Jogando no limite

Sílvia Cavadas, *Maria Carvalho*
Departamento de Matemática & Centro de Matemática
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Rua do Campo Alegre, 687, 4169-007 Porto
e-mails: `up090305125@alunos.fc.up.pt`; `mpcarval@fc.up.pt`

Resumo: Considere-se o seguinte jogo entre dois jogadores, após fixarem um conjunto $S \subseteq [0,1]$. O jogador I é o primeiro a jogar, escolhendo x_1 tal que $0 < x_1 < 1$. Em seguida, o jogador II escolhe y_1 verificando a condição $x_1 < y_1 < 1$. Daí em diante, e alternadamente, na sua n-ésima jogada, o jogador I escolhe x_n tal que $x_{n-1} < x_n < y_{n-1}$ e o jogador II selecciona y_n tal que $x_n < y_n < y_{n-1}$. O jogo prossegue indefinidamente, produzindo uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monótona e limitada; o seu limite, α, está em $[0,1]$ e determina quem vence o jogo: o jogador I ganha se $\alpha \in S$; caso contrário, ganha o jogador II. Qual dos jogadores, se algum, tem uma estratégia vencedora? E de que modo isso depende de S?

Abstract: After specifying a subset S of the interval $[0,1]$, two players alternate playing in the following way. Player I moves first, choosing x_1 such that $0 < x_1 < 1$; then player II selects y_1 satisfying the condition $x_1 < y_1 < 1$. On each subsequent turn, each player chooses a real number strictly between the previous two choices: on the nth round, player I picks x_n such that $x_{n-1} < x_n < y_{n-1}$ and then player II selects y_n such that $x_n < y_n < y_{n-1}$. The sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is monotonic and bounded; its limit, α, belongs to $[0,1]$ and decides who is the winner: player I wins if $\alpha \in S$; otherwise, player II wins. Which of the players, if any, has a winning strategy? How does that depend on S?

palavras-chave: Estratégia vencedora; conjunto numerável; conjunto perfeito.

keywords: Winning strategy; countable set; perfect set.

1 Introdução

Esta é uma de inúmeras versões [1, 2, 7, 13] de um jogo proposto por S. Banach e S. Mazur [14] em que há sempre um vencedor mas só depois de uma infinidade de jogadas. Uma *estratégia vencedora* para um jogador é uma regra (em geral, não única) que especifica o que o jogador pode fazer em cada situação de modo a garantir-lhe a vitória independentemente de como o adversário jogue. Na n-ésima jogada, o jogador I conhece $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$ e o conjunto S, e é tudo; a estratégia deve dizer-lhe como jogar a partir destes dados. Uma estratégia vencedora para este jogador é assim uma função $\mathcal{E}_S$ tal que $\mathcal{E}_S(\emptyset) = x_1$ e que, a cada natural n e bloco com $2n$ reais de $]0,1[$ verificando as desigualdades

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < y_n < \cdots < y_2 < y_1,$$

associa um elemento

$$x_{n+1} = \mathcal{E}_S(x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_n, y_n)$$

de $]x_n, y_n[$ de modo que

$$\lim_{m \to +\infty} x_m \in S$$

qualquer que seja a sucessão $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de jogadas do adversário. Analogamente se define estratégia vencedora para o jogador II. Note-se, porém, que este jogo não é simétrico: enquanto o primeiro jogador tenta colocar o limite das suas escolhas em S, ao jogador II resta impedi-lo, retirando-lhe espaço de manobra. Ora, a tão distintos objectivos servem, naturalmente, propriedades distintas de S: ao jogador I interessa ter muitos pontos em S, para aumentar a probabilidade de lá estar o limite α; ao adversário parece ser mais favorável um conjunto S pequeno. O problema é que, em Matemática, há várias formas não equivalentes de medir o tamanho dos conjuntos, e há conjuntos que é difícil etiquetar. A esta acrescenta-se outra dificuldade: como veremos, o desempenho neste jogo depende do sistema de axiomas que se admite em Teoria de Conjuntos [7, 8, 9, 12].

2 Joguemos

Se $S = \emptyset$, é claro que II ganha independentemente do que suceder no jogo; se $S = [0,1]$, é I quem ganha qualquer que seja o modo como ambos joguem. Se S é não vazio e finito, há jogadas mais favoráveis a algum dos jogadores; e, neste caso, II tem uma estratégia vencedora, uma vez que, qualquer que seja a escolha inicial x_1, o jogador II pode seleccionar y_1 tal que $]x_1, y_1[\cap S = \emptyset$: se $x_1 \geq s$, para todo o $s \in S$, qualquer número entre x_1 e 1 lhe serve; caso contrário, se existe $s \in S$ tal que $x_1 < s$, consideramos $s_0 = \min\{t \in S : x_1 < t\}$, que existe pois este conjunto é finito, e basta que II escolha y_1 estritamente entre x_1 e s_0. Como $x_1 < \alpha < y_1$, com esta escolha de y_1 o jogador II garante que $\alpha \notin S$, assegurando a sua vitória independentemente das jogadas seguintes.

Se $S = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, como $0 < x_1 < 1$ e $lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para $k \geq p$, se tem $\frac{1}{k} < x_1$. E portanto o jogo é análogo ao caso anterior uma vez que, depois da primeira jogada, resta apenas um número finito de valores disponíveis em S para o limite α. Por isso, também neste caso o jogador II tem estratégia vencedora.

