores"; usar erros típicos dos estudantes para escrever os distratores; o comprimento das opções deve ser sensivelmente o mesmo; evitar alternativas de resposta que dão pistas para a resposta certa; as opções devem ser independentes e não sobrepostas; os distratores devem ser plausíveis (funcionais); criar o maior número possível de opção efetivas, mas duas ou três podem ser suficientes. Estas últimas regras são ilustradas nos seguintes itens mal construídos.

1. A soma das idades do João e da Ana é igual a 9 e, daqui a 3 anos, a Ana terá o dobro da idade do João. Portanto, o João
A. Tem menos 5 anos de idade que a Ana.*
B. É um ano mais novo que a Ana.
C. É 2 anos mais novo que a Ana.

2. Qual dos seguintes intervalos de números reais está contido no conjunto solução da inequação $\frac{x^2-9}{x} < 0$?
A. $]0,2[$.*
B. $]0,5[$.
C. $]-\infty,0[$.
D. $[0,3]$.

Quem responder ao acaso ao item 1 terá preferência pela opção que melhor se adapta ao enunciado ou se distingue das outras. Para corrigir o item, a melhor forma não é trocar o 2 com o 5, nas opções A e C, pois ele ficaria com uma rasteira, mas sim escrever as opções de modo homogéneo, no conteúdo e na estrutura gramatical. No item 2, o estudante poderá eliminar a opção D, ao verificar que ela contém o zero, que não pertence ao domínio da inequação, e pensar *se B fosse a resposta certa, também A estaria certa, pelo que B é errada.* Esta sobreposição de opções acaba por limitar a "escolha"do estudante a duas opções. As opções D e B seriam, assim, selecionadas por poucos indivíduos, por não serem distratores plausíveis ou funcionais. De facto, estudos teóricos mostram que se obtém o máximo da informação média, por opção, quando o item tem dois distratores (Lord, 1977) e investigações empíricas concluíram que, num teste bem construído, é raro que um item de escolha múltipla convencional tenha mais de dois distratores funcionais, pelo que não se justifica o esforço necessário para a criação de três distratores plausíveis (Rodriguez, 2005). Daí que, apesar do aumento do número de opções reduzir a probabilidade de se acertar um item por acaso, alguns autores afirmem que o item deve ter, de preferência, três alternativas de resposta.

Do rigor técnico de radação dos itens depende, entre outros fatores, a qualidade do teste. Depois de aplicado, há que analisar as suas características metrológicas e o respetivo impacto nos seus resultados, quer com base na Teoria Clássica dos Testes, quer na Teoria de Resposta ao Item, para averiguar se as medidas proporcionadas pelo teste são suficientemente precisas para se poder estudar, então, se ele mede, de facto, o que se pretende. Uma vez identificados os itens que devem ser revistos para melhorar a qualidade do teste, fecha-se um ciclo do seu processo de construção, um processo que, em rigor, nunca está concluído, pois exige constante escrutínio empírico, revisão de conteúdo e aperfeiçoamento técnico.

Referências

[1] Haladyna, T., Downing, S. & Rodriguez, M. (2002). A review of multiple-choice item-writing guidelines for classroom assessement. *Applied Measurement in Education*, Vol. *15* (3), 309–334.

[2] Lord, F. (1977). Optimal number of choices per item - A comparison of four approaches. *Journal of Educational Measurement*, Vol.*14*, 33–38.

[3] Moreno, R., Martinez, R. & Muñiz, J. (2002). Directrices para la construcción de ítems de elección múltiple. *Psicothema*, *16* (3), 490–497.

[4] Rodriguez, M. (2005). Three options are optimal for multiple-choice items: a meta-analysis of 80 years of research. *Educational Measurement: Issues and Practice*, Vol. *24* (2), 3–13.

Software Educacional em Pré-Cálculo e Cálculo Diferencial: O Conceito F–Tool

Ana C. Conceição, *José C. Pereira*, *Cátia M. Silva*, *Cristina R. Simão*
Faculdade de Ciências e Tecnologia,
Universidade do Algarve
Campus de Gambelas
8005-139 Faro, Portugal
e-mail: aconcei@ualg.pt
unidadeimaginaria@gmail.com
catiamasilva@hotmail.com
cristinasimao@sapo.pt

Resumo: O objetivo principal deste artigo é a divulgação do *software* educacional F-Tool, recentemente distinguido com o prémio Timberlake [1] .

