A noção de valorização em um anel de divisão

Dinamérico P. Pombo Jr.
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
21945-970 Rio de Janeiro, Brasil
e-mail: dpombo@terra.com.br

Resumo: Nesta nota é apresentada uma exposição elementar de alguns fatos básicos sobre a noção de valorização em um anel de divisão.

Abstract: In this note an elementary exposition of some basic facts about the notion of a valuation on a division ring is presented.

palavras-chave: anéis de divisão, valorizações.

keywords: division rings, valuations.

Introdução

Apoiado na contribuição fundamental de K. Hensel sobre os números p-ádicos [8], analisada com lucidez nas Notas Históricas de [12], J. Kürschák introduziu em [10] o conceito de valorização em um corpo arbitrário. Nascia assim a Teoria das Valorizações, da qual vários aspectos importantes podem ser encontrados, por exemplo, em [1], [2], [4], [5], [11] e [12].

Nesta nota de divulgação consideramos a noção de valorização em um anel de divisão arbitrário, adotando para isso o enfoque proposto por E. Artin no contexto dos corpos [2], e provamos alguns fatos básicos sobre tais valorizações utilizando técnicas análogas àquelas desenvolvidas por E. Artin e já amplamente incorporadas à literatura [4, 12].

Valorizações em anéis de divisão: exemplos e fatos básicos

No que segue $\mathbb{K}$ denotará um anel de divisão arbitrário, salvo menção expressa em contrário, e $\mathbb{K}^*$ denotará o grupo multiplicativo (não necessariamente comutativo) dos elementos não nulos de $\mathbb{K}$.

Definição 1. Seja C um número real. Uma aplicação

$$|\cdot|\colon \mathbb{K} \to \mathbb{R}$$

é dita uma C-*valorização* em $\mathbb{K}$ se, para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, as seguintes condições são satisfeitas:

(a) $|\lambda| > 0$ se $\lambda \in \mathbb{K}^*$ e $|0| = 0$;

(b) $|\lambda\mu| = |\lambda|\,|\mu|$;

(c) a relação $|\lambda| \leq 1$ implica $|1+\lambda| \leq C$.

Observação 2. (i) De (a) e (b) acima segue que $|1| = 1$ (logo, $C \geq 1$). Consequentemente, $|-1| = 1$ e $|\lambda^{-1}| = \dfrac{1}{|\lambda|}$ se $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

(ii) Se L é um subanel de divisão de $\mathbb{K}$, a restrição de $|\cdot|$ a L é uma C-valorização em L.

Observação 3. Seja $|\cdot|\colon \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ satisfazendo as condições (a) e (b) da Definição 1. É fácil ver que $|\cdot|$ define uma topologia $\tau_{|\cdot|}$ em $\mathbb{K}$, cujos abertos são os subconjuntos A de $\mathbb{K}$ com a seguinte propriedade: para cada $\lambda \in A$ existe um inteiro $n \geq 1$ tal que $\left\{\mu \in \mathbb{K};\, |\mu - \lambda| < \dfrac{1}{n}\right\} \subset A$. Raciocinando exatamente como na demonstração do Teorema 4 da página 6 de [2], conclui-se que para que $\tau_{|\cdot|}$ seja uma topologia de Hausdorff, é necessário e suficiente que $|\cdot|$ seja uma C-valorização em $\mathbb{K}$ para algum número real C.

Vejamos alguns exemplos simples de C-valorizações.

Exemplo 4. A aplicação definida por $|\lambda| = 1$ se $\lambda \in \mathbb{K}^*$ e $|0| = 0$ é uma 1-valorização em $\mathbb{K}$, dita a *valorização trivial* em $\mathbb{K}$. No caso particular em que $\mathbb{K}$ é finito, a única C-valorização $|\cdot|$ em $\mathbb{K}$ é a trivial. Realmente, se $\lambda \in \mathbb{K}^*$ existe um inteiro $n \geq 1$ tal que $\lambda^n = 1$, e daí resulta que $|\lambda| = 1$. Cabe também mencionar que, por um teorema de Wedderburn [13, 14], todo anel de divisão finito é um corpo.

Exemplo 5. Seja $\mathbb{H}$ o anel dos quatérnios de Hamilton [6, 7, 9]. Então a aplicação

$$|\cdot|\colon x + yi + zj + wk \in \mathbb{H} \longmapsto (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}$$

é uma 2-valorização em $\mathbb{H}$. Além disso, se $\mathbb{Q} \subset L \subset \mathbb{R}$ é um corpo intermediário (por exemplo, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{k})$ para k um natural primo), então

$$\mathbb{H}_L = \{x + yi + zj + wk;\, x, y, z, w \in L\}$$

é um subanel de divisão de $\mathbb{H}$ e a restrição de $|\cdot|$ a $\mathbb{H}_L$ é uma 2-valorização em $\mathbb{H}_L$.

O exemplo a seguir é baseado no Exercício 10 da página 68 de [3].