E com conjuntos S menos triviais? Repare-se que o ingrediente essencial que, quando S é finito, permite a acção vencedora de II é a existência de um intervalo desprovido de pontos de S à direita de x_1. De facto, em geral, podemos afirmar o seguinte:

Proposição 1 *Se, para algum $i \in \mathbb{N}$, x_i não é ponto de acumulação pela direita de S, II assegura a sua vitória na jogada seguinte.*

Prova: Se x_i não é ponto de acumulação pela direita de S, existe $\epsilon > 0$ tal que $]x_i, x_i + \epsilon[\subseteq [0,1] \setminus S$. Então II pode escolher y_i entre x_i e $\min\{x_i + \epsilon, y_{i-1}\}$, do que resulta que $\alpha \in]x_i, y_i[\subseteq]x_i, x_i + \epsilon[\subseteq [0,1] \setminus S$. $\square$

É claro que, se puder, I não vai jogar num tal ponto, mas pode acontecer que não tenha alternativa ou que II tenha forma de o restringir a uma tal escolha. Nesse caso, II tem uma estratégia que assegura a sua vitória após um número finito de jogadas (diremos que tem uma estratégia vencedora finita). Como vimos, se S não tem pontos de acumulação pela direita (tal como no caso em que S é finito), II assegura a sua vitória na primeira jogada. E se S tiver pontos de acumulação pela direita mas o conjunto desses pontos for finito? É o que acontece, por exemplo, com

$$S = \left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{n+3} \, : \, n \in \mathbb{N}\right\} \bigcup \left\{\frac{3}{4} + \frac{1}{n+3} \, : \, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Ora I não está interessado em conceder o jogo logo na sua primeira jogada, logo há-de começar por escolher um ponto de acumulação pela direita de S. Mas então, como S só tem um número finito de pontos de acumulação pela direita, II pode escolher y_1 de modo que entre x_1 e y_1 não exista nenhum ponto de acumulação pela direita de S (repetindo o argumento que descrevemos para o caso em que S é finito). E isso obriga I a escolher x_2 que não é ponto de acumulação pela direita de S, assegurando o jogador II a sua vitória na jogada seguinte.

Generalizemos. Defina-se $S^{(0)} = [0,1]$, $S^{(1)}$ como o conjunto dos pontos de acumulação pela direita de S e, indutivamente, $S^{(n)}$ como o conjunto dos pontos de acumulação pela direita de $S^{(n-1)}$. Então temos

$$S^{(0)} \supseteq S^{(1)} \supseteq S^{(2)} \supseteq \cdots$$

e

Proposição 2 *Se $x_i \in S^{(n)}$ para algum $n \in \mathbb{N}_0$, mas $x_i \notin S^{(n+1)}$, o jogador II assegura a sua vitória em não mais de $i+n$ (das suas) jogadas.*

Prova: Se $n = 0$, o enunciado reduz-se ao da Proposição 1. Fixemos $n \in \mathbb{N}$ e suponhamos que a afirmação é válida para todos os inteiros positivos menores ou iguais a n. Admitamos que x_i pertence a $S^{(n+1)} \setminus S^{(n+2)}$. Então x_i não é ponto de acumulação pela direita de $S^{(n+1)}$, logo II pode escolher y_i de modo que em $]x_i, y_i[$ não existam pontos de $S^{(n+1)}$. Consequentemente, na jogada seguinte, I vai ter de escolher $x_{i+1} \notin S^{(n+1)}$. Como $x_{i+1} \in S^{(0)}$ e $S^{(n+1)} \supseteq S^{(n+2)} \supseteq \cdots$, seja k o maior inteiro não-negativo tal que $x_{i+1} \in S^{(k)}$. Então $k \leq n$ e temos $x_{i+1} \in S^{(k)}$ e $x_{i+1} \notin S^{(k+1)}$. Por hipótese de indução, II pode assegurar a sua vitória em não mais de $k+1$ jogadas após I ter escolhido x_i, sendo $k+1 \leq n+1$. □

Consequentemente,

Corolário 3 *Se $S^{(n)} = \emptyset$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então o jogador II tem uma estratégia vencedora finita, com não mais de n jogadas.*

Prova: Se $S^{(n)} = \emptyset$, então $S^{(\ell)} = \emptyset$ para todo o $\ell \geq n+1$, logo, como $x_1 \in S^{(0)}$, podemos considerar o maior inteiro não-negativo $k \leq n-1$ tal que $x_1 \in S^{(k)}$. Uma vez que $x_1 \in S^{(k)}$ e $x_1 \notin S^{(k+1)}$, a Proposição 2 indica que II tem modo de assegurar a sua vitória em não mais do que $k+1 \leq n$ jogadas. □

Exemplo 1 *Dado um natural n, um exemplo de um conjunto S para o qual $S^{(n)} \neq \emptyset$ e $S^{(n+1)} = \emptyset$ é*

$$S = T_n = \left\{ \frac{1}{n+1} + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i} \,:\, 1 \leq m \leq n,\ k_i \in \mathbb{N} \text{ e } k_i \geq n+1 \right\}.$$

Por esta altura poderá parecer que, sempre que II tem uma estratégia finita, é possível saber-se à partida o número máximo de jogadas que ele terá de efectuar até assegurar a sua vitória. Contudo, isto não é verdade. Por exemplo, se considerarmos o conjunto

$$S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} T_n\right)$$

que resulta do encolhimento e justaposição dos conjuntos T_n do Exemplo 1, temos que, na sua primeira jogada, I pode escolher em que conjunto T_n o jogo vai decorrer, determinando quantas mais jogadas II terá de efectuar para assegurar a vitória. Assim, e visto que I pode iniciar o jogo em qualquer T_n, antes de I jogar pela primeira vez não conhecemos um valor máximo para esse número de jogadas. Analogamente, poder-se-iam construir conjuntos em que II tem estratégia vencedora finita mas I tem de jogar duas, três, n vezes antes de ficar determinado quantas mais jogadas II vai ter de efectuar para assegurar a vitória; ou em que I tem de jogar m vezes, m arbitrariamente grande, antes de ficar a saber quantas vezes mais precisa de jogar para poder determinar afinal quantas jogadas II tem de fazer para assegurar a vitória; e assim sucessivamente.