As F-Tool são ferramentas de ensino visuais, dinâmicas e interativas que permitem explorar de uma forma inovadora alguns dos principais conceitos nas áreas de pré-cálculo e cálculo diferencial, nos níveis secundário e universitário. As F-Tool serão, em breve, disponibilizadas para o público em geral no formato CDF [2] .

Abstract The main goal of this article is to present the educational software F-Tool, recently awarded the Timberlake prize [1] .

The F-Tools are visual, dynamic, and interactive teaching tools that allow to explore in an innovative fashion some of the main concepts within precalculus and differential calculus at the secondary and university levels. The F-Tools will soon be made available to the general public in the CDF [2] format

palavras-chave: F-Tool; *Software* Educacional; *Wolfram Mathematica.*

keywords: F-Tool; Educational Software ; Wolfram Mathematica.

1 Tecnologias no estudo de funções

No ensino da matemática e, em particular, no estudo de funções, a recomendação da utilização de software educacional tem como objetivo o sanar

[1]Prémio Timberlake de Melhor Artigo de Jovem Investigador - 1st National Conference on Symbolic Computation in Education and Research, Instituto Superior Técnico, abril de 2012

[2]*Computable Document Format*

das dificuldades que os alunos possuem em associar as representações algébricas com as diversas representações numéricas e/ou gráficas. De facto, o caráter estático das representações matemáticas muitas vezes dificulta a construção do significado, afetando substancialmente a correta interpretação dos conceitos. O novo programa de matemática do 12.º ano reforça que é fundamental apresentar aos estudantes atividades diversificadas tendo em conta a exploração de várias tecnologias. A criação de modelos interativos visuais com o *Mathematica* permite aos alunos explorar conceitos de elevada complexidade e rapidamente adquirir uma compreensão mais profunda dos conteúdos.

2 O conceito F-Tool

O conceito F-Tool foi criado com o objetivo de melhorar o processo de estudo de classes de funções reais de variável real (ver [1] e [2]). Os conceitos a explorar são fundamentais para o currículo de qualquer curso na área das Ciências Exatas. Devido aos vários aspetos gráficos e analíticos envolvidos, estes conceitos representam um desafio considerável de aprendizagem para o aluno típico.

A implementação do conceito F-Tool foi realizado com recurso ao sistema de álgebra computacional *Mathematica*. O *software* educacional utiliza as capacidades de cálculo numérico e simbólico do *Mathematica* de forma a permitir estudar dinâmica e interativamente, e em tempo real, conceitos e propriedades fundamentais do pré-cálculo e cálculo diferencial. Em particular, é possível explorar de forma integrada as noções de domínio de função, de contradomínio, a existência de zeros, a existência de extremos, a existência de pontos de inflexão, a invertibilidade, a derivabilidade, a reta tangente ao gráfico num ponto, as simetrias em relação aos eixos e à origem.

Atualmente encontram-se implementadas F-Tool relativas às classes de funções afim, quadrática, exponencial, logarítmica e trigonométricas.

As F-Tool não são um objeto estático mas sim um programa a ser executado com o qual se interage em tempo real. Em particular, através da alteração dinâmica dos valores dos parâmetros que definem cada classe é possível obter informação analítica rigorosa, apresentada em aritmética exata ou aproximada, bem como informação visual estática e não-estática.