Exemplo 6. Suponhamos $\mathbb{K}$ não comutativo e consideremos o grupo aditivo produto $L = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, onde $\mathbb{N}$ designa o conjunto dos números inteiros não negativos. Para quaisquer dois elementos $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de L, definamos

$$(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\,(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,$$

onde $\gamma_n = \sum\limits_{p+q=n} \lambda_p\mu_q$. L é um anel (não comutativo) com unidade $(1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ e sem divisores de zero. Como a aplicação

$$\lambda \in \mathbb{K} \mapsto (\lambda, 0, 0, \ldots, 0, \ldots) \in L$$

é um homomorfismo injetor, podemos identificar $\mathbb{K}$ a um subanel de L. Escreveremos então $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n X^n$ em lugar de $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cabendo notar que $X^p\lambda = \lambda X^p$ para quaisquer $p \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Se $u = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n X^n \in L$ e $u \neq 0$, a ordem de u, $w(u)$, é o menor $k \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_k \neq 0$; u é invertível se, e somente se, $w(u) = 0$.

O anel L pode ser imerso em um anel de divisão M, necessariamente não comutativo, de modo que todo elemento não nulo f de M se expressa de maneira única na forma

$$f = u\,X^k,$$

onde $w(u) = 0$ e $k \in \mathbb{Z}$. Fixemos $0 < \alpha < 1$. Para cada elemento não nulo $f = u\,X^k$ de M, definamos $|f| = \alpha^k$, e definamos ainda $|0| = 0$. Afirmamos que $|\cdot|$ é uma valorização em M para a qual $C = 1$ é permissível. Com efeito, é claro que $|f| > 0$ se $f \neq 0$. Sejam $f = u\,X^k$ e $g = v\,X^\ell$ dois elementos não nulos de M. Como $fg = uv\,X^{k+\ell}$ e $w(uv) = 0$, tem-se

$$|fg| = \alpha^{k+\ell} = \alpha^k\alpha^\ell = |f|\,|g|.$$

Finalmente, admitamos $1 + f \neq 0$ e $|f| \leq 1$ e escrevamos $u = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \xi_n X^n$. Logo, $k \geq 0$, e daí resulta que $|1 + f| \leq 1$ (mais precisamente, $|1 + f| = 1$ se $k \geq 1$ ou $k = 0$ e $1 + \xi_0 \neq 0$, e $|1 + f| \leq \alpha < 1$ se $k = 0$ e $1 + \xi_0 = 0$). Portanto, a nossa afirmação está justificada.

A seguinte reformulação da noção de C-valorização nos será útil:

Proposição 7. Para uma aplicação $|\cdot|\colon \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ satisfazendo as condições (a) e (b) da Definição 1 e um número real C, as asserções abaixo são equivalentes:

(i) $|\cdot|$ é uma C-valorização em $\mathbb{K}$;

(ii) $|\lambda + \mu| \leq C \max\{|\lambda|, |\mu|\}$ para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sejam $\lambda \in \mathbb{K}$ e $\mu \in \mathbb{K}^*$ tais que $|\lambda| \leq |\mu|$. Então $|\lambda\mu^{-1}| \leq 1$ e (i) fornece $|1 + \lambda\mu^{-1}| \leq C$. Portanto,

$$|\lambda + \mu| \leq C|\mu| = C \max\{|\lambda|, |\mu|\},$$

provando (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i): Se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $|\lambda| \leq 1$, (ii) fornece $|1 + \lambda| \leq C \max\{|\lambda|, |1|\} = C$, provando (i).

Usando a Proposição 7 e indução, justifica-se a validade da desigualdade a seguir, a qual será fundamental para nossos propósitos.

Proposição 8. Seja $|\cdot|$ uma C-valorização em $\mathbb{K}$. Então, para qualquer inteiro $n \geq 1$ e para quaisquer $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2^n} \in \mathbb{K}$, tem-se

$$|\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{2^n}| \leq C^n \max\{|\lambda_i|;\ 1 \leq i \leq 2^n\}.$$

A próxima proposição caracteriza as C-valorizações para as quais a desigualdade triangular é válida.

Proposição 9. Se $|\cdot|\colon \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ satisfaz as condições (a) e (b) da Definição 1, as asserções abaixo são equivalentes:

(i) $|\lambda + \mu| \leq |\lambda| + |\mu|$ para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ (desigualdade triangular);
(ii) $|1 + \lambda| \leq 1 + |\lambda|$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$;
(iii) $|\cdot|$ é uma 2-valorização em $\mathbb{K}$.