Por outro lado, será que, sempre que II tem uma estratégia vencedora, ela é finita? Na realidade, não. Por exemplo, se considerarmos $S = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, podemos construir a seguinte estratégia vencedora para II: conhecido x_n, existe $k \in \{0, ..., n-1\}$ tal que $x_n \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$; então II escolhe y_n entre x_n e $\min\left\{y_{n-1}, \frac{k+1}{n}\right\}$, por forma que

$$\frac{k}{n} \leq x_n < \alpha < y_n \leq \frac{k+1}{n}.$$

Deste modo, não pode existir $t \in \{0, ..., n-1\}$ tal que $\alpha = \frac{t}{n}$. Como n é arbitrário, concluimos que α não é racional, e portanto $\alpha \notin S$. Embora consigamos explicitar a estratégia vencedora, a estratégia não é finita pois II tem de reagir a cada jogada prévia de I. Mais: não existe nenhuma estratégia finita para II neste caso, já que, jogasse II como quisesse nas primeiras n jogadas, se a partir daí escolhesse pontos no intervalo $\left]\frac{x_n+y_n}{2}, y_n\right[$, I teria margem para jogar no intervalo $\left]x_n, \frac{x_n+y_n}{2}\right[$, incluindo a possibilidade de fazer $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergir para um racional nesse intervalo.

3 S numerável

Já vimos que II tem estratégia vencedora quando S é finito, quando S, sendo infinito, tem um número finito de pontos de acumulação (o que implica que S tem o cardinal de $\mathbb{N}$, já que o conjunto dos pontos isolados de S tem de ser numerável) e também se $S = \mathcal{Q} \cap [0,1]$. Na verdade, em geral, tem-se:

Proposição 4 *Se S é numerável, o jogador II tem uma estratégia vencedora.*

Prova: O caso em que S é finito já foi tratado. Se S é infinito numerável, os seus elementos podem ser reescritos como os termos de uma sequência injectiva $s_1, s_2, s_3, \cdots$ e II pode usar a seguinte estratégia: dado x_n, escolhe y_n tal que $s_n \notin]x_n, y_n[$. Uma tal escolha é obviamente possível se $s_n \leq x_n$; se acaso se tiver a desigualdade contrária, II escolhe um qualquer $y_n \in]x_n, s_n[$. Deste modo, como $x_n < \alpha < y_n$ para todo o n, α não é igual a s_n para nenhum n, isto é, $\alpha \notin S$. $\square$

Uma vez que, quando $S = [0,1]$, o jogador I ganha, deduzimos da Proposição 4 que:

Corolário 5 $[0,1]$ *não é numerável.*

4 S não-numerável

Analisemos agora alguns jogos para conjuntos S não-numeráveis. Se $S = [\frac{1}{2}, 1]$, I tem estratégia vencedora: se escolher $x_1 = \frac{1}{2}$, é certo que $\alpha \in S$. Note-se que é essencial supor que I é o jogador que inicia o jogo: se a primeira jogada fosse de II, bastaria que escolhesse $y_1 = \frac{1}{2}$ para arruinar as esperanças de I. E se $S = [0,1] \setminus A$, onde A é um conjunto numerável, $A = \{a_1, a_2, ...\}$, como, por exemplo, $S = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$? Neste caso, I pode seguir uma estratégia análoga à que guia II quando S é numerável: escolhe x_1 tal que a_1 não está em $]x_1, 1[$ e, em geral, x_n tal que a_n não está em $]x_n, y_{n-1}[$. Desta forma, I garante que α não está em A, pertencendo portanto a S. Mais geralmente, podemos verificar que I tem estratégia vencedora para uma grande classe de conjuntos S não-numeráveis. A prova pode, porém, ser um pouco decepcionante, como o são alguns argumentos não-construtivos em matemática: sabemos provar que I tem estratégia vencedora, mas não a conseguimos explicitar.

Teorema 6 (Condição suficiente) *Se S contém um subconjunto $T \subseteq [0,1]$ não-vazio tal que todos os pontos de T são pontos de acumulação pela direita de T e todos os pontos de acumulação pela esquerda de T pertencem a S, então o jogador I tem uma estratégia vencedora.*

Prova: Para ganhar, basta que o jogador I escolha sempre pontos em T. As duas propriedades descritas para T permitem que o jogador I siga esta estratégia sem desrespeitar as regras do jogo. Vejamos porquê. Como é o primeiro a jogar, pode escolher $x_1 \in T \cap]0,1[$; a partir daí, tendo escolhido x_n em T, sabe que x_n é ponto de acumulação pela direita de T, logo, qualquer que seja a escolha y_n, o intervalo $]x_n, y_n[$ contém pontos de T, e I pode aí seleccionar $x_{n+1} \in T$. Desta forma, o limite α da sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um ponto de acumulação pela esquerda de T; e, portanto, por hipótese, está em S. [O que prova que, se um conjunto S tem um tal subconjunto T, então é não-numerável.] $\square$

Corolário 7 *O jogador I tem estratégia vencedora se:*

(a) S contém um intervalo $[a,b]$, com $a < b$.

(b) S contém um conjunto perfeito[1] P.

(c) S é um conjunto de Borel não-numerável.

Prova:
(a) O conjunto $T = [a,b[$ satisfaz as condições do Teorema 6 e portanto I tem estratégia vencedora.

(b) Verifiquemos que o conjunto T dos pontos de acumulação pela direita de P satisfaz as condições do Teorema 6. Como, por definição, P é não vazio, fechado e todos os pontos de P são pontos de acumulação de P, o conjunto T é não vazio pois contém pelo menos o mínimo de P: tendo de ser um ponto de acumulação de P, tal mínimo é certamente um ponto de acumulação pela direita. Por outro lado, como P é fechado, $T \subseteq P$, logo todos os pontos de acumulação pela esquerda de T são pontos de acumulação de P, e portanto, pertencem a P; e por isso estão em S.