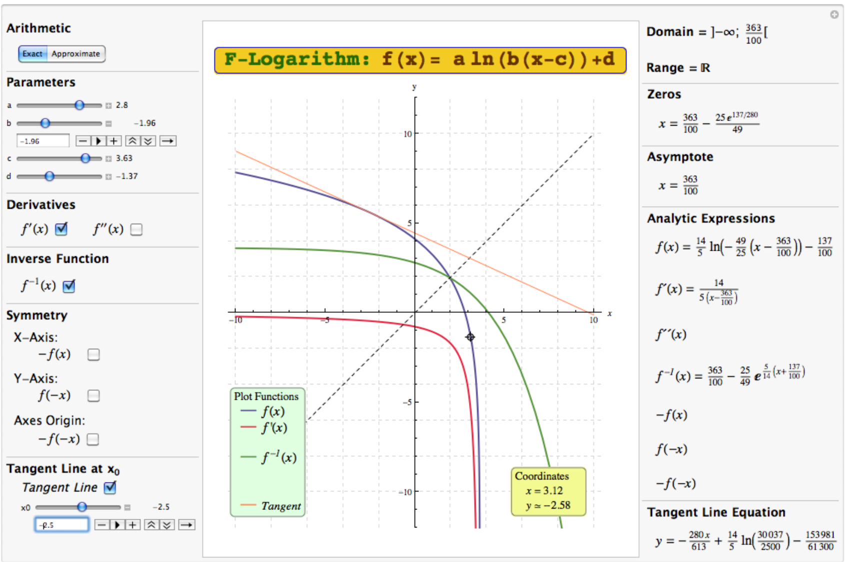

Figura 1: Exemplo de utilização da ferramenta F-Logarithm[3].

3 O conceito F-Tool na sala de aula

O conceito F-Tool na sala de aula permite uma abordagem dinâmica de diversos conceitos relacionados com o estudo de funções, e promove novas formas de raciocinar/pensar, ensinar e aprender. O utilizador das F-Tool deve explorar a possibilidade de alterar os valores dos vários parâmetros que definem cada classe de funções, um a um ou em simultâneo, de forma discreta ou contínua, afim de obter uma compreensão clara dos efeitos analíticos e visuais associados. De igual modo, escolhendo estrategicamente de entre as várias opções de funções, é possível apreender de forma mais eficaz e consequente muitas das relações existentes entre as várias funções e respetivas transformações.

Como exemplo dos princípios de utilização referidos é possível escolher a opção para a 2ª derivada na ferramenta F-Quadratic e variar apenas o parâmetro ‘a‘ de forma contínua. O utilizador deve então questionar-se, ou ser questionado, sobre a relação existente entre os comportamentos gráficos da função quadrática e da sua 2ª derivada, procurando justificar as suas observações com a informação analítica disponibilizada.

Outro bom exemplo de utilização das F-Tool é o cálculo da reta tan-

[3]As F-Tool utilizam um código de cores para diferenciar as várias funções apresentadas. Este código é explicitado na legenda do canto inferior esquerdo do painel central.

gente. Neste caso, é possível variar continuamente a localização do ponto de tangência e observar a reta movimentando-se “ao longo” do gráfico da função. Neste ponto é interessante notar que o computador não possui o conhecimento explícito deste movimento tangencial. O programa simplesmente desenha a função e a reta a partir das respetivas expressões analíticas (igualmente disponíveis). Assim, o utilizador pode melhor assimilar a noção de que é devido à universalidade das relações matemáticas entre estas expressões que a tangência acontece.

Graças à sua interatividade e dinamismo inerentes, as F-Tool são uma excelente ferramenta para estudar modelos matemáticos associados a fenómenos naturais diversos tais como o crescimento de populações, o decaimento radioativo, a variação da temperatura dos corpos, o comportamento do capital segundo a lei dos juros compostos, o comportamento das marés, a iluminação solar ao longo do dia, a pluviosidade ao longo do ano entre outras. Também, devido à sua generalidade, a ferramenta F-Sine é suficiente para o estudo introdutório da teoria de oscilações no plano. Notamos ainda que em problemas concretos cada F-Tool permite obter respostas na forma exata ou aproximada.

4 Notas finais

Acreditamos que o conceito F-Tool, ao dotar professores e estudantes com novas ferramentas para explorar os conceitos fundamentais das áreas de pré-cálculo e cálculo diferencial, desenvolverá positivamente o processo de ensino e de aprendizagem da matemática. Somos mesmo tentados a afirmar: "Calculadoras são para calcular. As F-Tool são para ensinar e aprender".

Referências

[1] Ana C. Conceição, José C. Pereira, Cátia M. Silva, and Cristina R. Simão, “Exploring Precalculus and Differential Calculus with *Mathematica*: The F-Tool Concept”, aceite para publicação em *J. Symbolic Comput.*.