Demonstração. É claro que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Inicialmente, afirmamos que

$$|n \cdot 1| < 2n$$

para todo inteiro $n \geq 1$. Realmente, seja $n \geq 1$ arbitrário e seja s o menor inteiro tal que $2^s \geq n$. Então, pela Proposição 8,

$$|n \cdot 1| = \underbrace{|1 + 1 + \cdots + 1|}_{n \text{ parcelas}} = \underbrace{|1 + 1 + \cdots + 1 + 0 + \cdots + 0|}_{2^s \text{ parcelas}} \leq 2^s < 2n.$$

Agora, sejam $\lambda \in \mathbb{K}^*$, r um inteiro ≥ 1 e $n = 2^r - 1$. Então, pela Proposição 8 e a afirmação acima, segue que

$$\begin{aligned} |1 + \lambda|^n = |(1 + \lambda)^n| &= \left|\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \lambda^i\right| \leq 2^r \max\left\{\left|\binom{n}{i}\lambda^i\right|;\ 0 \leq i \leq n\right\} \\ &= 2^r \max\left\{\left|\binom{n}{i} \cdot 1\right| |\lambda^i|;\ 0 \leq i \leq n\right\} \leq 2^{r+1}\left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} |\lambda|^i\right) = 2^{r+1}(1 + |\lambda|)^n, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|1+\lambda| \leq 2^{\frac{r+1}{2^r-1}}\,(1+|\lambda|).$$

Mas, como $\lim_{r\to\infty} 2^{\frac{r+1}{2^r-1}} = 1$, concluímos que $|1+\lambda| \leq 1+|\lambda|$, provando (ii).
(ii) $\Rightarrow$ (i): De fato, sejam $\lambda \in \mathbb{K}$ e $\mu \in \mathbb{K}^*$ tais que $|\lambda| \leq |\mu|$. Então (ii) fornece $|1+\lambda\mu^{-1}| \leq 1+|\lambda\mu^{-1}|$, o que equivale a $|\lambda+\mu| \leq |\lambda|+|\mu|$. Portanto, (i) é verdadeira, concluindo assim a demonstração.

Observação 10. Na sua definição de valorização em um corpo, Kürschák considerou as condições (a) e (b) da Definição 1 e a condição (ii) da Proposição 9 supondo, ainda, a valorização diferente da trivial.

Definição 11. Uma *valorização não arquimediana* é uma C-valorização para a qual $C = 1$ é permissível.

Como vimos, nos Exemplos 4 e 6 estamos na presença de valorizações não arquimedianas.

Concluímos a nossa nota com uma caracterização das valorizações não arquimedianas:

Proposição 12. Para uma C-valorização $|\cdot|$ em $\mathbb{K}$, as asserções abaixo são equivalentes:

(i) $|\cdot|$ é uma valorização não arquimediana;
(ii) $|\lambda+\mu| \leq \max\{|\lambda|, |\mu|\}$ para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$;
(iii) existe um número real M tal que $|n\cdot 1| \leq M$ para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração. A equivalência entre as condições (i) e (ii) segue da Proposição 7. A implicação (ii) $\Rightarrow$ (iii) segue por indução, bastando tomar $M = 1$. Resta provar que (iii) $\Rightarrow$ (i). Com efeito, seja $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tal que $|\lambda| \leq 1$, e sejam r um inteiro ≥ 1 e $n = 2^r - 1$. Então, pela Proposição 8 e (iii), vem

$$\begin{aligned} |1+\lambda|^n &\leq C^r \max\left\{\left|\binom{n}{i}\cdot 1\right| |\lambda|^i;\, 0 \leq i \leq n\right\} \\ &\leq C^r \max\left\{\left|\binom{n}{i}\cdot 1\right|;\, 0 \leq i \leq n\right\} \leq M\,C^r, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|1+\lambda| \leq M^{\frac{1}{2^r-1}}\,C^{\frac{r}{2^r-1}}.$$

Portanto, como $\lim_{r\to\infty} M^{\frac{1}{2^r-1}} = \lim_{r\to\infty} C^{\frac{r}{2^r-1}} = 1$, concluímos que $|1+\lambda| \leq 1$, provando (i).

Referências

[1] Y. Amice, Les nombres p-adiques, Presses Universitaires de France (1975).

[2] E. Artin, Algebraic Numbers and Algebraic Functions, New York University (1951).

[3] N. Bourbaki, Algèbre, Chapitres 4 et 5, Deuxième édition, Actualités Scientifiques et Industrielles 1102, Hermann (1967).

[4] N. Bourbaki, Commutative Algebra, Hermann and Addison-Wesley (1972).

[5] J.W.S. Cassels, Local Fields, London Mathematical Society Student Texts 3, Cambridge University Press (1986).

[6] W.R. Hamilton, On Quaternions, or on a new System of Imaginaries in Algebra, Philos. Mag. 25 (1844), 489-495.

[7] W.R. Hamilton, Lectures on Quaternions, Dublin (1853).

[8] K. Hensel, Zahlentheorie, Berlin (1913).

[9] N. Jacobson, Lectures in Abstract Algebra, Volume I, Van Nostrand (1951).

[10] J. Kürschák, Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie, J. Reine Angew. Math. 142 (1913), 211-263.

[11] J.-P. Serre, A Course in Arithmetic, Graduate Texts in Mathematics 7, Third printing, Springer-Verlag (1985).

[12] S. Warner, Topological Fields, Notas de Matemática 126, North-Holland (1989).

[13] J.H.M. Wedderburn, A theorem on finite algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 6 (1905), 349-352.

[14] E. Witt, Über die Kommutativität endlicher Schiefkörper, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 8 (1931), 413.