Para terminar o argumento, precisamos de provar que os pontos de T são pontos de acumulação pela direita de T. Sejam $t \in T$ e $\varepsilon > 0$. Como, por definição, t é ponto de acumulação pela direita de P, existem $x, y \in P \cap]t, t+\varepsilon[$ tais que $x < y$. Se x é ponto de acumulação pela direita de P,

[1] Um conjunto não vazio P é perfeito se e só se é fechado e não tem pontos isolados.

então $x \in T$ e temos o que pretendíamos. Caso contrário, como $P \cap]x, y]$ é não vazio (uma vez que $y \in P$), podemos considerar $z = \inf\ (P \cap]x, y])$. Ora $z \in P$, pois P é fechado, pelo que z é ponto de acumulação de P. Por outro lado, $z > x$, uma vez que x não é ponto de acumulação pela direita de P; e tem-se $]x, z[\cap P = \emptyset$. Logo z é ponto de acumulação pela direita de P, ou seja, $z \in T \cap]t, t + \varepsilon[$.

(c) Todo o conjunto de Borel não-numerável contém um conjunto perfeito (sobre o Teorema de Cantor-Bendixson, veja-se o capítulo §23 de [4]). E portanto podemos aplicar a alínea (b). $\square$

Corolário 8 *Um conjunto perfeito é não-numerável.*

Restam-nos os conjuntos que não são de Borel, isto é, subconjuntos de $\mathbb{R}$ que não são elementos da menor σ-álgebra gerada pelos intervalos (detalhes sobre estes conceitos em [11]). São conjuntos não-numeráveis, e existem uma vez que a família dos conjuntos de Borel tem a potência do contínuo (ou seja, de $\mathbb{R}$) enquanto a família de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ tem cardinal estritamente maior. Por exemplo, não é de Borel o conjunto de todos os irracionais tais que a sua representação em fracção continuada simples $a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ddots}}$ tem a propriedade de a_{n_k} dividir $a_{n_{k+1}}$, para alguma subsucessão $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ dos coeficientes (mais detalhes em [5]). O Axioma da Escolha permite provar que há conjuntos que não são de Borel sem subconjuntos perfeitos: Bernstein construiu um conjunto $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{B}$ e o seu complementar intersectam todo o subconjunto não-numerável e fechado de números reais [10]. Será que para $S = \mathfrak{B}$ ainda é verdade que o jogo é determinado, isto é, que algum dos jogadores tem estratégia vencedora?

5 Pausa

Neste ponto, é pertinente uma reflexão sobre aquilo que sabemos e o que ainda não sabemos. De facto, embora já tenhamos entendido o desfecho do jogo para uma vasta parcela de subconjuntos S de $\mathbb{R}$, não é ainda claro quais são as características essenciais de S que determinam a existência de uma estratégia vencedora para algum dos jogadores. A cardinalidade de S é sem dúvida relevante: em conjuntos numeráveis, que têm poucos pontos, II consegue afastar o jogador I de S, impedindo-o de ganhar; por outro lado, os conjuntos não-numeráveis parecem oferecer a I espaço de manobra suficiente para ganhar o jogo. Contudo, o Teorema 6 indica ser também útil uma certa disposição dos pontos de S — mas pode acontecer que a não-numerabilidade implique a existência de uma região em S com um tal arranjo favorável dos seus elementos. Esta propriedade parece estar relacionada com as características de $S^{(1)}$, o conjunto dos pontos de acumulação pela direita de S: como vimos, certas restrições nesse conjunto e sucessivos iterados asseguram que II tem estratégia vencedora finita, ao retirarem espaço de manobra ao jogador I. Mas, se $S^{(1)}$ é suficientemente grande para não existirem tais restrições, o resultado do jogo pode ser muito distinto: por exemplo, quer quando $S = [0, 1]$, caso em que I ganha sem esforço, quer quando $S = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, caso em que II tem estratégia vencedora, temos $S^{(1)} = [0, 1[$. Isto significa que não basta garantir que, em cada jogada, I tem uma escolha favorável à mão, no sentido de ser grande o conjunto $S^{(1)}$. É necessário que I possa e saiba como fazer essas escolhas de forma a que a sucessão que constrói convirja para um ponto de S; isto é, que tenha uma estratégia vencedora. Esta segunda condição parece ser mais difícil de caracterizar ou de associar a propriedades de S.

Pode acontecer que algumas das condições suficientes que estabelecemos sejam também necessárias, mas, nesse caso, como prová-lo? Note-se que, para estabelecer o recíproco de alguma das alíneas do Corolário 7 ou da Proposição 4, devemos começar por supor que existe uma estratégia vencedora para um dos jogadores, ainda que não saibamos como actua, e isso é tudo. A questão que permanece é como trabalhar com essa hipótese e o vasto leque de escolhas que lhe está associado de forma a mostrar que S satisfaz certas propriedades.

6 Resolução do jogo

Enquanto tentávamos responder a esta questão, a primeira autora deste texto descobriu um artigo com mais de trinta anos, [6], que resolve um jogo semelhante ao que aqui consideramos. O argumento que consta desse trabalho é atribuído a R. Solovay, que não o publicara anteriormente. O que se segue é uma adaptação das provas apresentadas nesse artigo, em notação bastante mais simples. Deste modo, com a alínea b) do Corolário 7 e a Proposição 4, completamos a caracterização do jogo.

Teorema 9 (Condição necessária)

(a) Se I tem uma estratégia vencedora, então S contém um perfeito.

(b) Se II tem uma estratégia vencedora, então S é numerável.

Prova:
(a) Suponhamos que o jogador I tem uma estratégia vencedora $\mathcal{E}$ e seja $\mathcal{L}_1$ o conjunto dos limites de todos os jogos em que I segue $\mathcal{E}$. Tal conjunto está contido em S; por isso, para provar que S contém um perfeito, basta garantir que entre os desfechos do jogo que constam de $\mathcal{L}_1$ há um subconjunto perfeito. Para isso, faremos uso do Lema seguinte que fornece um método de construção de conjuntos perfeitos inspirado no conjunto ternário de Cantor. No que se segue, Σ designa o espaço das palavras finitas formadas com o alfabeto $\{0,1\}$, incluindo a palavra vazia, $|u|$ é o comprimento da palavra u (ou seja, o número de dígitos de $\{0,1\}$ usados para a escrever) e uv representa a concatenação de duas palavras u e v.