[2] Ana C. Conceição, José C. Pereira, Cátia M. Silva, and Cristina R. Simão, “*Mathematica* in the ClassRoom: New Tools for Exploring Precalculus and Differential Calculus”, *1st National Conference on Symbolic Computation in Education and Research*, AMS Proceedings, 2012. Disponível em: `http://hdl.handle.net/10400.1/1105`.

Dinâmica do desdobramento de sólidos geométricos com recurso ao GeoGebra 2D

Ilda Reis, *Edite Cordeiro*
Instituto Politécnico de Bragança
Campus de Santa Apolónia, Apartado 134
5301-857 Bragança, Portugal
e-mail: ildareis@ipb.pt
emc@ipb.pt

Manuel Delgado
Centro de Matemática, Universidade do Porto
Rua do Campo Alegre, 687
4169-007 Porto, Portugal
e-mail: mdelgado@fc.up.pt

Resumo: O GeoGebra é um software educacional livre que permite manipular objetos matemáticos do plano, representando-os algébrica e geometricamente. Neste artigo recorremos a conceitos matemáticos, como matrizes de mudança de base e transformações lineares, a fim de simularmos a representação de objetos tridimensionais em GeoGebra e implementarmos um procedimento para a planificação de prismas regulares retos.

Abstract: GeoGebra is a free educational software that allows to manipulate mathematical plane objects, representing them algebraically and geometrically. In this paper we use mathematical concepts, such as, change of basis matrices and linear transformations in order to simulate the representation of three-dimensional objects in GeoGebra and to implement a procedure for flattening regular straight prisms.

palavras-chave: demonstração dinâmica; planificação; prisma.

keywords: dynamic proof; net; prism.

1 Introdução e motivação

Em Portugal, à semelhança de outros países, a geometria no plano e no espaço integra os currículos de matemática. A investigação de propriedades de objetos geométricos sem a sua visualização e manipulação pode não permitir desenvolver a perceção dos conceitos envolvidos. Os recursos dinâmicos facilitam a formulação de conjeturas e a posterior justificação e validação. Projetado especificamente para fins educacionais, o software GeoGebra utiliza em simultâneo um sistema de álgebra computacional, um sistema geométrico interativo e um sistema de cálculo, possibilitando uma aprendizagem experimental.

Neste artigo recorremos a sistemas tridimensionais (3D) projetados em ambiente bidimensional (2D), manipuláveis através de parâmetros angulares, para simular a representação de objetos geométricos do espaço e apresentamos um procedimento para uma planificação de um prisma regular reto. Tal pressupõe o desdobramento das linhas poligonais que são as fronteiras das suas bases.

2 Desdobramento de linhas poligonais fechadas

Começamos por rodar um ponto do plano em torno de outro fixo, relacionamos alguns elementos de um polígono regular e procedemos ao desdobramento da linha poligonal de um qualquer polígono regular.

2.1 Rotações no plano e elementos de um polígono regular

A aplicação linear $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que a cada (x, y) associa o ponto obtido pela rotação, em torno da origem $O = (0, 0)$, de uma amplitude θ radianos, no sentido direto, é representada pela matriz de rotação a seguir:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\,sen(\theta) \\ sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

O conjunto $\{u_1, u_2\} = \{(\cos(\theta), sen(\theta)), (-\,sen(\theta), \cos(\theta))\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ (ver, por exemplo [2]), por isso R_θ também se diz uma matriz de mudança de base. O sistema $\{O, u_1, u_2\}$ é um novo referencial ortogonal.

Em geral, a rotação no plano de um ponto $P = (x, y)$ em torno de um ponto $C = (a, b)$, de uma amplitude θ radianos, no sentido direto, é definida por $R_{\theta,C}(x, y) = T^{-1}(R_\theta(T(x, y)))$ onde T é a translação definida por $T(x, y) = (x - a, y - b)$ e R_θ a aplicação acima referida.

Um polígono regular de n lados ($n \geq 3$), $\mathcal{P}_n$, determina, na circunferência circunscrita, arcos cuja medida do ângulo ao centro é de $\eta = 2\pi/n$ radianos, valor coincidente com a medida dos ângulos externos de $\mathcal{P}_n$. Além disso, se as arestas de $\mathcal{P}_n$ medirem ℓ unidades, o raio da tal circunferência é $\frac{\ell}{2\,sen(\frac{\eta}{2})}$.

Seja $V = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ o conjunto dos vértices de $\mathcal{P}_n$ enumerados de forma sequencial e seja $V_{n+1} \equiv V_1$. Sem perda de generalidade, consideramos $V_1 = O = (0, 0)$, $V_2 = (\ell, 0)$ e $C = \left(\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2\,tg(\frac{\eta}{2})}\right)$ o centro da circunferência circunscrita. As coordenadas dos restantes vértices de $\mathcal{P}_n$ obtêm-se aplicando rotações sucessivas, de η radianos, a V_1, em torno de C, isto é, $V_{i+1} = R^i_{\eta,C}(V_1)$ para qualquer $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

2.2 Desdobramento da linha poligonal associada a $\mathcal{P}_n$

Uma rotina para o desdobramento da linha poligonal $\mathcal{LP}_n$ de $\mathcal{P}_n$ é a seguinte: Para todo $i \in \{0, \ldots, n-2\}$

- Rodar o segmento $[V_{n-i}V_{n+1}]$ de uma amplitude de $\eta = 2\pi/n$ radianos (no sentido indireto), em torno de V_{n-i}, para alinhar com a aresta $[V_{n-1-i}V_{n-i}]$ e identificar $R_{\eta,V_{n-i}}(V_{n+1})$ com V_{n+1};
- Juntar o segmento obtido à aresta $[V_{n-1-i}V_{n-i}]$.

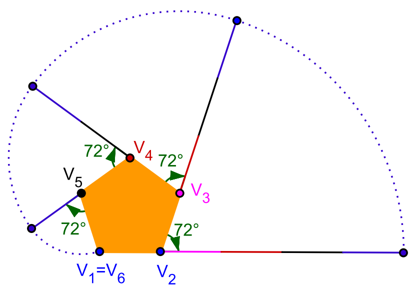

Figura 1: Ilustração da rotina aplicada a $\mathcal{LP}_5$

Não é dificil verificar que $\mathcal{LP}_n$ fica retificada após $n-1$ rotações. Além disso, para $m \in [0, n-1]$, a posição de V_{n+1} é dada por $R_{-\alpha\eta,V_{i_{rot}}}(V_{i_{rot}} + n_l(V_{i_{rot}+1} - V_{i_{rot}}))$, onde $\alpha = m - \lfloor m \rfloor$, $i_{rot} = \lceil n-m \rceil$, $n_l = \lceil m \rceil + \lfloor |\cos(\pi m)| \rfloor$.

3 Planificação de prismas regulares em GeoGebra

Após darmos os fundamentos para a implementação em GeoGebra de referenciais $3D$ projetados e manipuláveis em função de parâmetros angulares e de uma origem livre, um pouco à semelhança do que foi feito em [1], apresentamos uma planificação possível para um prisma regular reto.

3.1 Projeção e manipulação de referenciais tridimensionais

Sejam R_x, R_y e R_z as matrizes de rotação do sistema $\{Oxyz\}$, em torno do eixo x, y e z, de amplitude α, β e φ, respetivamente. A orientação específica de um dado objeto quando submetido a uma sequência das três rotações é determinada pela transformação linear definida pelo produto das três matrizes, que em geral depende da ordem dos fatores.

A projeção de um objeto $3D$ num plano é uma representação $2D$ desse objeto, usualmente designada de perspetiva. A sua posição depende do plano de projeção considerado. Em geral, a projeção de um espaço vetorial V sobre um subespaço $S \subseteq V$ é uma aplicação linear g de V, tal que $g(V) = S$ [2].