Lema 10 ([3]) *Se $(\Lambda_u)_{u\in\Sigma}$ é uma família de intervalos fechados e não vazios tais que, para todo o $u \in \Sigma$, se tem*

- $\Lambda_{u0} \subseteq \Lambda_u$, $\Lambda_{u1} \subseteq \Lambda_u$
- $\Lambda_{u0} \cap \Lambda_{u1} = \emptyset$.
- *o diâmetro de Λ_u tende para zero quando $|u|$ tende para $+\infty$*

então o conjunto $P = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \bigcup_{\{u\in\Sigma\colon |u|=n\}} \Lambda_u$ é perfeito.

Para se encontrar um subconjunto perfeito em S, precisamos de lidar com muitas possibilidades de jogo cujos desfechos estejam em S. Para isso, não nos convém que o jogador I se desvie da sua estratégia vencedora $\mathcal{E}$. E que jogadas devemos atribuir ao jogador II? De acordo com as regras do jogo, o jogador II tem, em cada etapa, um intervalo não degenerado de pontos permitidos. Para seleccionarmos os que afinal nos interessam, é natural que sejamos guiados pela única hipótese que temos, a da existência da estratégia vencedora $\mathcal{E}$. Vejamos como o fazer.

Na sua primeira jogada, I escolhe $x_1^0 = \mathcal{E}(\emptyset)$. Esta opção determina o intervalo onde o jogo irá decorrer. Defina-se

$$\Lambda_\emptyset = [x_1^0, 1].$$

A seguir, II joga, por exemplo,

$$y_1^0 = \frac{x_1^0 + 1}{2}$$

a que I responde com $x_2^0 = \mathcal{E}(x_1^0, y_1^0)$. Mas, em vez disso, II poderia ter escolhido

$$y_1^1 = \frac{x_1^0 + \mathcal{E}\left(x_1^0, \frac{x_1^0+1}{2}\right)}{2}$$

a que I responderia com $x_2^1 = \mathcal{E}(x_1^0, y_1^1)$. Note-se que y_1^1 é determinado exclusivamente pela escolha x_1^0 do jogador I e que essa é uma jogada legítima do jogador II. Tenhamos ainda em atenção que as três jogadas

$$x_1^0,\ y_1^0 = \frac{x_1^0+1}{2},\ x_2^0 = \mathcal{E}(x_1^0, y_1^0)$$

correspondem a um jogo distinto daquele que se inicia com

$$x_1^0,\ y_1^1 = \frac{x_1^0 + \mathcal{E}\left(x_1^0, \frac{x_1^0+1}{2}\right)}{2},\ x_2^1 = \mathcal{E}(x_1^0, y_1^1).$$

Estes números verificam as desigualdades

$$0 < x_1^0 < x_2^1 < y_1^1 < x_2^0 < y_1^0 < 1$$

e definem dois intervalos disjuntos,

$$\Lambda_0 = [x_2^0, y_1^0] \qquad \text{e} \qquad \Lambda_1 = [x_2^1, y_1^1]$$

contidos em $\Lambda_\emptyset$ e com comprimento menor do que metade da amplitude de $\Lambda_\emptyset$, uma vez que

$$y_1^0 - x_2^0 < y_1^0 - x_1^0 = \frac{1 - x_1^0}{2}$$

e

$$y_1^1 - x_2^1 < y_1^1 - x_1^0 = \frac{x_2^0 - x_1^0}{2} < \frac{y_1^0 - x_1^0}{2} = \frac{1 - x_1^0}{4}.$$

Prossigamos com o jogo. Se as três jogadas anteriores foram x_1^0, y_1^0, x_2^0, o resto do jogo decorrerá no interior de Λ_0 e podemos, por um raciocínio análogo ao anterior mas aplicado a Λ_0 em vez de $\Lambda_\emptyset$, definir dois intervalos $\Lambda_{00} = [x_3^{00}, y_2^{00}]$ e $\Lambda_{01} = [x_3^{01}, y_2^{01}]$, disjuntos, contidos em Λ_0 e com amplitudes que não excedem metade da amplitude de Λ_0, cada um deles correspondendo à região onde o jogo se efectua após uma diferente opção de II e respectiva resposta por parte de I. Analogamente se definem $\Lambda_{10} = [x_3^{10}, y_2^{10}]$ e $\Lambda_{11} = [x_3^{11}, y_2^{11}]$ a partir de Λ_1, supondo que as três primeiras jogadas foram x_1^0, y_1^1, x_2^1.

Usando indução finita, construímos uma família $(\Lambda_u)_{u\in\Sigma}$ de intervalos fechados e não vazios da seguinte forma: fixado um natural n e dada uma palavra $u = t_1t_2...t_n$ com o correspondente intervalo $\Lambda_u = [x^u_{n+1}, y^u_n]$, definimos

$$\Lambda_{u0} = [x^{u0}_{n+2}, y^{u0}_{n+1}] \qquad \text{e} \qquad \Lambda_{u1} = [x^{u1}_{n+2}, y^{u1}_{n+1}]$$

onde

$$\begin{aligned}
y^{u0}_{n+1} &= \frac{x^u_{n+1} + y^u_n}{2} \\
x^{u0}_{n+2} &= \mathcal{E}\left(x^0_1, y^{t_1}_1, x^{t_1}_2, y^{t_1t_2}_2, x^{t_1t_2}_3, ..., y^u_n, x^u_{n+1}, y^{u0}_{n+1}\right) \\
y^{u1}_{n+1} &= \frac{x^u_{n+1} + x^{u0}_{n+2}}{2} \\
x^{u1}_{n+2} &= \mathcal{E}\left(x^0_1, y^{t_1}_1, x^{t_1}_2, y^{t_1t_2}_2, x^{t_1t_2}_3, ..., y^u_n, x^u_{n+1}, y^{u1}_{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Esta família de intervalos é especial porque:

P1. $\forall\ u \in \Sigma \quad \Lambda_{u0} \cap \Lambda_{u1} = \emptyset$.