Sejam p a projeção ortogonal do sistema $\{O, i, j, k\}$ no plano $\{Oyz\}$ e M_p a matriz que a representa. A aplicação definida por $M = \lambda M_p R_x R_y R_z$, transforma a base canónica de $\mathbb{R}^3$, $\{i, j, k\}$, projetando-a à escala $\lambda \in \mathbb{R}^+$ no plano $\{Oyz\}$, originando os vetores $u = Mi, v = Mj$ e $w = Mk$ de $\mathbb{R}^2$. Dado um ponto $O_T \in \mathbb{R}^2$, a translação associada a $\overrightarrow{OO_T}$ dá origem ao referencial projetado $\{O_T, u, v, w\}$, onde perspetivamos objetos $3D$. Assim, um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é representado no plano de projeção por $O_T + xu + yv + zw$.

3.2 Construção e planificação de prismas regulares retos

Construído, no plano, um polígono regular de n lados de medida ℓ, mergulha-mo-lo em $\mathbb{R}^3$ e representa-mo-lo no referencial $\{O_T, u, v, w\}$, obtendo a base inferior do prisma. A base superior obtêm-se a partir desta aplicando-lhe a translação associada a hw, onde h é a altura do prisma. Unindo os vértices correspondentes das duas bases obtemos as arestas das faces laterais.

Uma planificação possível deste prisma obtém-se aplicando a rotina descrita em 2.2 às linhas poligonais associadas às bases do prisma e rebatendo as bases sobre o plano determinado pelas faces laterais retificadas.

4 Conclusões

Representações dinâmicas de sólidos geométricos permitindo a sua planificação e encaixe efetivam a compreensão dos conceitos envolvidos e podem dar resposta a questões como a do empacotamento.

Referências

[1] Jeong-Eun Park, Young-Hyun Son, O-Won Kwon, Hee-Chan Yang e Kyeong-Sik Choi, "Constructing 3D graph of function with GeoGebra(2D)", 1^{st} *Eurasia Meeting of GeoGebra*, Proceedings, 2010, Eds. Sevinç Gülsecen, Zerrin Ayvaz Reis, Tolga Kabaca, pp. 46–55.

[2] G. Strang, *Linear Algebra and its Applications*, Harcourt Brace Jovanovich College Publishers, New York, 1988.

Cálculo Sistemático em Excel

Álvaro Anjo
Agrupamento de Escolas Dr.ª Laura Ayres
Quarteira
e-mail: `alvaroanjo@gmail.com`

Resumo: Um dos problemas que um professor de matemática enfrenta é determinar rapidamente uma solução que satisfaça um certo conjunto de dados. Isto permite facilmente criar problemas ou verificar as soluções dos alunos. O cálculo sistemático é uma opção interessante: o valor de uma incógnita é determinado logo que uma equação que relaciona aquela variável com outras variáveis seja verdadeira. O cálculo continua sistematicamente para as restantes incógnitas. A implementação deste cálculo em Excel é muito fácil se as equações representarem funções bijetivas. É explicada a construção de uma folha de cálculo para o triângulo.

palavras-chave: cálculo sistemático; folha de cálculo; triângulo.

1 Introdução

Um dos problemas que um professor de matemática enfrenta é determinar rapidamente uma solução que satisfaça um certo conjunto de dados. Isto permite facilmente criar problemas ou verificar as soluções dos alunos. Genericamente a questão é: dado um sistema de equações e sendo conhecidos alguns valores de algumas das variáveis, existirá uma solução do sistema para todas as suas incógnitas? A resolução desta classe de problemas apresenta algumas dificuldades conhecidas quando: a) o conjunto solução é infinito; b) existem intervalos de valores para as variáveis; c) a resolução simultânea das equações conduz a extremos locais que impossibilitam o cálculo da solução. Por estas razões, o cálculo sistemático é uma opção interessante sendo aplicado do seguinte modo: o valor de uma incógnita é determinado logo que uma equação que relaciona aquela variável com outras variáveis é verdadeira. O cálculo sistemático continua para outra incógnita, é escolhida a primeira equação verdadeira, é calculado um valor para incógnita, e assim sucessivamente. Este processo pode continuar até um número limite de iterações ou de tempo e a sua programação é muito fácil se as equações representarem funções bijetivas. O cálculo sistemático pode ser representado por uma topologia em árvore, onde os nós representam as variáveis e os ramos apontam para variáveis dependentes.

Na folha de cálculo, as células horizontais mostram os valores das variáveis (nós) e as colunas são iterações; a determinação dos ramos úteis para a solução final é um processo dinâmico, realizado inteiramente pelo cálculo sistemático. Mais fórmulas por incógnita significam maiores possibilidades da incógnita ser calculada e consequentemente menos iterações para obter a solução completa. Daqui surgem duas visões de programação: mais fórmulas e poucas iterações ou menos fórmulas e mais iterações. A estratégia seguinte revelou-se muito eficaz: primeiro escreve-se uma fórmula por variável, segundo vão-se acrescentando novas fórmulas até que cada iteração determine o valor de pelo menos uma incógnita. Se as equações representam funções bijetivas, então os valores das incógnitas serão determinados inequivocamente e o conjunto solução será único. Quando esta propriedade não é verificada, restrições nas equações devem ser acrescentadas o que dificulta a programação. Para manter a simplicidade, o autor utilizou funções bijetivas como primeira opção e adicionou no fim funções de controlo de solução. Se se verificar solução impossível, por tentativas, restringe-se uma das fórmulas numa variável, até obter uma solução possível. Embora seja explosivo o número de fórmulas em paralelo, o número de fórmulas em série que contribuem para a solução é muito estrito. Por exemplo, uma folha de cálculo do triângulo com 28 variáveis e utilizando 2 a 4 fórmulas por variável, o cálculo completo termina dentro de 8 iterações. O cálculo sistemático determina a função composta (sequência de fórmulas válidas), partindo de um conjunto de variáveis não nulas e da lista de fórmulas por incógnita; este desempenho lógico e aritmético é muito interessante.

2 Escrita das fórmulas

As relações do triângulo utilizadas no ensino básico e secundário incluem: amplitudes de ângulos, comprimento dos lados, funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente), alturas, perímetro e área. As letras $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$, têm o significado usual. As letras $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$, conforme o caso, representam as amplitudes de ângulos ou os ângulos ou os vértices. Algumas fórmulas são explicitadas somente em ordem a uma das variáveis.

Equação da soma das amplitudes dos ângulos internos, A, B, C

$$A + B + C = 180$$

Explicitando vem

$$A = 180 - B - C; \quad B = 180 - A - C; \quad C = 180 - A - B$$

Inequações dos lados, a, b, c

$$|\text{b-c}| \leq \text{ a} \leq \text{ (b+c)}; \quad |\text{a-c}| \leq \text{ b} \leq \text{ (a+c)}; \quad |\text{a-b}| \leq \text{ c} \leq \text{ (a+b)}.$$

Por não serem funções são colocadas no fim, para controlo de solução. Mais tarde, constatou-se que as fórmulas abaixo restringem fortemente os valores de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, pelo que aquelas inequações não são necessárias.

Fórmula dos senos

$$a \div \operatorname{sen} A = b \div \operatorname{sen} B = c \div \operatorname{sen} C$$
$$a = \operatorname{sen} A \times b \div \operatorname{sen} B; \qquad \operatorname{sen} A = a \times \operatorname{sen} B \div b$$
$$A = \operatorname{arcsen}(a \times \operatorname{sen} B \div b)$$

Existem outras fórmulas e igualmente para as variáveis: $\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$,$\boldsymbol{senB}$,$\boldsymbol{senC}$.

Fórmula dos cossenos

$$a = +\sqrt{b^2 + c^2 - 2 \times b \times c \times \cos A}$$
$$\cos A = (b^2{+}c^2 - a^2) \div (2bc); \qquad A = \arccos((b^2{+}c^2 - a^2) \div (2bc))$$

E do mesmo modo para as variáveis: $\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$,$\boldsymbol{cosB}$,$\boldsymbol{cosC}$. A raiz quadrada é uma função parcial pelo que será colocada como última fórmula e com domínio restringido.

Fórmula dos senos e cossenos

$$\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1; \quad \operatorname{sen} A = +\sqrt{1 - \cos^2 A}; \quad \cos A = +\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 A}$$

Perímetro $p = a + b + c$; $a = p - b - c$; $b = p - a - c$; $c = p - a - b$.