P2. $\forall\ u \in \Sigma \quad \Lambda_{u0} \subseteq \Lambda_u$ e $\Lambda_{u1} \subseteq \Lambda_u$.

P3. Para todo o $u \in \Sigma$, as amplitudes de Λ_{u0} e Λ_{u1} não excedem metade da de Λ_u.

Ou seja, a família $(\Lambda_u)_{u\in\Sigma}$ satisfaz as hipóteses do Lema 10, logo o conjunto

$$P = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \ \bigcup_{\{u\in\Sigma:\, |u|=n\}} \Lambda_u$$

é perfeito. Além disso, dado um elemento $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, a sucessão

$$\Lambda_\emptyset \supseteq \Lambda_{a_1} \supseteq \Lambda_{a_1a_2} \supseteq ...$$

é formada por intervalos encaixados cuja amplitude, por P3, tende para 0 quando n vai para $+\infty$. E portanto:

P4. A intersecção $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_{a_1a_2\cdots a_n}$ reduz-se a um ponto α, igual ao limite da sucessão de extremos esquerdos (ou direitos) dos intervalos $\Lambda_{a_1a_2\cdots a_n}$.

Ora, por construção, a sucessão dos extremos esquerdos destes intervalos corresponde às escolhas sucessivas de I num jogo em que ele segue a estratégia $\mathcal{E}$. Logo

P5. O limite α está em $\mathcal{L}_1$.

Finalmente, tendo em conta que um número real $\gamma \in]0,1[$ está em P se e só se existe uma (única por P3) sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tal que $\gamma \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_{a_1 a_2 \cdots a_n}$, deduzimos de P4 e P5 que $P \subseteq \mathcal{L}_1$.

(b) Suponhamos que o jogador II tem uma estratégia vencedora $\mathcal{F}$ e seja $\mathcal{L}_2$ o conjunto dos limites de todos os jogos em que II segue $\mathcal{F}$. Para mostrar que S é numerável, procuraremos um subconjunto B de $\mathcal{L}_2$ cujo complementar em $[0,1]$ seja numerável. Isso implica que $[0,1]\setminus\mathcal{L}_2$ é numerável, o que, como $\mathcal{L}_2 \subseteq [0,1] \setminus S$, garante que S é numerável. Para o conseguir, é natural que tenhamos de considerar muitas possibilidades de decurso do jogo, sabendo apenas que o jogador II tem estratégia para vencer quaisquer que sejam as escolhas de I.

Suponhamos que II segue a estratégia $\mathcal{F}$. Na sua primeira jogada, I pode escolher qualquer ponto em $]0,1[$, em particular um termo da sucessão $(a_t)_{t\in\mathbb{N}_0} = \left(\frac{1}{2^t}\right)$, à excepção do primeiro. Fixemos $t \in \mathbb{N}$ e suponhamos que I escolhe a_t. Então II joga $\mathcal{F}(a_t)$ e, em seguida, I terá de escolher um ponto no intervalo $]a_t, \mathcal{F}(a_t)[$. Se $]a_t, a_{t-1}[$ está contido neste intervalo, ou seja, se

$$a_{t-1} \leq \mathcal{F}(a_t)$$

definimos $x_1^1 = a_{t-1}$. Caso contrário, seja $x_1^1 = \mathcal{F}(a_t)$. Em ambos os casos, I tem liberdade para, na sua segunda jogada, escolher qualquer ponto do intervalo

$$J_1^1 =]a_t, x_1^1[.$$

Note-se que, no primeiro dos casos, o intervalo $]a_t, a_{t-1}[$ está totalmente coberto por J_1^1. No segundo caso isso não acontece e portanto prosseguimos, supondo que, em vez de a_t, o jogador I escolheu, na sua primeira jogada, x_1^1. Designemos

$$x_2^1 = \min\left\{a_{t-1}, \mathcal{F}(x_1^1)\right\}.$$

Agora, na sua segunda jogada, I pode escolher qualquer ponto de

$$J_2^1 =]x_1^1, x_2^1[.$$

Mais uma vez, se $x_2^1 = a_{t-1}$, então J_1^1 e J_2^1 cobrem o intervalo $]a_t, a_{t-1}[$ a menos de um ponto; caso contrário, continuamos, supondo que na sua primeira jogada I escolheu x_2^1 e aplicando um raciocínio análogo ao anterior.

Repetindo este procedimento, construímos uma sucessão (eventualmente reduzida a um número finito de elementos) de intervalos abertos, não-vazios, disjuntos dois a dois, que cobrem o intervalo $]a_t, \rho_1[$ a menos de um subconjunto numerável, sendo

$$\rho_1 = \lim_{m \to +\infty} x_m^1 = \sup \left\{ x_m^1 : m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Se $\rho_1 < a_{t-1}$, refazemos o argumento anterior no intervalo $]\rho_1, a_{t-1}[$, obtendo uma sucessão de pontos $(x_t^2)_{t\in\mathbb{N}}$ e uma sucessão de intervalos $(J_t^2)_{t\in\mathbb{N}}$, abertos, não vazios e disjuntos dois a dois, que cobrem, a menos de um subconjunto numerável, o intervalo $]\rho_1, \rho_2[$, onde

$$\rho_2 = \lim_{m \to +\infty} x_m^2.$$

De novo, se $\rho_2 < a_{t-1}$, procedemos como anteriormente no intervalo $]\rho_2, a_{t-1}[$, e assim sucessivamente. Pode acontecer que mesmo o limite ℓ de $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ seja menor que a_{t-1}; nesse caso, voltamos a aplicar o processo descrito no intervalo $]\ell, a_{t-1}[$. Pode ser necessário prolongar esta construção por muitos, muitos níveis, mas a_{t-1} terá de ser alcançado: de facto, se o supremo s (de facto, máximo) dos pontos que podem ser alcançados desta forma fosse estritamente menor que a_{t-1}, então poder-se-ia continuar o processo no intervalo $[s, a_{t-1}]$, contradizendo o facto de s ser supremo; logo $s = a_{t-1}$. Note-se, contudo, que todo este processo tem um número quando muito numerável de etapas, pois a função que a cada intervalo assim obtido associa um racional nesse intervalo é injectiva por eles terem interiores disjuntos.

Em resumo, criámos uma sucessão (eventualmente reduzida a um número finito de elementos) de intervalos abertos, não-vazios, disjuntos dois a dois, com amplitudes inferiores ao comprimento de $]a_t, a_{t-1}[$, e consequentemente não superiores a $1/2$, que cobrem o intervalo $]a_t, a_{t-1}[$ a menos de um subconjunto numerável. Movamos agora o argumento para o intervalo $]a_{t+1}, a_t[$, e depois para os seguintes. Reunindo os intervalos gerados para cada $t \in \mathbb{N}$, obtemos uma família, que designamos por Ω_1, de intervalos abertos, não-vazios e disjuntos dois a dois, com as seguintes propriedades:

- $[0,1] \setminus \bigcup_{J\in\Omega_1} J$ é numerável.
- Se $J \in \Omega_1$, então a amplitude de J não excede $\frac{1}{2}$.

- Se $J =]c,d[\in \Omega_1$, então, na sua primeira jogada, I pode escolher c e na sua jogada seguinte pode escolher qualquer ponto de J.

Relembremos que o nosso objectivo é criar um subconjunto de $\mathcal{L}_2$ cujo complementar em $[0,1]$ seja numerável. Assim se explica a importância de os pontos excluídos nesta construção formarem um conjunto numerável. Como, além disso, temos ainda de garantir que excluímos todos os pontos que não pertencem a $\mathcal{L}_2$ (embora possamos eliminar também alguns que estão nesse conjunto), faz sentido remover as escolhas de I e II nas suas primeiras jogadas, já que elas não são certamente o limite α do jogo em questão nem, à partida, existe razão para que sejam o limite de algum jogo em que II siga a sua estratégia. Finalmente, embora de momento não possamos ter a certeza de termos excluído todos os pontos que pretendíamos, isso será assegurado, como veremos, pela continuação deste processo.

Fixemos agora um elemento de Ω_1, digamos $J =]c,d[$. Suponhamos que na sua primeira jogada I escolhe c. Então qualquer elemento de J é uma escolha válida na sua próxima jogada, e podemos reproduzir neste intervalo o argumento anterior. Consideremos a sucessão $(b_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ de termo geral

$$b_t = c + \frac{1}{2^t}(d-c)$$

e suponhamos que I escolhe b_t na sua segunda jogada. Seja

$$z_1^1 = \min\left\{b_{t-1}, \mathcal{F}(c, \mathcal{F}(c), b_t)\right\}.$$

Se o intervalo

$$K_1^1 =]c, z_1^1[$$

cobre J, paramos, registando que, na sua terceira jogada, I pode escolher qualquer ponto de $]b_t, z_1^1[$. Se

$$\mathcal{F}\left(c, \mathcal{F}(c), b_t\right) < b_{t-1}$$

supomos que, na sua segunda jogada, I afinal escolhe z_1^1, e construímos o intervalo

$$K_2^1 =]z_1^1, z_2^1[$$

onde

$$z_2^1 = \min\left\{b_{t-1}, \mathcal{F}\left(c, \mathcal{F}(c), z_1^1\right)\right\}.$$

E assim sucessivamente. Deste modo, obtemos uma família de intervalos abertos, não-vazios, disjuntos dois a dois, que cobrem o intervalo $]b_t, b_{t-1}[$, a menos de um subconjunto numerável, e cujas amplitudes não excedem metade da amplitude de J e, portanto, são inferiores a $\frac{1}{4}$. Reunindo todas estas famílias de intervalos, construídas para cada $t \in \mathbb{N}$, descrevemos uma família de intervalos que cobre J a menos de um subconjunto numerável. Repetindo o processo para todo o $J \in \Omega_1$, e agrupando todos esses intervalos, obtemos finalmente uma família, que designamos por Ω_2, de intervalos abertos, não-vazios e disjuntos com as seguintes propriedades:

- $[0,1] \setminus \bigcup_{K \in \Omega_2} K$ é numerável.
- Se $K \in \Omega_2$, então a amplitude de K não excede $\frac{1}{4}$.
- Para todo o $K \in \Omega_2$ existe um (único) intervalo $J \in \Omega_1$ tal que $K \subseteq J$.
- Se $K =]c_2, d_2[\in \Omega_2$ e $J =]c_1, d_1[\in \Omega_1$ é tal que $K \subseteq J$, então nas suas duas primeiras jogadas I pode escolher c_1, c_2, e na sua jogada seguinte pode escolher qualquer ponto de K.

Note-se que os pontos excluídos nesta altura são os pontos que já haviam sido removidos (correspondentes a primeiras jogadas de I e de II num certo conjunto de jogos) mais os pontos que são segundas jogadas de I e de II num certo subconjunto desse conjunto de jogos. Podemos analogamente remover os que correspondem às terceiras jogadas num certo subconjunto desse subconjunto, e assim sucessivamente. De facto, o que iremos fazer é continuar este procedimento indefinidamente, removendo todos os pontos que correspondem às jogadas de I e II num certo conjunto de jogos e deixando apenas o limite α de cada um desses jogos, que está em $\mathcal{L}_2$.