Área $\text{area} = a \times \text{alt}A \div 2 = b \times \text{alt}B \div 2 = c \times \text{alt}C \div 2$

Altura $\text{alt}A = c \times \operatorname{sen} B = b \times \operatorname{sen} C = 2 \times \text{area} \div a$

Fórmulas compostas Todas as variáveis precisam de ficar ligadas algebricamente. Visto que o cálculo sistemático determina a fórmula composta (sequência de fórmulas válidas), já não é necessário programar explicitamente funções compostas na folha de cálculo. É suficiente adicionar uma equação que complete a ligação algébrica em alguma das iterações. Por exemplo, se as variáveis $\boldsymbol{altA}$ e $\boldsymbol{senB}$ estão determinadas (por dados ou por cálculo) e o valor da variável $\boldsymbol{c}$ não está determinado e é utilizado no cálculo seguinte, poderá ser suficiente a escrita de uma função de $\boldsymbol{altA}$ e $\boldsymbol{senB}$ no formulário da variável $\boldsymbol{c}$, $c = \text{alt}A \div \operatorname{sen} B$.

3 Programação da folha de cálculo

Programação da célula C2

```
=SE(B2<>””; B2;
SE(E(B3<>””; B9<>””; B8<>””); B3/B9*B8;
SE(E(B4<>””; B10<>””; B8<>””); B4/B10*B8;
SE(E(B3<>””; B4<>””; B21<>””); B21-B3-B4;
```

SE(E(B17<>""; B20<>""); B20/B17*2;
SE(E(B3<>""; B4<>""; B11<>""); (B3^2+B4^2-2*B3*B4*B11)^0,5

Significado das fórmulas

variável ***a*** está na linha 2, ***b*** linha 3, ***senA*** linha 8, ***senB*** linha 9.

SE(B2<>""; B2;

se variável na iteração anterior é diferente de vazio (é verdadeira) então nesta iteração, variável toma valor anterior, a[k+1] = a[k]

SE(E(B3<>""; B9<>""; B8<>""); B3/B9*B8;

se b, $\operatorname{sen} B$, $\operatorname{sen} A$, são verdadeiros, então a fórmula é verdadeira, então calcular variável pela fórmula, a[k+1] = b[k] / $\operatorname{sen} B[k] * \operatorname{sen} A[k]$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		DADOS	Calc 1	Calc 2	Calc 3	Calc 4	Calc 5	Calc 6	Calc 7
2	a	7	7	7	7	7	7	7	7
3	b	6	6	6	6	6	6	6	6
4	c							10,9356	10,93557
5	A º				35,6853	35,6853	35,6853	35,6853	35,68533
6	B º	30	30	30	30	30	30	30	30
7	C º					114,315	114,315	114,315	114,3147
8	sin A			0,58333	0,58333	0,58333	0,58333	0,58333	0,583333
9	sin B		0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
10	sin C						0,9113	0,9113	0,911298
11	cos A					0,81223	0,81223	0,81223	0,812233
12	cos B		0,86603	0,86603	0,86603	0,86603	0,86603	0,86603	0,866025
13	cos C						-0,41175	-0,41175	-0,41175
14	tan A					0,71818	0,71818	0,71818	0,718185
15	tan B		0,57735	0,57735	0,57735	0,57735	0,57735	0,57735	0,57735
16	tan C						-2,21324	-2,21324	-2,21324
17	altura A							5,46779	5,467787
18	altura B							6,37909	6,379085
19	altura C			3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5
20	área								19,13726
21	perim.								23,93557
22	mediana A								8,095888

Figura 1: folha de cálculo do triângulo.

Referências

[1] Sara Mabrouk, *Interactive MS Excel Workbooks* `http://www.frc.mass.edu/smabrouk/`

[2] Peter Sestoft, "Spreadsheet technology", *IT University Technical Report Series* `http://www.itu.dk/people/sestoft/funcalc/ITU-TR-2011-142-2up.pdf`

[3] John Baker, "Spreadsheets in Education, The First 25 Years", *Spreadsheets in Education (eJSiE)*, Vol.1, Iss.1, Article 2, `http://epublications.bond.edu.au/ejsie/vol1/iss1/2`