De forma análoga, construímos Ω_n, para todo o natural n. E, por indução finita, provamos que:

Lema 11 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma família Ω_n de intervalos abertos não-vazios e disjuntos dois a dois tais que, se $\Gamma_n = \bigcup_{J \in \Omega_n} J$, então*

- *$[0,1] \setminus \Gamma_n$ é numerável.*
- *Se $J \in \Omega_n$, então a amplitude de J não excede $\frac{1}{2^n}$.*
- *Para todo o $K \in \Omega_{n+1}$ existe um (único) intervalo $J \in \Omega_n$ tal que $K \subseteq J$.*

- *Para $n \geq 2$ e todo o $J_n \in \Omega_n$, se $J_{n-1} \in \Omega_{n-1}$, ..., $J_1 \in \Omega_1$ são intervalos tais que*
$$J_n \subseteq J_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq J_1$$
e $J_i =]c_i, d_i[$, então, nas suas n primeiras jogadas, I pode escolher $c_1, c_2, \cdots, c_n$ e na jogada seguinte pode escolher qualquer ponto de J_n.

Seja agora $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$. Então
$$[0,1] \setminus B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]0,1[\setminus \Gamma_n$$
e, pelo Lema 11, esta última reunião é numerável. Além disso, pelo que observámos sobre o processo de exclusão de pontos, é não vazia; e contém S uma vez que:

- dado $\gamma \in B$, existe uma (única) sucessão de intervalos $J_1 \supseteq J_2 \supseteq \cdots$, sendo $J_n =]c_n, d_n[\in \Omega_n$, tal que $\gamma \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n$;
- como a amplitude de J_n tende para 0 quando $n \to +\infty$, essa intersecção reduz-se a um ponto, precisamente
$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} c_n;$$
- como a sucessão $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ representa escolhas do jogador I num jogo em que II segue a estratégia $\mathcal{F}$, este limite está em $\mathcal{L}_2$.

Consequentemente, $B \subseteq [0,1] \setminus S$. $\square$

Uma vez que o Teorema 9, o Corolário 7 e a Proposição 4 enunciam conjuntamente um critério completo para a existência de estratégia vencedora neste jogo, deduzimos que, admitindo o Axioma da Escolha, para alguns conjuntos S este jogo tem um desfecho imprevisível.

Corolário 12 *Se S é não-numerável e não contém um perfeito, o jogo é não-determinado.*

7 Comentário final

Se S é um conjunto de Bernstein $\mathfrak{B}$, sabemos que, para qualquer intervalo K aberto e não-vazio, se tem $\mathfrak{B} \cap K \neq \emptyset$ e $([0,1] \setminus \mathfrak{B}) \cap K \neq \emptyset$. Além disso, nenhum dos jogadores tem estratégia vencedora. Nestas condições, não podemos dizer quem ganhará. Contudo, se admitirmos que I e II jogam para ganhar, parece-nos que podemos pelo menos afirmar que α é igual a $\beta = \lim_{n\to+\infty}\ y_n$.

É difícil explicitar matematicamente em que consiste "jogar para ganhar", embora a ideia pareça natural. O que queremos dizer com isso é que:

- o jogador I mira os elementos de S, tentando lá colocar o limite das suas jogadas;
- o jogador II situa as suas jogadas entre as do adversário e os elementos de S que possam estar na mira de I.

Assim, se $\alpha < \beta$ e I ganha, devemos entender que, apesar dos esforços de II, o jogador I conseguiu não só que o limite das suas jogadas estivesse em S, como pôde fazê-lo folgadamente, uma vez que em $]\alpha, \beta[\cap \mathfrak{B}$ havia ainda muitos valores favoráveis para α. Mas, se $\alpha < \beta$, parece que II não fez tudo o que estava ao seu alcance para retirar chances de vitória a I. Se, pelo contrário, $\alpha < \beta$ e II ganha, devemos deduzir que o jogador II, assistido pelo facto de também ser verdade que $]\alpha, \beta[\cap ([0,1] \setminus \mathfrak{B})$ é não-numerável, conseguiu que α estivesse fora de S. Mas, se $\alpha < \beta$, como pôde ser bem sucedido se a sua única intervenção possível é a de retirar espaço de manobra a I, no que não parece ter-se esforçado muito?

A conclusão neste contexto é a de que, se $S = \mathfrak{B}$, então $\alpha = \beta$; e, dada a abundância de pontos de $\mathfrak{B}$, que o jogador I não consiga que α esteja em S é uma mera questão de azar. Se a existência de uma estratégia para algum dos jogadores nos leva a entendê-lo como um jogo de perícia, para $S = \mathfrak{B}$ o jogo tem de ser considerado como sendo de sorte, embora não seja matematicamente óbvio o que isso significa.

Este artigo foi elaborado no âmbito do *Programa Novos Talentos em Matemática*, da Fundação Calouste Gulbenkian. As autoras agradecem ao *Referee* pela leitura atenta deste texto.

Referências

[1] D. Gale, I. Stewart, *Contributions to the theory of games*, Ann. of Math. Stud., vol.2, 28 (1953), 245–266.

[2] H. Hanani, *A generalization of the Banach and Mazur game*, Trans. Amer. Math. Soc. 94 (1960), 86–102.

[3] T. Jech, *Set Theory*, Academic Press, 1978.

[4] K. Kuratowski, *Topology*, Academic Press, 1966.

[5] N. Lusin *Sur les ensembles analytiques*, Fund. Math. 10 (1927), 1–95.

[6] G. Moran, *Existence of nondetermined sets for some two person games over reals*, Israel J. Math. 9 (1971), 316–329.

[7] J. Mycielski, *On the axiom of determinateness*, Fund. Math. 53 (1964), 202–224.

[8] J. Mycielski, *On the axiom of determinateness II*, Fund. Math. 59 (1966), 203–212.

[9] J. Mycielski, *Some new ideals of sets on the real line*, Colloq. Math. 20 (1969), 71–76.

[10] J. Oxtoby, *Measure and Category*, Springer-Verlag, 1971.

[11] H. Royden, *Real Analysis*, Prentice Hall, 1988.

[12] R. Solovay, *A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable*, Ann. of Math. 92, No. 1 (1970), 1–56.

[13] A. Turowicz, *Sur une propriété des nombres irrationels*, Ann. Polon. Math. 2 (1955), 103–105.

[14] Colloquium of Mathematics 1 (1947), 57.